

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Física



Propuesta didáctica de enseñanza aprendizaje de Isometrías a través de la iconografía textil mapuche desde el enfoque de etnomatemática.

Araceli Carolina Alvarado Valderrama

Benjamín Ignacio Pichún Ruz

Sebastián Emanuel Tillerías Vidal

Profesores Guía:

María Soledad Saavedra Ulloa

Claudia Matus Zúñiga

Tesis para optar al Grado de Licenciado en Educación de Física y Matemática.

Santiago – Chile

2018

A-297571 © Araceli Carolina Alvarado Valderrama, 2018

© Benjamín Ignacio Pichún Ruz, 2018

© Sebastián Emanuel Tillerías Vidal, 2018

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial Chile 3.0

Propuesta didáctica de enseñanza aprendizaje de Isometrías a través de la iconografía textil mapuche desde el enfoque de etnomatemática

Araceli Carolina Alvarado Valderrama

Benjamín Ignacio Pichún Ruz

Sebastián Emanuel Tillerías Vidal

Este trabajo de graduación fue elaborado bajo la supervisión de las profesoras guías Sra. María Soledad Saavedra Ulloa y Sra. Claudia Matus Zúñiga, del Departamento de Física, y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora Sra. Silvia Tecpan Flores y Sr. Danny Ahumada Vargas.

María Soledad Saavedra Ulloa

Profesora guía

Claudia Matus Zúñiga

Profesora guía

Silvia Tecpan Flores

Profesora correctora

Danny Ahumada Vargas

Profesor corrector

Roberto Bernal Valenzuela

Director de Departamento

RESUMEN

La histórica manera axiomática, demostrativa y descontextualizada de enseñar y aprender matemática ha sido cuestionada por la comunidad educativa occidental, realizando cambios curriculares junto al diseño de orientaciones didácticas y propuestas metodológicas por parte de las entidades educativas nacionales en las que ha predominado un currículo monocultural, aislando el conocimiento de las prácticas y vivencias cotidianas, existiendo una necesidad de estrategias pedagógicas que aborden de manera contextualizada las diversas temáticas y objetos de estudio.

Las características disciplinares de la geometría permiten situar su enseñanza y aprendizaje de manera contextual; la sociedad se relaciona constantemente con diversos elementos geométricos que se pueden incorporar en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Los elementos iconográficos presentes en la textilería mapuche, son un enriquecedor ejemplo de diferentes isometrías que pueden ser objetos de estudio en las escuelas, a la vez que contribuye a desarrollar habilidades para el futuro, valorando y respetando la diversidad.

En el presente seminario de grado, se plantea una propuesta didáctica compuesta por cinco actividades guiadas por un enfoque etnomatemática, donde se identifican los elementos geométricos presentes en diversa iconografía textil mapuche, reflexionando sobre el significado e importancia que tienen para su pueblo, con miras a ser una propuesta que pueda ser adaptada interdisciplinariamente y que fomente el análisis crítico y reflexivo de los y las estudiantes.

La propuesta didáctica fue validada través de una encuesta tipo Likert de 4 niveles, por un grupo de seis expertos y expertas, compuesto por profesionales del área de la educación en la disciplina de matemática, con experiencia enseñando isometrías bajo el currículum nacional, y un profesor de historia con experiencia realizando clases en Wallmapu (Región de la Araucanía), motivando y enriqueciendo el desarrollo de la propuesta, perfeccionando la estructura de las guías, y mejorando los recursos diseñados.

Palabras clave: Enseñanza de la geometría, Etnomatemática, Iconografía textil Mapuche, Isometrías, Habilidades para el siglo XXI.

ABSTRACT

The historical axiomatic, demonstrative and decontextualized way of teaching and learning mathematics has been questioned by the western educational community, making curricular changes together with the design of didactic orientations and methodological proposal on the part of the national educational entities in which a monocultural curriculum has been predominated, isolating the knowledge of everyday practices and experiences, there is a need for pedagogical strategies that tackle in a contextualized way the diverse topics and objects of study.

The disciplinary characteristics of geometry allow to situate their teaching and learning in a contextual way; society is constantly related to different geometric elements that can be incorporated in the teaching-learning process.

The iconographic elements present in the Mapuche textile industry, are an enriching example of different isometries that can be objects of study in schools, at the same time that contributes to developing abilities for the future, valuing and respecting the diversity.

In the present Seminar of Degree, a didactic proposal is presented composed by five activities guided by an ethnomathematical approach, where the geometric elements presented in the diverse Mapuche textile iconography are identified, reflecting on the meaning and importance that they have for their town, to look at is a proposal that can be adapted interdisciplinary and that encourage the critical and reflexive analysis of the students.

The didactic proposal was validated through a Likert survey of 4 levels, by a group of six experts, composed by professionals of the educational field in the mathematics discipline, with experience teaching isometries under the national curriculum, and a History teacher with experience doing lessons in Wallmapu (Araucanía Region), motivating and enriching the development of the proposal, perfecting the structure of the guides, and improving the designed resources.

Keywords: Geometry teaching, Ethnomathematics, Mapuche textile iconography, Isometries, Abilities for the XXI century.

Agradecimientos

Todo este proceso significó un enorme, gigantesco desafío. Desde empaparse de conceptos que eran desconocidos, hasta las etapas finales de revisión, cuidando que la propuesta fuera también coherente a nuestras convicciones.

Agradezco a las profesoras guías, Claudia Matus y Soledad Saavedra, por la oportunidad de interiorizarnos en una temática novedosa que enriquece nuestra formación pedagógica.

A mi familia: mamá, papá, abuelita y hermana, por el apoyo que siempre me han brindado, y por aguantar las noches de desvelo junto a mis compañeros.

A Benjamín y Sebastián, amigos con los que aprendí y compartí extensas horas de diálogos, risas y un constante trabajo de autocrítica y reflexión.

A todos y todas que intentan, desde su posición, construir una educación liberadora; reaccionando al adoctrinamiento, fomentando la concientización.

Araceli Carolina Alvarado Valderrama

Agradecimientos

"¿Quién se irá conmigo? ¿Quién acepta morir al mirarme? No existir ni muerto.

Ser el humo azul que el viento del sur cantó"

Canción del Último Hombre. Congreso.

Agradezco a las profesoras guías M. Soledad y Claudia por la oportunidad de trabajar en este seminario y por la guía que proporcionaron en este camino un tanto desconocido, me atrevería a decir que para todos quienes trabajamos en la propuesta.

A mis compañeros por las jornadas de intenso debate, trabajo y recreación, entendiendo esto último como la posibilidad de volverse a crear en uno y con el otro. No solamente son compañeros sino grandes amigos.

A mi familia por estar conmigo y para mí cuando ha sido preciso. Agradezco a mi abuelo Lorenzo Pichún Pichún por mostrarme mis raíces. Agradezco a la familia Pichún por hacerme amar mi mapuchidad.

A mis compañeros del Ballet Folclórico por darme la oportunidad de sentir aquello que llaman felicidad, y agradezco especialmente a mi querido maestro, compañero, director, amigo y profesor Genaro Arias Albornoz por su intento abnegado, involuntario e inconsciente de humanizar a sus estudiantes. "No es lo mismo dar las gracias, que vivir agradecido".

Ha sido un proceso largo e intenso, de altos y bajos, de muchos momentos malos y buenos, pero jamás de indiferencia ni de displicencia. Es un amoroso intento por aportar desde nuestra propuesta a quien quiera disponer de este trabajo.

Benjamín Ignacio Pichún Ruz

Agradecimientos

Luego de un arduo proceso de trabajo, comprendiendo nuevos significados, conceptos e ideas, puedo quedar en satisfacción con el resultado de tal hermosa experiencia.

Agradezco a Dios por permitirme vivir esta experiencia en constante maduración personal e intelectual, y quién puso en mi camino a las personas necesarias.

A las profesoras Claudia Matus y Soledad Saavedra, quienes guiaron este seminario durante toda su realización, indicando cuales eran los aspectos a tratar de manera consecuente y necesaria, además de apoyar emocionalmente en cada uno de los pasos dados.

A mi padre, madre, y hermano, quienes fueron un pilar en todo lo vivido y experimentado en el proceso, dando vital ánimo y refugio en momentos de difíciles, como también, quienes celebraron los triunfos.

A Benjamín y Araceli, con los cuales aprendí, viví y experimenté en primera persona cada uno de los desafíos que fueron apareciendo.

Y a cada una de las personas que de una u otra manera incentivaron al trabajo continuo, con su preocupación y apoyo en las diferentes etapas que se fueron dando.

“Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente”

Sebastián Emanuel Tillerías Vidal

Tabla de contenidos

Introducción.....	1
Capítulo 1: Marco de Antecedentes.....	3
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Antecedentes del problema	4
1.3. Objetivos del Seminario	10
1.3.1. Objetivo general.....	10
1.3.2. Objetivos específicos.....	10
Capítulo 2: Marco Teórico.....	11
2.1. Geometría	11
2.1.1. Isometrías	12
2.2. Perspectiva etnomatemática.....	18
2.2.1. Desarrollo de la etnomatemática y estado del arte	18
2.2.2. La etnomatemática: relativismo matemático sociocultural	19
2.2.3. Visión pedagógica de la etnomatemática	24
2.3. Iconografía textil mapuche: cosmovisión y significado	26
2.3.1. Cosmovisión mapuche	27
2.3.2. Iconografía mapuche y su relación con la geometría	30
2.3.3. Textilería mapuche	34
2.4. Miradas del pueblo mapuche.....	35
2.4.1. Distancia entre el conocimiento mapuche y conocimiento escolar occidental.....	38
2.5. Matemática y geometría en el currículum chileno	41
2.5.1. Enseñando matemáticas para el futuro.....	42
2.5.2. Modelo interactivo de enseñanza - aprendizaje	43
2.5.3. Habilidades para el siglo XXI.....	50
Capítulo 3: Marco Metodológico	54
3.1. Descripción general de la propuesta didáctica	54
3.2. Detalle de la propuesta didáctica.....	56
3.2.1. Clase 1: Epew (cuentos o relatos).....	58
3.2.2. Clase 2: Construyendo Kimün (construyendo conocimiento)	59

3.2.3. Clase 3: Compartiendo kimün (compartiendo conocimiento).....	60
3.2.4. Clase 4: Iñche (yo soy)	61
3.2.5. Clase 5: <i>Nütram</i> (espacio de conversación).....	62
3.3. Evaluaciones.....	63
3.3.1. Evaluación clase a clase	63
3.3.2. Evaluación final.....	63
3.4. Validación de la propuesta didáctica	64
3.4.1. Equipo de expertos y expertas	65
Capítulo 4: Resultados.....	67
4.1. Relación de la propuesta con el enfoque etnomatemático.....	67
4.2. Relación de las actividades con las habilidades y logros esperados	68
4.3. Relación del material diseñado con la redacción y la factibilidad de implementación	69
4.4. Mejoramiento de la propuesta	70
Conclusiones.....	72
5.1. Proyecciones del seminario	75
5.2. Aprendizajes de los autores.....	76
Referencias bibliográficas	78
Apéndices.....	83
Apéndice 1: Indicaciones al docente.	83
Apéndice 2: Guías Propuesta Didáctica	102
Apéndice 2.1, “Epew”, Clase 1.	102
Apéndice 2.2, “Guía: Construyendo Kimün”, Clase 2.....	108
Apéndice 2.3, “Guía: Compartiendo Kimün”, Clase 3.	118
Apéndice 3: Rúbricas de evaluación.....	126
Apéndice 3.1, “Rúbrica Clase a Clase”	126
Apéndice 3.2, “Rúbrica Sumativa Final”, Clase 5.....	127
Apéndice 4: Planificaciones.	129
Planificación clase 1: “Epew”	129
Planificación clase 2: “Construyendo Kimün”	129

Planificación clase 3: “Compartiendo Kimün”	130
Planificación clase 4: “Iñche”	130
Planificación clase 5: “Nütram”	131
Apéndice 5: Manipulativos	132
Apéndice 5.1 “Video Rotación” Clase1	132
Apéndice 5.2 “Video traslación” Clase1.....	132
Apéndice 5.3 “Video Reflexión” Clase1	133
Apéndice 5.4 “Manual Fabricación de Manipulativos” Clase1.....	134
Apéndice 6: Resultados encuesta de validación.	140

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1: Cantidad de objetivos de aprendizaje de geometría	9
Tabla 1.2: Objetivo de aprendizaje relacionado a isometría	9
Tabla 2.1: Numeración de uno al cero en castellano y mapuzungun	24
Tabla 2.2: Numeración del once al veinte en castellano y mapuzungun	24
Tabla 2.3: Significado de iconografía textil Mapuche	34
Tabla 2.4: Enotaxonomía de lo tejido	36
Tabla 2.5: Descriptores en común del concepto de didáctica	44
Tabla 2.6: Cambios de énfasis del conocimiento matemático	47
Tabla 2.7: Cambios de énfasis del estudiante y su rol.....	48
Tabla 2.8: Cambios del rol del adulto que guía el proceso	48
Tabla 2.9: Respecto a la situación de enseñanza, sus objetivos y el contexto	49
Tabla 2.10: Cambios en las consideraciones para la evaluación de los aprendizajes	50
Tabla 2.11: Competencias y habilidades para el siglo XXI	52
Tabla 3.1: Indicadores de evaluación de OA14	54
Tabla 4.1: Resultados respecto a la relación entre la propuesta y enfoque etnomatemático .	66
Tabla 4.2: Resultados respecto a la relación entre las actividades, las habilidades y logros esperados	67
Tabla 4.3: Resultados respecto al material con la redacción y la factibilidad de implementación	68
Tabla 4.4: Modificaciones tras la validación de la propuesta	70

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1.1: Cobertura curricular ejes de algebra, geometría y datos de azar	7
Figura 2.1: Traslación	13
Figura 2.2: Rotación	13
Figura 2.3: Reflexión	14
Figura 2.4: Transformaciones isométricas en telar	15
Figura 2.5: Traslación de patrón de ícono Mapuche.....	16
Figura 2.6: Traslación de patrón de ícono Mapuche 2	16
Figura 2.7: Rotación de patrones de íconos Mapuche	17
Figura 2.8 Reflexión de iconos Mapuches	17
Figura 2.9: Diversas formas de símbolos empleados para la cifra cero por los Mayas	23
Figura 2.10: Representación de los números de la serpiente	23
Figura 2.11: Ciclos de vida. Esquemas sobre las visiones del tiempo y el espacio para el pueblo Mapuche	28
Figura 2.12: Diagrama de organización social Mapuche	29

INTRODUCCIÓN

En el presente seminario se muestran los elementos de una propuesta didáctica diseñada bajo un enfoque de etnomatemática que permita a los y las estudiantes desarrollar habilidades comunicativas, afectivas, reflexivas y críticas (habilidades para el SXXI) a través del reconocimiento de objetos geométricos en diversos íconos presentes en la textilería mapuche, articulando la enseñanza a la temática de Isometrías, estudiada en octavo año de enseñanza básica.

En el Capítulo 1, se exponen las problemáticas significativas de la enseñanza de la geometría, planteando la importancia de la incorporación de la dimensión histórica y sociocultural en los procesos de enseñanza – aprendizaje y justificando la elección del recurso a utilizar: la iconografía textil mapuche, pues cuenta con una riqueza geométrica y de significado que permite un dialogo intercultural entre el saber mapuche y el conocimiento matemático, permitiendo reconocer las isometrías presentes en ellos, enunciando finalmente los objetivos de aprendizaje a abordar, el objetivo general y los objetivos específicos del seminario.

En el Capítulo 2, se exponen los principales aspectos teóricos que sustentan las características y el diseño de los materiales y las actividades diseñadas para la propuesta didáctica.

En primer lugar, se alude a la definición etimológica de la geometría y se ejemplifica con diferentes aplicaciones en distintas culturas, evidenciando el conocimiento matemático existente a modo de introducción para presentar el contenido a abordar en la propuesta: Isometrías. En particular, se menciona de manera somera la importancia y carga simbólica de los íconos pues se abordan en detalle en un apartado siguiente, correspondiente a Cosmovisión Mapuche. Tras ello, se señalan breves definiciones de las aplicaciones matemáticas que se estudian en octavo básico (traslación, reflexión y rotación), ejemplificando con manifestaciones en algunos íconos textiles de la cultura mapuche.

Luego, se aborda el relativismo cultural desde el punto de vista matemático, ampliando la noción de que el conocimiento es una construcción social, y que cada civilización, cultura, pueblo o comunidad construye el conocimiento en base a sus necesidades; se incorpora el concepto de etnomatemática (así como su estado del arte) y el hecho de poder utilizarlo como una herramienta pedagógica, siendo este el apartado que sustenta y en el cual se basa la propuesta diseñada: el enfoque etnomatemático.

Encausando el marco teórico hacia la cultura en la cual se basará esta propuesta: pueblo Mapuche, pues representa la base identitaria del país según el último censo 2017, el 9,9% de la población total censada se considera perteneciente al Pueblo Mapuche (Instituto Nacional de Estadísticas [INE], 2018). Se realiza una breve descripción de su cosmovisión, forma de vida y su iconografía; además, se realiza un contraste respecto al saber mapuche y la escuela chilena,

con el objetivo de tener orientaciones para poder entrelazar ambas visiones en una propuesta didáctica, ya que se considera que la incorporación de los elementos del conocimiento mapuche descritos en el apartado, enriquecen el enfoque etnomatemático de la propuesta como también contribuyen a desarrollar habilidades para el siglo XXI.

Finalmente, se relacionan los recursos a utilizar (los elementos geométricos que permiten el estudio de las isometrías así como los íconos de la textilería mapuche) con la didáctica de la matemática; se describe el plan de estudio impulsado por el Ministerio de Educación y su casi nula relación con las habilidades para el siglo XXI, las cuales pueden sustentarse apoyadas de un modelo interactivo que permita la participación activa de los y las estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje, considerando que la propuesta diseñada cumple con aquellas características.

En el Capítulo 3 se presentan los aspectos metodológicos de la propuesta didáctica diseñada. En una primera parte, se muestra la descripción general de la propuesta, señalando las principales características de las actividades diseñadas, para luego detallar cada una. Se describe también el material diseñado, y las interacciones entre docentes y estudiantes. En este capítulo además se explica el proceso de validación de la propuesta didáctica, describiendo de manera general la encuesta diseñada y el perfil de los expertos y expertas que conforman el grupo.

En el Capítulo 4, se expone un resumen de los resultados de la encuesta del proceso de validación, contestada por el grupo de expertos y expertas, enunciando aspectos generales de sus comentarios, apreciaciones y detallando los cambios realizados al material elaborado.

Finalmente, en el Capítulo 5 se desarrollan las conclusiones a partir del análisis entre el objetivo general y los objetivos específicos, con los resultados del proceso de validación, evidenciando las fortalezas, limitaciones y proyecciones de la propuesta, incluyendo los aprendizajes de este enriquecedor proceso de construcción de una propuesta innovadora, y que actualmente no es abordada en los procesos de formación inicial docente.

CAPITULO 1: MARCO DE ANTECEDENTES

El presente capítulo revela las problemáticas que inspiraron la necesidad de diseñar una propuesta didáctica con las características que pretende este seminario, es decir, incorporando el enfoque etnomatemático a través de contextualizar la enseñanza de la geometría poniendo en diálogo la significancia de la iconografía textil mapuche, como su riqueza geométrica, con los elementos de estudio y las interacciones en aula que permiten el desarrollo de habilidades para el siglo XXI.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Geometría es uno de los ejes transversales que presenta mayores dificultades en su estudio, tanto para ser enseñada como para ser aprendida (Barbé y Cheuquepán, 2012). Las dificultades y sus respectivas justificaciones al parecer son variadas, tales como al poco tiempo que se le dedica a la unidad (siendo postergada tras priorizar otros ejes temáticos) y a lo estructurado de la enseñanza del contenido, siendo más bien de manera tradicional, con clases magistrales expositivas que carecen de materiales concretos, planteando un método de desarrollo de ejercicios que pueda ser replicado por los y las estudiantes (Fabres, 2016), expresado además en una abstracción y parcelación de los temas a estudiar, arrastrada muchas veces desde la formación inicial docente, pues tienden a reproducir la manera en que se les fue enseñada (Aravena y Caamaño, 2013). Así, ocurre que históricamente la manera de enseñar y aprender matemática -incluyendo así, la geometría- tiende a hacer que los y las estudiantes formen una profunda confianza en el conocimiento matemático, adquiriendo una postura acrítica (Oteiza y Miranda, 2002). Si bien la actualización del currículum considera que el conocimiento es una construcción social, y que debe ser comprendido según contextos relevantes para los y las estudiantes, no existe para Geometría, en las nuevas bases curriculares 2016, un enfoque interdisciplinario que promueva el conocimiento como recurso para la comprensión de la realidad nacional, perpetuando en parte, la poca contribución de esta asignatura para el desarrollo de habilidades propias para el SXXI¹, ni se releva el contexto histórico o cultural de los temas y contenidos, pues se enfoca en que los y las estudiantes logren relacionar algunos contenidos con problemas cotidianos, recurriendo, en los objetivos de aprendizaje, a utilizar verbos como mostrar, construir, desarrollar, aplicar la fórmula, identificar, etc.; acciones que se realizan sobre lo teórico y formal de la geometría (Aravena y Caamaño, 2013).

Desde esta perspectiva, se plantea como problema de este seminario de grado, la descontextualización de la enseñanza del eje temático de Geometría en Chile, considerando diversos estudios (D'Amore, 1993; Godino, 2004; Ramos & Font, 2006; Blanco, 1993; Mendible y Ortiz, 2007, en Díaz y Bazán, 2011), que avalan que enseñar matemática de manera

¹ A tratar en Marco Teórico.

contextualizada es fundamental para motivar a los y las estudiantes hacia su estudio y conseguir así desarrollar diversas competencias matemáticas. Nos planteamos el desafío de diseñar y validar una secuencia didáctica que contextualice la enseñanza de la geometría desde un enfoque etnomatemático, enfoque socio-cultural, que supera la perspectiva monocultural de la didáctica, abriéndola a un diálogo intercultural. Esta perspectiva se sustenta en el principio de justicia epistemológica al valorar el desarrollo del conocimiento de diversas culturas, y la noción de que el conocimiento es una construcción social y cultural. En estos términos, el saber matemático es inseparable del contexto sociocultural que le da sentido (Blanco-Álvarez, 2008).

Una de las razones de incorporar la dimensión histórica y sociocultural, a través de una perspectiva etnomatemática de diversos grupos sociales al estudio de la geometría, es que, a través de ella, tanto profesores como estudiantes pueden percibir cómo los conceptos pueden haberse originado, desarrollado y el cómo fueron incorporados a las actividades culturales de un determinado grupo, contribuyendo a la comprensión de aquellos conceptos (Gaspar, 2003). Así mismo, el conocimiento de la historia del desarrollo de los conceptos matemáticos debe ser parte de la formación de los y las docentes, afirma Maria Terezinha Gaspar (2003), para que posean elementos que les permitan presentar a los y las estudiantes la matemática (y la geometría) como una ciencia dinámica, siempre abierta a la incorporación de nuevos conocimientos, como para conocer los obstáculos que envuelven el proceso de construcción de conceptos.

Dar acceso a los profesores, profesoras y estudiantes a los modos en que diversas sociedades abordaron conceptos o ideas geométricas en su vida práctica e intelectual, permite explorar la geometría como un medio estético y constructivo, donde dominan las transformaciones y relaciones geométricas (Gaspar, 2003).

El contenido curricular a considerar será Isometría en el nivel de 8º básico, abordando el OA14 que consiste en “Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte” (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2016). Desde la etnomatemática se considerará la iconografía textil mapuche, como expresión cultural de la identidad de uno de los pueblos más grandes que conforman y habitan el país.

1.2. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

En las escuelas del siglo XX, la geometría era estudiada bajo una perspectiva Euclidiana, es decir, una matemática axiomática y demostrativa. Esta manera de estudiar matemática resultaba incompatible con la perspectiva emergente de la Matemática moderna, surgida en la década del 60 a raíz de nuevas reformas en los planes de estudio de países occidentales, por lo

que la geometría dejó de ser considerada en los nuevos programas, adquiriendo protagonismo otras áreas de la matemática como la Teoría de Conjuntos (Lastra, 2005).

Si bien la matemática moderna creó expectativas y entusiasmo entre educadores, no tardó en evidenciar sus falencias, pues a mediados de los 70 se detecta que los y las estudiantes no contaban con capacidades intelectuales como la visualización, las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008; Aravena, Caamaño, González, Cabezas y Córdova, 2011), comenzando una serie de críticas por los expertos y la decisión de reincorporar la enseñanza de la geometría a los programas de estudio (Lastra, 2005).

Al igual que el resto de Latinoamérica, Chile presentó las mismas falencias expuestas anteriormente y sólo a partir de los años noventa, con la implementación de la reforma educativa en el país, se comienza a dar atención real al problema, pues se fortalece la enseñanza de la geometría en la formación inicial y se incorpora en la formación continua del profesorado (Lastra, 2005). Una experiencia destacable en este ámbito, en Chile, es el curso E-Learning de “Geometria.cl: Aprender Geometría Creando Soluciones”, desarrollado por el Centro Comenius de la Universidad de Santiago de Chile, actual Centro de Investigación en Innovación y Educación en TIC (CIIET) en el año 2002, el cual consiste en un curso a distancia destinado a docentes de matemática que contaba con los contenidos de geometría según la reforma curricular vigente y diversos recursos digitales, siendo una plataforma virtual donde los y las docentes construyen su aprendizaje a través de interacciones con los recursos, el tutor y los y las colegas². Actualmente, el curso se encuentra disponible para docentes de enseñanza básica, media, y de enseñanza media técnico profesional.

Sin embargo, a pesar de las propuestas metodológicas y orientaciones didácticas para diferentes temas, así como el diseño de textos para orientar el trabajo de aula, acciones de perfeccionamiento para docentes y desarrollo de programas remediales para mejorar sus destrezas, Chile obtiene bajos resultados en pruebas estandarizadas, indicando así el no logro de habilidades mínimas relacionadas a diversas áreas, incluyendo matemáticas, y entre ellas, geometría. El Reporte de la Agencia de la Calidad de Educación, del año 2015, indica que a pesar de que el puntaje promedio se ha incrementado en la prueba nacional SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) durante la última década, aún más de la mitad de los y las estudiantes en Chile no consigue el nivel esperado de desempeño en torno a los

² Según la propia organización, el curso fue implementado el 2004 y 2005 para más de 1400 docentes de enseñanza básica, donde los resultados evidencian un alto grado de retención 83%, nivel de aprobación 95%, y un 25% de ganancia entre el pre y post test, según los desarrolladores del mismo proyecto (CIIET, 2014).

Estándares de Aprendizaje³ (Reporte de la Agencia de calidad de Educación, 2015). Respecto a resultados en pruebas internacionales, como TIMSS (del inglés Trends in International Mathematics and Science Study) y PISA (Programme for International Student Assessment), el panorama es similar. La última prueba TIMSS fue aplicada el año 2015, para 4to y 8vo año básico, obteniendo ambos niveles un promedio de categoría “Bajo⁴” (la menor de las categorías), y encontrándose aún por debajo de los países con PIB similar, según indica el Reporte de la Agencia de Calidad de la Educación, mientras que, en PISA, el 50% de los y las estudiantes en Chile no consigue siquiera alcanzar el Nivel 2⁵ (logro mínimo esperado), considerado como el nivel básico de conocimiento que se requiere para participar plenamente en una sociedad moderna. Estudiantes que puntúan en el Nivel 1 pueden responder preguntas con instrucciones claras y relaciones sencillas que requieran utilizar una sola fuente de información, pero no pueden enfrentarse a la resolución de problemas que requieran razonamientos complejos (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2016).

Tal como se indica en el planteamiento del problema, una de las posibles justificaciones a la dificultad de enseñanza del eje de geometría es la baja cobertura destinado a la unidad (Aravena y Caamaño, 2013) siendo postergada e incluso a veces no abordada tras priorizar otros ejes temáticos, tal como se hizo en la reforma de los 60. La baja cobertura destinado a ella en Chile queda evidenciado en el siguiente gráfico (Figura 1).

³ Por nombrar, en los resultados de la prueba nacional SIMCE de matemática, 4° año básico incrementa 14 puntos al comparar el período 2002-2016; un incremento de 2 puntos para 8vo básico en los períodos 2000-2016, y de 19 puntos para II° Medio en el período 2001-2016, siendo el promedio actualmente 262, 252 y 266 puntos el promedio respectivamente para cada curso.

⁴ Nivel de logro Bajo, TIMSS: Tienen sólo algunos conocimientos matemáticos básicos. Pueden hacer cálculos básicos con números naturales sin usar calculadora y aproximar números de dos decimales al entero más próximo. Reconocen algunos términos básicos y comprenden la información que entrega un gráfico de líneas. (Portal EducarChile).

⁵ Nivel 2, PISA (de 421 a 482 puntos): En el segundo nivel los alumnos pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. Pueden extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un solo tipo de representación. Pueden emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos. Son capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados. (OECD, 2016).

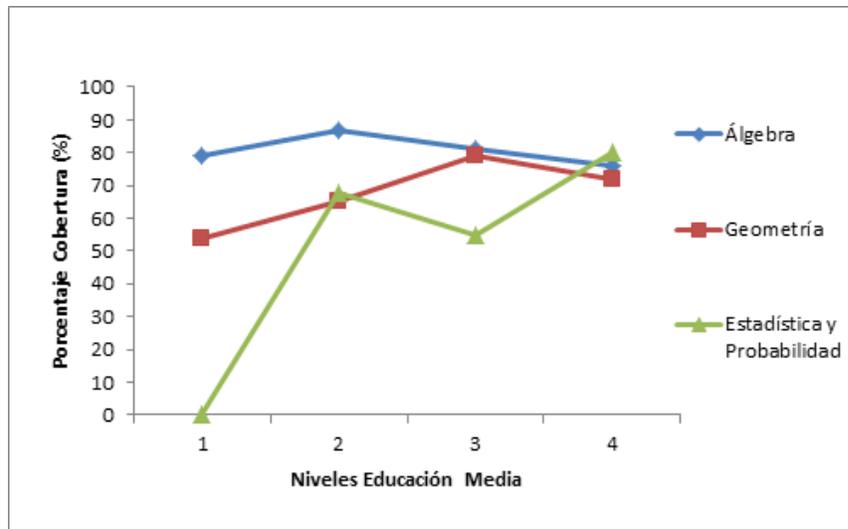


Figura 1.1: Cobertura Curricular ejes de Álgebra, Geometría y Datos y Azar.
Fuente: Centro de Estudios MINEDUC (2013).

La figura 1, representa la cobertura curricular de los 4 ejes temáticos alcanzada durante el año escolar para los diferentes niveles de enseñanza media, apreciando que la mayor cobertura es obtenida en álgebra, es decir, se prioriza la enseñanza del álgebra por sobre la geometría y el eje de datos y azar.

Por otro lado, también resulta una dificultad en la enseñanza de la geometría, la estructuralidad en que se aborda el contenido, que además de estudiarse de manera abstracta, se aborda con contenidos parcelados unos de otros, pues así también es estudiada por los y las docentes en los cursos universitarios de pedagogía (Aravena y Caamaño, 2013). También Roxana Fabres (2016) afirma que las clases de geometría son abordadas de manera tradicional, es decir, clases magistrales expositivas donde se carece de materiales concretos y desarrollo de ejercicios para posterior replicación por los y las estudiantes.

Ahora bien, según las bases curriculares de matemática en el eje temático de geometría, se espera que los y las estudiantes desarrollen habilidades espaciales, para entender espacios y formas, a través de las mediciones y estimaciones, sin embargo, no se realiza mención al contexto histórico o cultural de los temas y contenidos; solamente que en algunos, los estudiantes logren relacionar los contenidos con problemas cotidianos, sin detallar el proceso de pasar de lo teórico a las experiencias diarias.

En la introducción de las bases curriculares para la asignatura de matemática, se dice que comprender las matemáticas y ser capaz de aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos y las ciudadanas en el mundo moderno, sin embargo, se señala en las bases curriculares, por ejemplo, que para

resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de los conceptos, desarrollo de razonamiento y aplicación de herramientas matemáticas.

La formación y alfabetización matemática de todas las ciudadanas y todos los ciudadanos se considera un elemento esencial de tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (MINEDUC, 2015). A pesar de esto, los resultados mencionados anteriormente indican el no logro de habilidades básicas en matemáticas para vivir en sociedad, y que junto a los verbos utilizados en los objetivos de aprendizaje de los programas de estudio (mostrar, identificar, aplicar fórmula, etc.), se evidencia lo limitante, estructurado y descontextualizado de la enseñanza de la geometría en el currículo chileno, manteniendo estrategias de enseñanza del siglo anterior, siendo el actual desafío de las escuelas, y de la comunidad educativa, el desarrollar habilidades cognitivas, sociales y emocionales para el futuro (Fundación Chile, 2016).

Enfatizando en la escuela chilena, se considera para esta propuesta como una tensión, el debate de las políticas educativas del país entre la aplicación de un enfoque educativo monocultural, multicultural o intercultural; siendo la más tradicional la de enfoque monocultural, según afirma Hevia R, consultor de La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, [UNESCO]), 2005.

La escuela monocultural refleja la cultura urbana, tiene como propósito la continuación del modelo civilizador de Occidente y combate las formas de transmisión y la cosmovisión indígena. El modelo de escuela que la orienta es el de la republicana francesa, formadora de ciudadanos y vinculada con el progreso en términos materiales. (Hevia et al., 2005. p. 598)

Así, en Chile predomina un currículo monocultural, separado de las prácticas pedagógicas activas, con baja calidad de diseño, sin un contexto, monolingüe, que trata la cultura de niños, niñas y jóvenes y su contexto, como objetos de conocimiento y no como vivencias, desvinculado de los hechos sociales que viven los y las estudiantes en sus comunidades y vida diaria, sin capacidad de respuesta formativa frente a hechos sociales emergentes de oportunidades pedagógicas, con bajos niveles de integración horizontal y vertical entre los subsectores (Williamson, 2003 en Hevia et al., 2005), por lo tanto, surge la necesidad de una educación intercultural más pertinente y de mejor calidad, que permita superar problemas epistemológicos con respecto a la construcción del conocimiento. También, se requiere una mayor preparación y documentación sobre las implicancias de un currículum mono cultural sobre la formación de las niñas y niños que presenten lógicas diferente de saberes y conocimientos educativos (Quintriqueo, 2012).

Es por ello, que esta propuesta busca aportar a la contextualización de la enseñanza de la geometría considerando la incorporación de símbolos iconográficos, expresión de la cultura de nuestros pueblos originarios; específicamente abordaremos esta dimensión desde el pueblo que genera la base identitaria del país: el Pueblo Mapuche. Según el último censo de población, 2017, de las 2.185.792 personas que declararon su pertenencia a algún pueblo originario, el 79,8% pertenece al pueblo mapuche, lo que significan 1.745.147 personas (INE, 2018). Como etnia viva, genera los cimientos sobre los cuales se construye la identidad chilena: hablar del mundo mapuche es pronunciar un mundo conocido para todo chileno y chilena; se reconocen sus imágenes, sus sonidos, sus colores, su fenotipo. Esta familiaridad, sin embargo, dista de un acercamiento cultural que reconozca y valore su cosmovisión. Desde esta perspectiva este seminario busca aproximarse desde el enfoque etnomatemático a diálogo intercultural que ponga en relación la iconografía textil mapuche con la enseñanza de la geometría y a través de ello, generar un conocimiento más acabado de los significados que conforman la cosmovisión y cultura del pueblo originario. Se intenta avanzar en una pedagogía que aborde la cultura como un sustrato de contextualización, que quiebre el monoculturalismo y por ende, el etnocentrismo arraigado en las propuestas educativas del país.

Respondiendo a tales fines, se considerará una expresión trascendental de la cultura mapuche como lo es su iconografía, pues además de ser un lenguaje que resguarda y mantiene el acervo cultural, contiene una riqueza geométrica en formas y significados, posible de incorporar a la enseñanza- aprendizaje de la geometría, específicamente en el contenido de Isometrías.

Isometrías es abordado en la enseñanza media desde 8vo a 4to año medio (a excepción de segundo año medio), considerando los siguientes Objetivos de Aprendizaje según el programa de estudio vigente:

Eje Temático	Nivel	Objetivo de Aprendizaje
Geometría	7°	5
	8°	4
	1°	6
	2°	3
	3°	4
	4°	4

Tabla 1.1: Cantidad de objetivos de aprendizaje de Geometría.
Adaptado de Ministerio de Educación, 2009, *Programa de estudio*,

Nivel	Objetivos de aprendizaje relacionados con Isometría
7°	No se aborda Isometría
8°	13.- Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: <ul style="list-style-type: none"> • Los vectores para la traslación. • Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión. • Los puntos del plano para las rotaciones.

	14.- Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte.
1°	No se aborda Isometría
2°	No se aborda Isometría
3°	No se aborda Isometría
4°	6.- Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio. 7.- Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.

Tabla 1.2: Objetivos de aprendizaje relacionados a isometrías
Adaptado de Ministerio de Educación, 2009, *Programa de estudio*,

Así, el objetivo de aprendizaje en el que se basa esta propuesta es el OA 14 de 8vo año básico, pues se relaciona con los elementos geométricos observados en la iconografía mapuche, tal y como se detalla en el marco teórico.

1.3. OBJETIVOS DEL SEMINARIO

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

- Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de isometrías en el eje temático de geometría para 8vo año básico a través de la iconografía textil mapuche bajo el enfoque de la etnomatemática.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Proponer actividades basadas en modelos interactivos didácticos que relacionen el paradigma del conocimiento mapuche con habilidades para el SXXI.
- Confeccionar material didáctico que enlace saberes de la cultura originaria mapuche con la geometría occidental actual.
- Elaborar instrumentos de evaluación que comuniquen al docente el cumplimiento de los objetivos esperados en la propuesta didáctica.
- Validar la propuesta didáctica y el material utilizado en ella, mediante la evaluación de expertos.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

En este capítulo se definen los conceptos necesarios para la interpretación de la propuesta, comenzando con la definición etimológica de la geometría y describir el hecho de que distintas civilizaciones atribuían diferentes significados y poseían diferentes objetos de estudio, a modo de introducción para presentar el contenido relevante de la propuesta: Isometrías. En este apartado se señalan breves definiciones de las aplicaciones matemáticas como traslación, reflexión y rotación, orientada específicamente a la manifestación de ellas en iconografía de la cultura mapuche, mostrando algunos ejemplos.

Luego, se aborda el relativismo cultural desde el punto de vista matemático, que permite comprender que cada civilización, cultura, pueblo o comunidad construye el conocimiento en base a sus necesidades; se incorpora el concepto de etnomatemática, siendo el enfoque que orienta la propuesta diseñada, y el hecho de poder utilizarlo como una herramienta pedagógica.

Encausando el marco teórico hacia la cultura en la cual se basará esta propuesta (pueblo Mapuche), se realiza una breve descripción de su cosmovisión, forma de vida y su iconografía; además, se realiza un contraste respecto al saber mapuche y la escuela chilena, con el objetivo de tener orientaciones para poder entrelazar ambas visiones en una propuesta didáctica.

Finalmente, se relacionan los recursos a utilizar (los elementos geométricos que permiten el estudio de las isometrías así como los íconos de la textilería mapuche) con la didáctica de la matemática; se describe el plan de estudio impulsado por el Ministerio de Educación y su casi nula relación con las habilidades para el siglo XXI, las cuales pueden sustentarse apoyadas de un modelo interactivo que permita la participación activa de los y las estudiantes en el proceso de enseñanza – aprendizaje, considerando que la propuesta diseñada cumple con aquellas características.

2.1. GEOMETRÍA

Al mirar de manera global el desarrollo de nuestra sociedad, podemos encontrar distintas aristas ancladas a cada cultura y su posterior evolución a lo largo del tiempo. Es aquí donde realizamos hincapié en el ámbito que nos corresponde llamado geometría. Este concepto, etimológicamente proviene del griego; geo que significa Tierra, y métrica que se traduce como medida, por lo que su significado es, *medida de la tierra*, siendo una de las ramas más antiguas de la matemática, en conjunto con la teoría de números.

Ahora bien, tomando en cuenta el hecho que el término geometría tiene un pasado adquirido de la Grecia antigua y como sociedad, hemos acuñado este concepto a nuestro vivir cotidiano, al encontrar el significado que los griegos realizaban sobre él, se puede decir que su estudio está íntimamente relacionado con la forma de concebir la realidad (Fabres, 2016). Según los griegos, la geometría puede ser percibida a través de los sentidos, pues está presente en nuestra

cotidianidad. Así mismo, se considera que contribuye en nuestro desarrollo formativo e intelectual como seres humanos, cultivando razonamientos y guiando el camino hacia la búsqueda de la verdad (Brosseau, 1991).

Desde una perspectiva etnológica, se pueden distinguir distintas realidades de la geometría en base al significado que cada cultura le asignaba a la realidad conceptual que ella encierra. Remontando al antiguo Egipto y Mesopotamia, tales culturas utilizaban el conocimiento geométrico para medir terrenos irregulares aplicando la triangulación, dividían cosechas, repartían campos, etc. (Villella, 2001).

En los telares, por ejemplo, donde diferentes pueblos prehispánicos han manifestado sus aspectos religiosos, sociales y políticos a través de diseños que trascienden hacia otras generaciones a través de símbolos iconográficos (que constituyen el lenguaje escrito de las culturas ágrafas, es decir, donde comunican su cultura y su identidad) existe un claro reconocimiento geométrico, evidenciando una matemática en la cultura de aquellos pueblos que han resistido a la imposición de la cultura europea (Micelli y Crespo, 2011),

Por otro lado, en gran variedad de las culturas prehispánicas, los diseños textiles presentan diversas simetrías que favorecen la misma construcción del tejido, observándose figuras con varios ejes de simetría, y donde los rombos, paralelogramos y los zig-zag son las figuras geométricas más frecuentes. Cada figura es asociada a las creencias de un pueblo, y plasmadas en las prendas de cada cultura (Micelli y Crespo, 2011).

2.1.1. ISOMETRÍAS

Las isometrías son una aplicación lineal sobre un objeto en un plano, que no modifica ni el tamaño ni su forma (*iso*, prefijo del origen griego que significa “igual”, y *-metría*, sufijo de origen griego que guarda relación con “medida”); una función biyectiva que preserva la distancia, siendo estas aplicaciones la Traslación, Reflexión y Rotación.

Una **Traslación** es una transformación que hace que el objeto, punto o cuerpo, se deslice en una dirección sin rotar (Stewart, 1996), como el hecho de abrir un cajón, una puerta corrediza, o subir por una escalera mecánica o un ascensor (Gaspar, 2003). Las nuevas coordenadas $P'(x,y)$ de un punto $P(a,b)$ trasladado según un vector $v=(m,n)$ son: $(x,y)=(a,b)+(m,n)$, luego $(x,y)=(a+m, b+n)$ (Diaz y Bazal, 2011)

La siguiente figura muestra una traslación del triángulo ABC, bajo el vector v , obteniendo como imagen el triángulo A'B'C'.

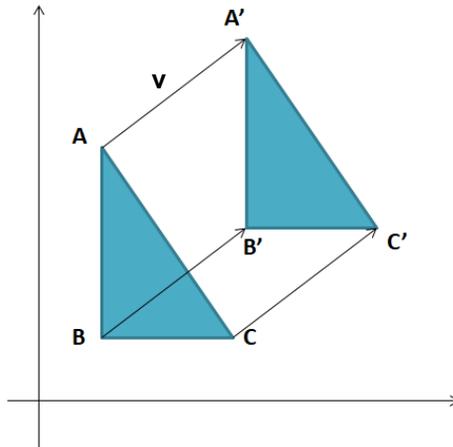


Figura 2.1: Traslación
Elaboración propia

Una rotación, por otro lado, se realizan en torno a un punto (centro de rotación), y con un ángulo θ , orientado por convención en sentido anti-horario, así como el hecho de abrir una puerta (donde el centro de rotación de la puerta estará en la esquina adosada a la pared, y el ángulo se verá determinado por la apertura de ella) o el levantar mancuernas (centro de rotación el codo, en un ángulo de 90°).

La siguiente imagen muestra la rotación de un triángulo ABC, bajo un ángulo alfa respecto al origen, obteniéndose como imagen el triángulo A'B'C':

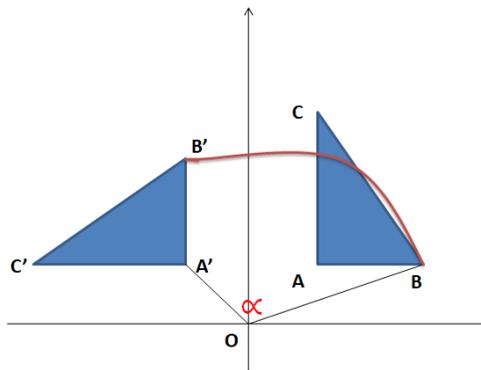


Figura 2.2: Rotación
Elaboración propia

Las nuevas coordenadas $P'(x,y)$ rotación de un punto $P(a,b)$ respecto al origen, para ángulos múltiplos de 90 son:

Punto / Ángulo	90°	180°	270°	360°
A (x , y)	(- y , x)	(- x , - y)	(y , - x)	(x , y)

Finalmente, la **reflexión** consiste en una transformación que ubica a un punto P en uno P' , de manera que equidisten de una recta llamada “eje de reflexión”.

La siguiente figura, muestra la reflexión del triángulo ABC , con respecto al eje de las coordenadas (eje y), obteniéndose como imagen el triángulo $A'B'C'$.

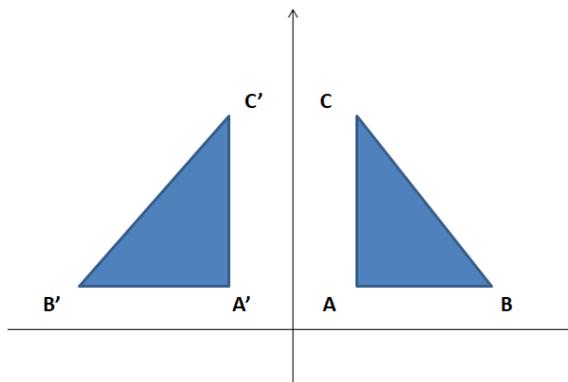


Figura 2.3: Reflexión
Elaboración propia

En la enseñanza media en Chile, las isometrías son objeto de estudio en el eje temático de Geometría, pues se estudia la aplicación gráfica en el plano cartesiano, y no la aplicación bajo una mirada del álgebra lineal⁶. Al ser objeto de estudio del eje de geometría, se perpetúa la tradicionalidad y la enseñanza axiomática y demostrativa, mientras que las investigaciones actuales señalan que presentarla de manera contextualizada es el principal fundamento para la adquisición de conocimiento, ya que despierta el interés y la motivación de estudiantes hacia su estudio, contribuyendo además en desarrollar competencias matemáticas (D'Amore, 1993; Blanco, 1993; Godino, 2004; Ramos y Font, 2006; Mendible & Ortiz, 2007, en Díaz y Bazán, 2011).

Siguiendo esa línea, todas las isometrías mencionadas están presentes en la textilería (Micelli y Crespo, 2011), por lo que es posible contextualizar con ellas el estudio de las isometrías, lo que implica incorporar entonces, un enfoque etnomatemático, que podría motivar el estudio de la geometría y también de las propias culturas. Basta observar algún diseño textil y es posible reconocer objetos simétricos, como por ejemplo en la siguiente figura, donde se muestra un diseño textil mapuche:

⁶ Las definiciones de las isometrías a estudiar (traslación, rotación y simetría axial) se han simplificado, respondiendo a los contenidos estudiados en la enseñanza media.

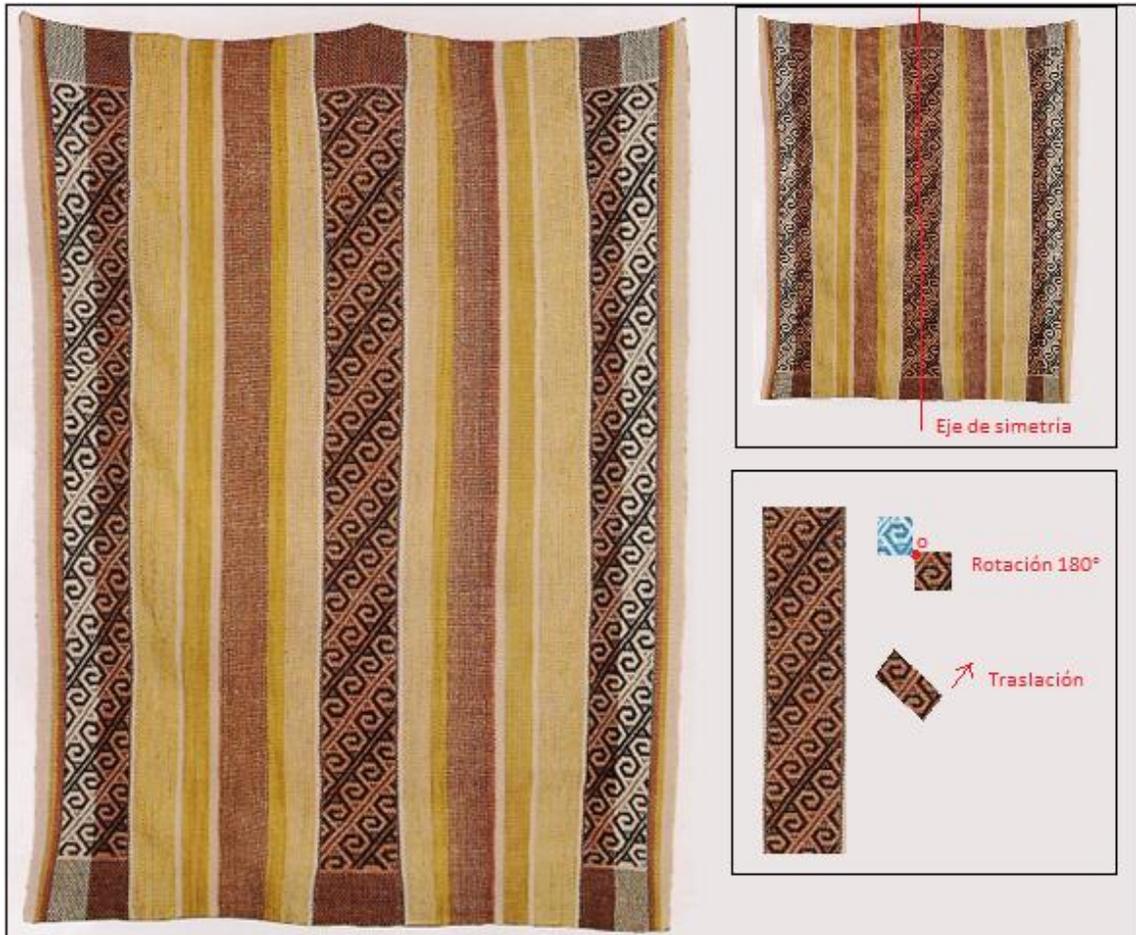


Figura 2.4: Transformaciones Isométricas en Telar
 Fuente: de Torres. (2005). *Telar mapuche: de pie sobre la tierra*.

En la figura 2.4, se aprecia que el diseño utilizado en el textil mapuche, puede ser generado ya sea a través de una reflexión, con un eje de simetría vertical al medio del tejido; como también con la repetición de un patrón, y que este patrón puede ser formado por rotaciones de 180° de una pequeña parte de él.

Otro diseño frecuente en la textilería mapuche, que se muestra a continuación, también puede ser obtenido a través de isometrías, como por ejemplo, con una traslación:

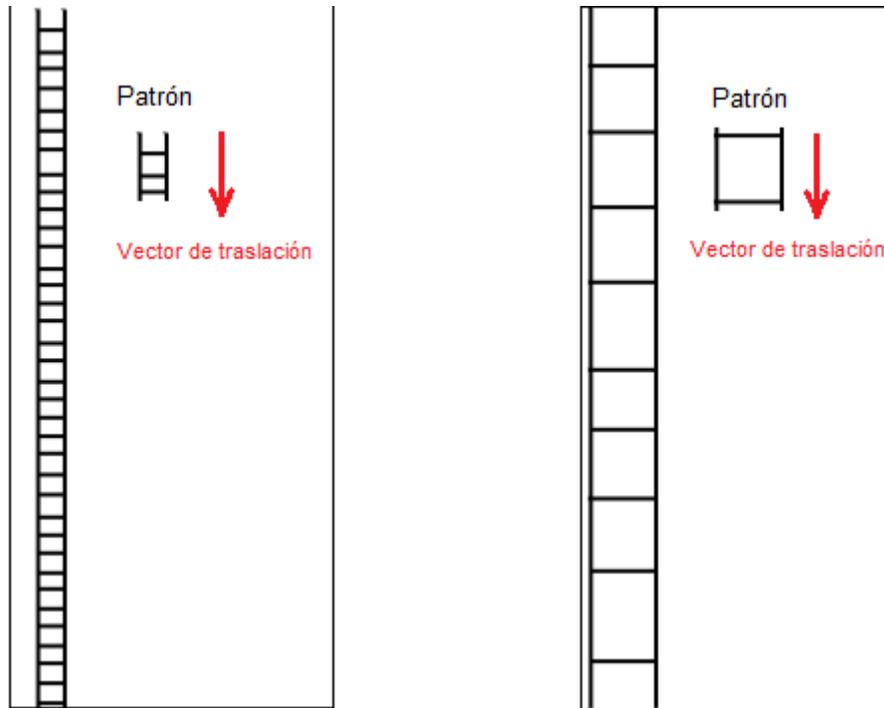


Figura 2.5: Traslación de patrón de ícono Mapuche
 Fuente: de Torres. (2005). *Telar mapuche: de pie sobre la tierra*

En la figura 2.5, se aprecia un patrón repetido hacia abajo. El objeto es el patrón, y el diseño es el conjunto de las imágenes obtenidas a través de aplicar el vector traslación orientado hacia abajo.

Se presenta a continuación otro ejemplo:

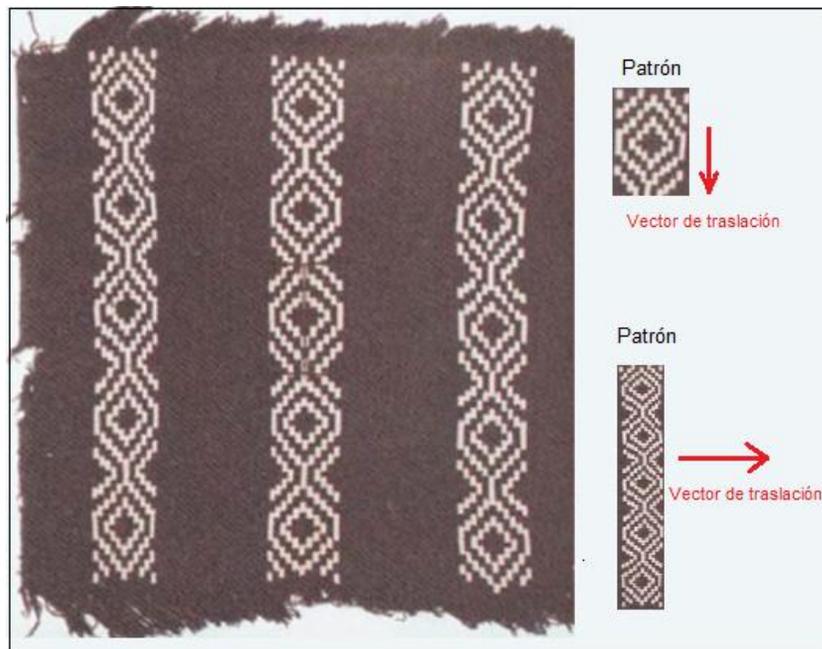


Figura 2.6: Traslación en patrón de ícono Mapuche 2
 Fuente: de Torres. (2005). *Telar mapuche: de pie sobre la tierra*.

En la figura 2.6, se aprecia un pequeño patrón trasladado hacia abajo, formando un diseño vertical que puede ser trasladado y replicado horizontalmente.

Ejemplos de diseños donde se evidencie una rotación, pueden ser los siguientes:

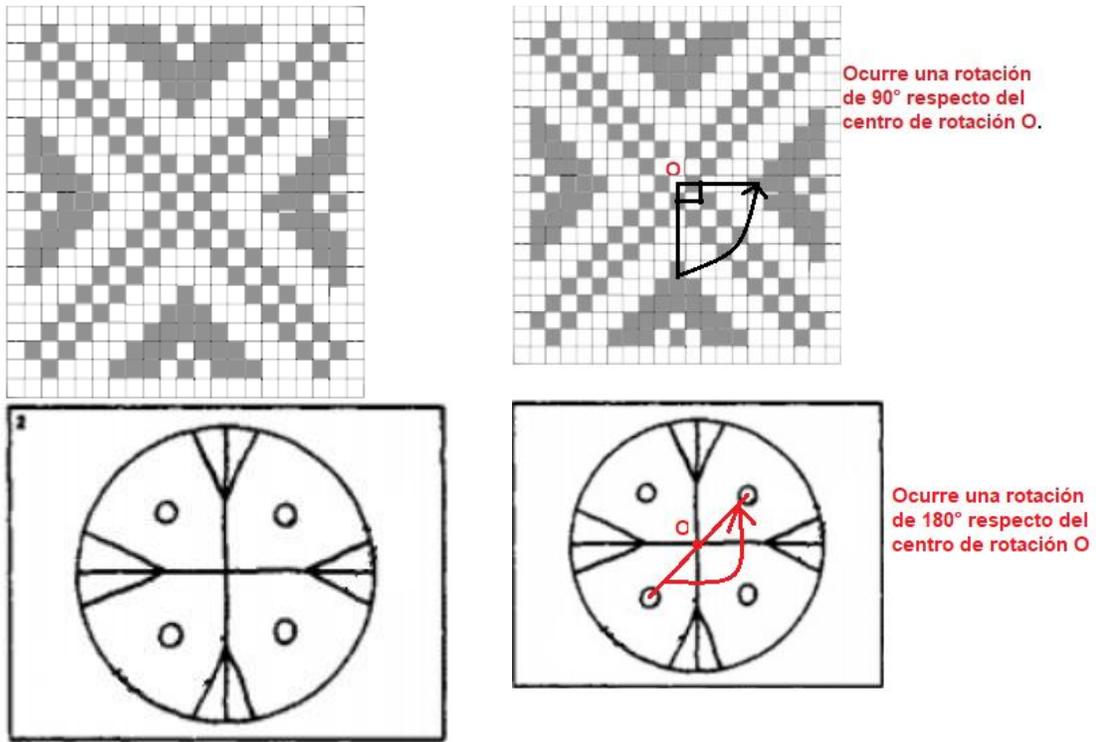


Figura 2.7: Rotación de patrones de íconos Mapuche
Fuente: de Torres. (2005). *Telar mapuche: de pie sobre la tierra*

Por último, también hay diseños donde existen reflexiones, es decir, cada punto y su imagen son equidistantes del eje de reflexión, como se muestra a continuación:

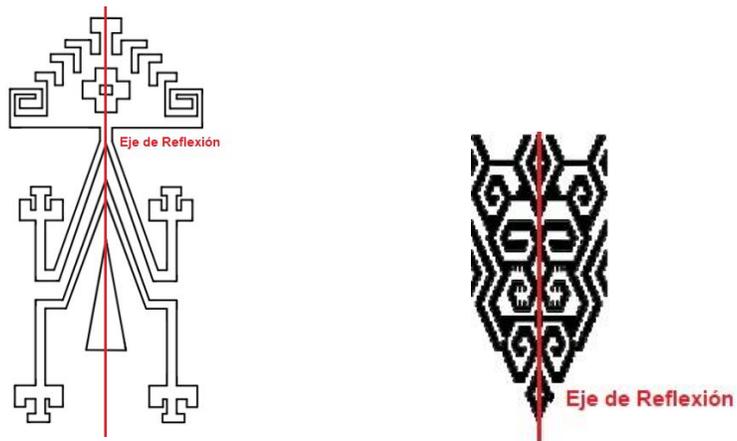


Figura 2.8: Reflexión de íconos Mapuches
Fuente: de Torres. (2005). *Telar mapuche: de pie sobre la tierra*

Al ser aplicaciones, también se permite (geoméricamente) la composición de ellas, es decir, aplicar alguna transformación y a esa imagen, aplicar otra, tal como el movimiento de rotación y traslación que realizan los planetas alrededor del Sol.

2.2. PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA

Al contemplar las distintas formas del vivir cotidiano, se divisan las muchas maneras en que personas, comunidades, pueblos y sociedades, se plantean la realidad y el vivir. Considerando este aspecto, se aprecia una relatividad a nivel individual y también a nivel de comunidades más amplias, donde cada parámetro de realidad se observa a partir de la propia concepción de significados. En este sentido la matemática no se encuentra desligada de este relativismo; la manera de pensarla, crearla y vivirla varía según diferentes grupos sociales y culturales.

Lo anteriormente expuesto se aborda con mayor profundidad mediante tres apartados: el desarrollo de la etnomatemática y estado del arte, describiendo las etapas que se fueron conformando en su construcción; la etnomatemática como un relativismo matemático sociocultural, donde se relaciona el conocimiento matemático y la relatividad de esta ciencia en diferentes culturas; y finalmente la visión pedagógica de la etnomatemática: enfoque que guía este seminario para la realización de la propuesta didáctica.

2.2.1. DESARROLLO DE LA ETNOMATEMÁTICA Y ESTADO DEL ARTE

Luego de la finalización de la segunda guerra mundial (1945), se produjo un gran interés en promulgar y defender los derechos civiles y políticos de grupos étnicos y minoritarios. Esto incentivó la revisión del modelo de desarrollo que hasta el momento se tenía, buscando modelos alternativos provenientes de distintas culturas. Las ciencias e instituciones en vistas del bienestar del ser humano recibieron estas críticas, llevando a la indagación de conocimientos de culturas alternativas, naciendo así la etno-botánica, la etno-filosofía, la etno-medicina, que requieren la convergencia de otros campos de investigación como la antropología, etnografía e historia, de manera interdisciplinaria. Estos estudios también incluyen a la matemática, debido a su absolutidad asumida hasta el momento con solo una manera de desarrollarla, donde se reduce a simple curiosidad cualquier intervención matemática de otras culturas por no contar con un respaldo teórico. Por último, cabe resaltar la reconceptualización de la educación desde corrientes constructivistas, dando la real importancia al aspecto sociocultural del estudiante al momento del aprendizaje. (Sánchez, 2003).

La etnomatemática surge como planteamiento global de investigación en el Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME5) en 1984 bajo la sesión plenaria del profesor Ubiratán D'Ambrosio, titulada Socio-Cultural Bases for Mathematical Education. (Gavarrete Villaverde, 2013). Para mostrar de una manera panorámica el estado del arte de la

Etnomatemática dentro de la estructura del ICME se representan tres periodos implicados por la etnomatemática:

- El primer periodo aborda las discusiones de lo “lingüístico y sociocultural de las matemáticas” y ocurre hasta principios de la década de los 90 del siglo pasado. Se trataron aspectos del lenguaje, la semántica y las bases socioculturales de las matemáticas. Se realiza durante los años 1984, Australia, 1988, Hungría y 1992 Canadá se llevaron a cabo el ICME 5, ICME 6 e ICME 7 respectivamente.
- El segundo periodo se centra en discusiones y reflexiones sobre la “legitimación y difusión de la Etnomatemática” y ocurre hasta mediados de la primera década del siglo actual. En esta etapa se abordaron los aspectos epistemológicos y políticos. Se realiza durante los años 1996, Sevilla 2000, Japón 2004 y Dinamarca, se llevaron a cabo el ICME 8, ICME 9 e ICME 10 respectivamente.
- El tercer periodo centra sus discusiones en “las matemáticas desde la educación para la equidad”. Esta etapa ha estado concentrada en reunir esfuerzos teóricos y prácticos para conducir las acciones en la Educación Matemática en pos de la diversidad, considerando, la perspectiva cultural y el enfoque de derechos para una educación más equitativa y entre otros aspectos las características personales, políticas, socioeconómicas o socioculturales, que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Durante los años 2012 en Corea y 2008 en México, se llevaron a cabo el ICME 11 e ICME 12 respectivamente.

Como se ha planteado, el desarrollo del conocimiento matemático está directamente relacionado con el contexto sociocultural de los grupos humanos y sus necesidades de subsistencia.

2.2.2. LA ETNOMATEMÁTICA: RELATIVISMO MATEMÁTICO SOCIOCULTURAL

Desde las distintas cosmovisiones encontramos diversidad de pensamiento y aspectos culturales innatos a su contexto, en ubicación espacial y temporal. Es en esta línea que se posiciona al ser humano como alguien inseparable de su estructura social, donde su conocimiento emerge en un contexto sociocultural, ya que un objeto es conocido y comprendido en función de este grupo cultural, atribuyéndole socialmente una significación propia a dicho contexto (Oliveras et al., 2014). En este ámbito, se extiende la relatividad a cada uno de los saberes comprendidos en el vivir, expresada también en el mundo matemático, así, también se reconoce que la Etnomatemática se basa en una versión de relativismo matemático que permite la existencia de más de una forma de matemática (Barton, 1996).

El concepto de etnomatemática (según D’Ambrosio) se entiende mediante tres raíces. La primera es etno, comprendiendo los diversos ambientes: social, cultural, natural, etc. Otra raíz, que es una raíz griega, se llama mathema y se entiende como: explicar, entender, enseñar,

manejarse, etc. Y la tercera raíz componente es thica, ligado a la raíz griega tecni que es artes, técnicas, maneras. Entonces sintetizamos esas tres raíces en etnomatemática. A modo de resumen se relaciona con las artes, técnicas de explicar, de entender, de lidiar con el ambiente social, cultural y natural. (Blanco-Alvarez, 2008).

Al momento de caracterizar sociológicamente se entiende la etnomatemática como multimatemáticas vivas (Oliveras, 2006 en Blanco-Álvarez, 2008). Multimatemáticas porque existen tres niveles de etnomatemática dependiendo del foco en el sujeto que lo realiza: una forma personal-individual de pensar; un producto social y cultural; una ciencia.

De manera individual, se constituyen pensamientos matemáticos a cada persona en su base (nivel 1). Por otro lado, se debe considerar que las personas viven, actúan e interactúan con su entorno sociocultural condicionando su forma de pensar, implicando entre ellas la producción cultural de un sistema consensuado de normas y significados compartidos (nivel 2). Por otra parte, se tiene gran cantidad de grupos de personas que se reúnen, y dado ciertos contextos desarrollan productos socioculturales. Para los grupos de profesionales relacionados específicamente al estudio de las matemáticas, es donde se generan productos socioculturales que adquieren la connotación de ciencia. Se recalca el hecho que estos profesionales (científicos) no siempre crean la ciencia, sino más bien la validan, dando formalidad al producto de lo que grupos no científicos han creado socioculturalmente hablando, a fin de obtener la connotación de ciencia (nivel 3). Es decir, personas sin el carácter de científicos crean nuevos temas sobre matemáticas, han de ser formalizados por profesionales para que adquieran el conocimiento de ciencias. (Oliveras, 2006; D'Ambrosio, 2008; Rosa y Orey, 2003, en Blanco-Álvarez, 2008). Y se consideran vivos por el hecho de que al crear productos socioculturales y generar ciencia se halla su cabida en el pensamiento personal, los cuales fluyen en constante evolución, continuando con vigencia en la actualidad.

Al momento de interiorizarse en los aspectos etnomatemáticos de cualquier tipo de civilización, es necesario tener en cuenta que las matemáticas surgen como una actividad de razonamiento, como un acumulado cultural dejando el legado del hombre a lo largo de la historia, que no se lleva a solo un conjunto de teorías sino más bien fueron construcciones hechas por individuos, que respondían a actos intencionales en contexto, fines y propósitos que tenían su objetivo en su momento histórico. Por lo tanto, las matemáticas se entienden como una construcción social y humana, la que responde a necesidades ubicadas en espacios y tiempos diferentes (Blanco-Álvarez, 2008)

El conocimiento matemático ha tenido un desarrollo histórico y cultural, donde cada civilización ha realizado diversas aportaciones en su construcción, como también lo han utilizado como recurso según sus propias necesidades y su propia cosmovisión. A continuación, se ilustrarán

brevemente algunas expresiones matemáticas que provienen de distintas culturas; algunas de ellas constituyen parte del acervo del saber matemático contemporáneo.

- **CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ORIENTAL:** En el antiguo oriente (desde el año 3000 a.C.), civilizaciones como Egipto y Mesopotamia relacionaron la matemática mayoritariamente con avances tecnológicos para el uso agrícola y ganadero, a la vez que desarrollaban sus respectivas primeras escrituras jeroglíficas (Ordoñez, 2004, en Rubio, 2008). Ambas civilizaciones desarrollaron la noción de área y perímetro, logrando realizar cálculos asociados a determinarlos en diferentes figuras geométricas, ya sea triángulos, trapecios, incluso círculos, consiguiendo determinar aproximadamente el valor de π , pues eran de utilidad para determinar tamaños de superficies de terrenos, de volúmenes de agua, etc.
- **CONOCIMIENTO MATEMÁTICO OCCIDENTAL:** El hecho característico de la matemática occidental tiene un rumbo bastante demarcado por el mundo griego. Al mirar la historia de esta matemática tendremos periodos de un realce poderoso en sus aportes a la humanidad, partiendo por los siglos VI a III a.C. por parte de la cultura griega. Otro periodo de gran importancia radica en los siglos XVII y XVIII con la creación de la geometría euclidiana y del cálculo, con sus respectivas derivaciones. La geometría de Euclides y la de Apolonio fueron elementos aplicados de manera exitosa sobre diversidad de problemas físicos como la mecánica y la mecánica celeste. (Ortiz, 2005).

Dentro de los grandes protagonistas en el origen de la matemática occidental encontramos La Escuela Jónica creada por Tales de Mileto, y La Escuela Pitagórica creada por Pitágoras.

Bajo estos orígenes encontramos una matemática más abstracta, cercana al mundo de las ideas ajena a la realidad corrompible, donde su aplicación al mundo cotidiano es una consecuencia y no una causa de su construcción (Muñoz, 2011).

- **UNA MIRADA PRECOLOMBINA AL SABER MATEMÁTICO:** Cuando se comienza a escudriñar en los orígenes matemáticos atados al contexto sociocultural de los distintos pueblos pasados, más allá de cómo entendemos hoy el conocimiento, encontramos en el origen precolombino diversidad de saberes ya sea matemático, físico, químico, medicinal, religioso, histórico, etc., y en ello destacaremos cuatro culturas diferentes que destacan por su conocimiento de las ciencias ya mencionadas, ellos son los Mayas, Aztecas, Incas y Mapuche. Cabe destacar que en la cultura Mapuche se verán algunos aspectos con mayor profundidad un poco más adelante.

Lo civilización Maya, por ejemplo, que ocupó los territorios de la zona mesoamericana (que al día de hoy corresponden a Guatemala, México, Belice y Honduras), desarrolló

su propio sistema de escritura (cuyos manuscritos fueron posteriormente destruidos por los españoles) y su propio sistema de numeración basado en un sistema vigesimal y no decimal, pues consideraban el contar tanto con los dedos de las manos como con los de los pies (O'Connor y Robertson, 2000 en Martel y Tenorio, 2004), y es representado por tres símbolos: el punto, la raya y el óvalo. (O'Connor y Robertson, 2000 en Martel y Tenorio, 2004). Su sistema de numeración fue elaborado utilizando los números que utilizaron en sus 3 diferentes calendarios, donde uno era para representar rituales religiosos y contar la edad de los habitantes, otro era un calendario solar (llamado calendario civil, secular o genérico por algunos autores) y otro para contar el paso del tiempo (Martel y Tenorio, 2004), donde el símbolo de la serpiente poseía gran valor para su cultura. Para esta civilización, el “cero” indica la ausencia de valor asociado a un objeto o situación, y el símbolo utilizado era el óvalo horizontal, lo cual se relacionaba con la concha de un caracol. (Casado, 1997–2000; Joseph, 2000; Guedj, 1996, en Martel y Tenorio, 2004)

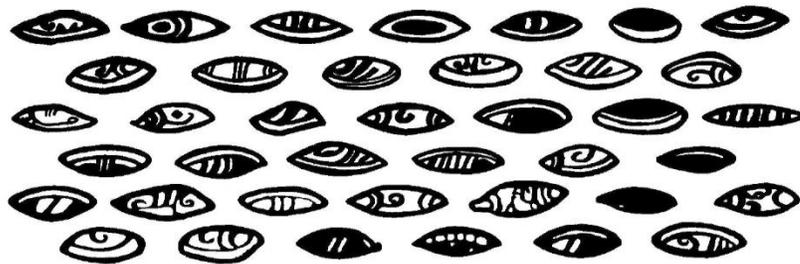


Figura 2.9: Diversas formas del símbolo empleado para la cifra cero por los mayas.

Fuente: Martel y Tenorio, (2004). *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca.*



Figura 2.10: Representación de los números de la serpiente.

Fuente: Martel y Tenorio, (2004) *Los sistemas de numeración maya, azteca e inca*

Para el conocimiento Azteca tenemos la utilización de diferentes tipos de maíz para su representación simbólica como elementos de numeración como, por ejemplo, el “1”, un punto o borrón que representaba una vaina de la semilla del maíz; para el “20”, una bandera de las que se empleaban para marcar los límites de un terreno; para el “400” (Joseph 2000 en Martel y Tenorio, 2004)

Por parte de los Incas, no se desarrolló escritura, pero bajo la necesidad de representar el conteo de objetos y registrar la información numérica, es que se crearon instrumentos que servía para registrar y almacenar números en ellos. En base a lo anterior se crean los quipus, los que consistían en un conjunto de cuerdas dispuestas de cierta manera y en las que se hacen una serie de nudos, cumpliendo un papel de gran importancia para la administración del imperio. Para el conteo existía un tablero de cuentas llamado yupana (hoy conocido como el ábaco inca) (Martel y Tenorio, 2004.).

Finalmente se presenta la cultura Mapuche con su sistema de conteo Rakin, siendo de base decimal y a partir de diez se incorporan dos potencias de 10 para hacer referencia a las centenas y unidades de mil. Este sistema sigue vigente hasta el día de hoy, siendo utilizado por las comunidades como base de la enseñanza mapuche (Mendoza, 2016).

De las siguientes tablas apreciamos su designación:

Número	Castellano	Interpretación Aritmética	Numero	Mapuzungun	Interpretación Aritmética
1	Uno	1	1	Kiñe	1
2	Dos	1+1	2	Epu	1+1
3	Tres	2+1	3	Küla	2+1
4	Cuatro	3+1	4	Meli	3+1
5	Cinco	4+1	5	Kechu	4+1
6	Seis	5+1	6	Kayu	5+1
7	Siete	6+1	7	Regle	6+1
8	Ocho	7+1	8	Pura	7+1
9	Nueve	8+1	9	Aylla	8+1
10	Diez	9+1	10	Mari	9+1

Tabla 2.1. Numeración del uno al diez en Castellano y Mapuzungun
Fuente: Mendoza (2016), *Avances en Matemática Educativa Tecnología y Matemáticas*.

Número	Castellano	Interpretación Aritmética	Numero	Mapuzungun	Interpretación Aritmética
1	Once	1	1	Mari Kiñe	1
2	Doce	1+1	2	Mari Epu	1+1
3	Trece	2+1	3	Mari Küla	2+1
4	Catorce	3+1	4	Mari Meli	3+1
5	Quince	4+1	5	Mari Kechu	4+1
6	Dieciséis	5+1	6	Mari Kayu	5+1
7	Diecisiete	6+1	7	Mari Regle	6+1
8	Dieciocho	7+1	8	Mari Pura	7+1
9	Diecinueve	8+1	9	Mari Aylla	8+1

10	Veinte	9+1	10	Epumari	9+1
----	--------	-----	----	---------	-----

Tabla 2.2. -Numeración del once al veinte en Castellano y Mapuzungu

Fuente: Mendoza (2016), *Avances en Matemática Educativa Tecnología y Matemáticas*

2.2.3. VISIÓN PEDAGÓGICA DE LA ETNOMATEMÁTICA.

D'Ambrosio, establece que el principal significado conceptual de la etnomatemática es “una manera de hacer Educación Matemática, con ojos que miran distintos ambientes culturales” (Blanco-Alvarez, 2008, p22). Así, el fin de la etnomatemática no consiste en pasar al estudiante las teorías matemáticas existentes, que están congeladas en los libros para que las repitan, debe ser una práctica, una cosa viva, hacer matemática dentro de las necesidades ambientales, sociales, culturales, etc. En este mismo sentido el objetivo que persigue la etnomatemática es integrar la matemática a otras maneras de conocimiento ya que no se encuentra aislada de ellas (sea arte, religión, arquitectura, etc.).

Lo descrito en el párrafo anterior invita e incita a las personas que se dedican a la enseñanza de las matemáticas, a tener una visión mucho más amplia de estas, entendiendo que son parte misma del entorno en donde se vive y desenvuelve el ser humano de manera cotidiana y natural, donde la separación entre el conocimiento y la experiencia humana no existe, encontrando la implicancia de una sobre la otra. Es por ello que se entiende a las matemáticas como un constructo social, cultural y humano, que responde a las necesidades particulares de una sociedad en espacios y tiempos diferentes. Estos saberes matemáticos son transmitidos de generación en generación, ya sea por medio escrito u oral, pasando a ser una tradición cultural de un pueblo, y es allí donde habita el mundo de las matemáticas, en un mundo constitutivo del ser humano (White, 1982 en Blanco-Álvarez 2008).

A partir de este conocimiento, se recalca la labor principal que tiene la etnomatemática en el ámbito pedagógico; cuestión que es el núcleo de esta propuesta didáctica. Las experiencias desarrolladas en las últimas décadas en el mundo y en Latinoamérica para enseñar geometría, son diversas. Sólo para ilustrar:

- Araújo (2008), diseñó una propuesta de enseñanza de la geometría hacia arhuacos (originarios de Colombia), a través de diseñar mochilas con iconografía inscrita en su contexto cultural, para llevarlos a la comprensión de un sistema geométrico transcultural, siendo una de las primeras bibliografías etnomatemáticas de una investigación a nivel de maestría, concluyendo que si bien el conocimiento matemático existente en aquella comunidad no se caracteriza por su exactitud, el paralelismo y la ortogonalidad; son abundantes en sus diseños (saturados de una carga simbólica muy importante), como también las isometrías en sus tejidos, facilitando la comprensión de la geometría en el aula de clases.

- Muhtadi, D., Sukirwan, Warsito, & Prahmana, R.C.I. (2017), con el propósito de abordar un estudio de la cultura del pueblo Sondañés, del oeste de la Isla Java de Indonesia, desde un enfoque etnomatemático, observaron las actividades que día a día hace el pueblo Sondañés, como estimar, medir y elaborar patrones incluyendo sus propios conceptos matemáticos como *kibik* (unidad para medir volumen), *bata* (unidad para medir área), y el *pihuntuan* (un modelo de caña), concluyendo que el saber matemático es inherente a esta cultura, que poseen términos muy estrictos (los que fueron rigurosamente explicados a los investigadores) y percatándose de lo inspirador que resulta ser el conocimiento matemático para una cultura en la creación de patrones geométricos.
- María Luisa Oliveras y María Elena Gavarrete (2013), diseñaron un modelo para la formación de profesores en Etnomatemática, implementándose en un curso de Didáctica de Matemática, en agosto 2011, en Costa Rica, pues las autoras consideran que existe una necesidad de formación relacionada con matemáticas de los profesores que desarrollarán su docencia en zonas geográficas de población mayoritariamente indígena. En el curso, se estudia el concepto de Enculturación⁷ (enfoque etnomatemático) por sobre la Instrucción (enfoque tradicional), desarrollando sesiones en que se evalúa la comprensión teórica del enfoque, considerando que todo grupo cultural desarrolla 6 actividades básicas: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, las cuales deben ser consideradas al momento de abordar la enseñanza desde un enfoque etnomatemático.
- Khayriah Massarwe, Igor Verner y Daoud Bshouty (2010), en Israel, realizaron un estudio piloto con estudiantes árabes, estudiando geometría a través de la etnomatemática, analizando y construyendo decoraciones típicas de su propia cultura árabe y de otras, en clases de geometría, relacionando las actividades con la historia y cultura. Fue un estudio cualitativo, donde estudiantes de décimo grado (una muestra de 15 estudiantes), indicaron en un cuestionario inicial, no ver una relación entre las matemáticas y el mundo real. De esta manera, se trabajó relacionando ornamentos culturales con el conocimiento geométrico, tal como congruencias y proporciones. El curso motivó a estudiantes a buscar en la webdecoraciones de otras culturas, y donde estudiantes, que generalmente adquieren una posición pasiva en las clases, participaron activamente de las tareas.
- Jerry Lipka y Dora Andrew-Irhke (2009), llevaron al aula, en Alaska, la creación de patrones de elementos de la cultura Yupik (pueblos aborígenes esquimales) utilizando proporciones del cuerpo humano en clases de matemáticas, transmitiendo los

⁷ Enraizar en una cultura: realizar mediante el ejemplo el trabajo en cooperación, las interacciones sociales, el discurso (conjunto de significados comunes) compartido. (Oliveras y Gavarrete, 2011).

conocimientos de la cultura yupik (conocimiento transmitido desde las madres hacia las hijas), creando patrones que tienen de base figuras geométricas, y que son plasmados posteriormente en diferentes artefactos y decoraciones de sus ropas. A través de un cuidadoso proceso etnográfico de observación y de análisis de videos y fotos de lo trabajado, se concluye que la geometría transformacional, incluyendo las mediciones y la proporcionalidad, es el corazón de muchas de las construcciones de los yupik. Así, la construcción de patrones es un ejemplo que conecta directamente la actividad cotidiana de los yupik con el conocimiento geométrico-matemático (geometría transformacional, medición, proporcionalidad, propiedades y pruebas).

Estas experiencias nos evidencian la posibilidad de no aislar la actividad humana y cotidiana del conocimiento matemático, y además, esta unión puede ser llevada a las aulas, permitiendo generar asombro e interés en los y las estudiantes tanto en diferentes culturas como en las propias matemáticas, volviendo incluso tangible lo abstracto que pueden ser, muchas veces, las matemáticas y la geometría, como al recrear y analizar geoméricamente patrones y diseños identitarios. La etnomatemática, que toma como base el conocimiento sociocultural aplicado, permite desarrollar aprendizajes y habilidades propias del conocimiento matemático a la vez que estudiantes adquieren un rol activo, siendo responsables de su proceso de aprendizaje y relacionándose con su entorno.

2.3. ICONOGRAFIA TEXTIL MAPUCHE: COSMOVISIÓN Y SIGNIFICADO

Los Mapuche son un pueblo precolombino con presencia actual en distintas ciudades del país, producto de procesos migratorios, y con presencia en zonas rurales, especialmente en la Región de la Araucanía, donde se sitúa su origen. Su denominación Mapuche (Gente de la Tierra), deriva de su lengua originaria ágrafa: el *Mapuzugün*⁸ (Lengua de la Tierra). A la llegada de los españoles, los mapuche habitaban un enorme territorio desde los valles al norte, de lo que hoy es la capital de Chile (Santiago), hasta donde comienzan las islas del Sur del Archipiélago de Chiloé.

El origen del pueblo Mapuche es una incógnita no resuelta de la cual se han desprendido varias hipótesis. En 1924, Ricardo Latcham plantea que los "araucanos" podrían haber tenido su origen en etnias del oriente de los Andes; uno de sus argumentos era la frecuencia con que los Mapuche se referían al tigre o yagareté (nahuel) (Latcham, 1924, en Bengoa, 2000, p.12), más tarde, el historiador Francisco Antonio Encina apoyó la teoría de Latcham apuntando algunas costumbres pampeanas, referencias geográficas y denominación totémicas (Encina, 1954, en Bengoa, 2000, p.13). Por otro lado, Sergio Villalobos plantea que los "araucanos" y el resto de mapuche provenían de grupos de la cuenca amazónica, más especialmente de los guaraníes

⁸ Mapuzugün, mapudungün, mapuzungün son maneras de denominar la lengua mapuche dependiendo de la zona geográfica o lof.

(Villalobos, 1995, p.27). También, existe la teoría presentada por Guevara que fundamenta el desplazamiento del norte hacia el sur, ya que existen evidencias arqueológicas y etnográficas de similitudes con la cultura Tiwanaku (Guevara, 1928, en Bengoa, 2000, p.13). Otras hipótesis, plantean que el territorio ocupado hoy por Chile habría estado habitado desde tiempos muy antiguos por grupos humanos que vivían de recolectar moluscos, de cazar animales y de la pesca. Además, no tenían asentamiento fijo, pero sí se movían dentro de ciertos territorios. Se podría plantear, según Bengoa, que ellos fueron la base del asentamiento mapuche. Uno de estos grupos se impuso sobre el resto, inculcando su lenguaje, sus creencias y sus costumbres. Sin embargo, esto sigue siendo una hipótesis. La única evidencia cierta es que alrededor de los años 500 a 600 A.C. ya existía una cultura que se puede denominar mapuche, formada por una población cercana al millón, según el estudio de la Escuela de Berkeley (Escuela de Antropología de la Universidad de Concepción, 1969, en Bengoa, 2000, p.13).

2.3.1. COSMOVISIÓN MAPUCHE

Antes de escribir sobre la cosmovisión mapuche, se hace pertinente entender el término de cosmovisión. En ese sentido, se entiende que los aspectos morales y estéticos de una determinada cultura (entendiendo el concepto de cultura según la definición de Clifford Geertz, que señala que la cultura es “sistema de concepciones expresadas en formas simbólicas por medio de las cuales la gente se comunica, perpetúa y desarrolla su conocimiento sobre las actitudes hacia la vida”) (p. 88) además de los elementos de evaluación, son conceptos generalmente resumidos en el término *ethos* (Conducta y costumbre, en griego). El tono, el carácter, la forma de vida, su estilo moral y estético también corresponden al *ethos*. Por otra parte, los aspectos cognitivos y existenciales se conocen como “cosmovisión” o visión de mundo; su concepción de la naturaleza, de la persona y de su comunidad o sociedad. Respecto a la cosmovisión de los pueblos originarios, concretamente se entiende como:

La manera de concebir o interpretar el mundo desde una visión totalizadora en la que están englobados todos los aspectos de la vida: religión, política o filosofía, de forma integral y compartida. Estaría sustentada en un conjunto de valores, y por tanto de una ética que configura una manera de vivir y sentir. (Geertz, 2003, p. 118).

Por un lado, la cosmovisión es una concepción y una interpretación, mientras que la forma de expresarla es a través de la cultura.

Religión, filosofía y política, son los conceptos que según Geertz engloban la cosmovisión. Respecto a la religión, se puede afirmar que el pueblo mapuche comparte tres características con la mayoría de las religiones indígenas. Es una religión cósmica, es animista y es chamánica. Lo primero, que se refiere a la búsqueda de un fundamento, es característico de cualquier religión y concierne a las referencias del mundo profano al poder divino que lo sustenta; lo segundo quiere decir que esta religión percibe a la naturaleza como animada por poderes ocultos en los diversos elementos, poderes que pueden ser favorables o no y que se

subordinan a un Poder Supremo; finalmente, para controlar estos poderes en la naturaleza existe la machi, cuya función principal es la restauración del equilibrio (Riveros, 1998).

Una parte de la filosofía mapuche es la concepción del tiempo y espacio. Un aspecto fundamental lo constituye lo circular, se inicia con la vida al nacer y volver a la madre tierra, una vez que se muere. Son gente de la Tierra. Este es un carácter cíclico del tiempo, que es diferente al tiempo lineal que se entiende hoy en día en la cultura chilena y en occidente en general. La naturaleza no cambia, sólo se renueva. El tiempo se renueva, termina una jornada, un ciclo y se repite, siempre, de distintas maneras, más fuerte o más débil como la naturaleza. No es un tiempo diferente, es el mismo tiempo que se va rotando. El valor intrínseco de que esos acontecimientos que ocurren en un momento del tiempo forman una estructura permanente. Esto significa pasado, presente y futuro. Existe un pasado vinculado a los ancestros, quienes proveen la sabiduría o el *kimün* (conocimiento, saber), que ha sido entregada y es un acto colectivo para su continuación, transmitido de forma oral. Existe un presente que fortalece las relaciones entre la comunidad local y los grupos familiares, en el conjunto de sus creencias y mitos, los cuales deben resultar en la percepción de un futuro (Carbonell, 2003).

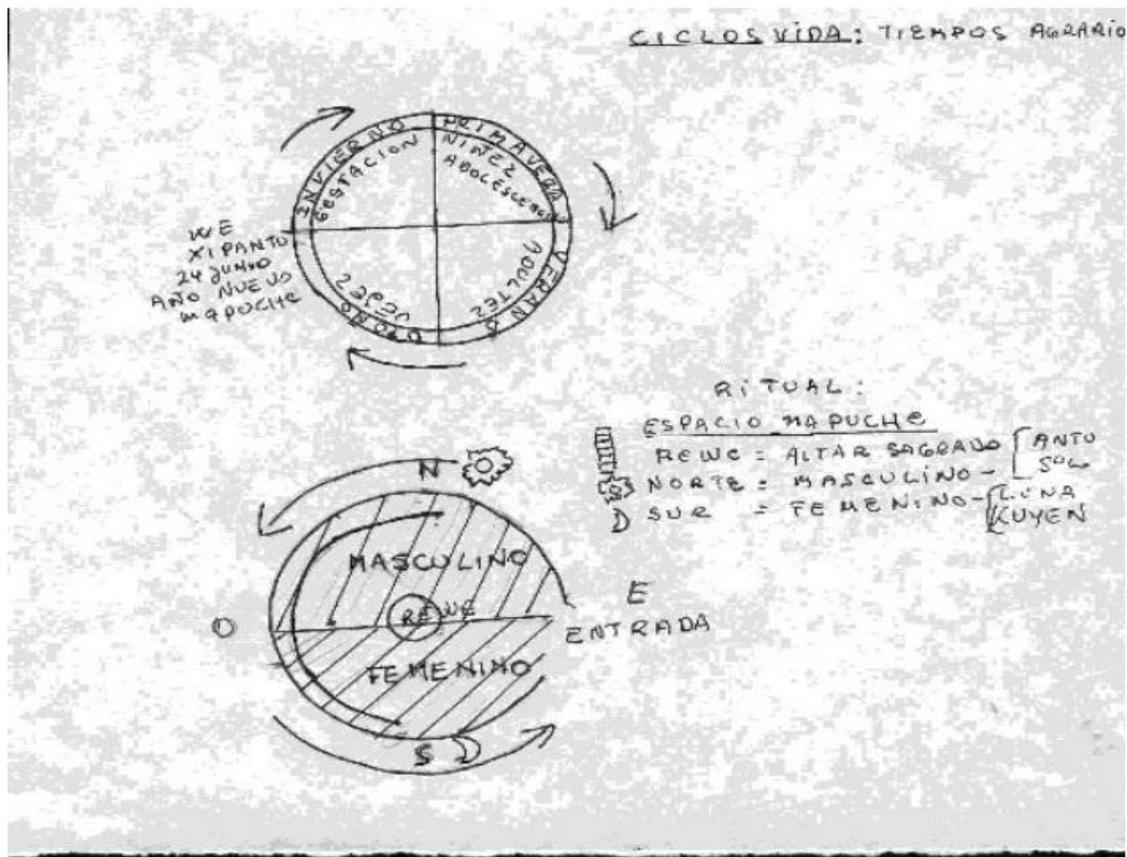


Figura 2.11: Ciclos de vida. Esquemas sobre las visiones del tiempo y el espacio para el pueblo Mapuche. Fuente: Carbonell, 2003. *Cosmología y chamanismo en Patagonia*

Finalmente, la estructura social mapuche, aunque sencilla, era homogénea: no había, ni hay entre ellos clases dominantes y dominadas, sino un modo de producción y de convivir en que predominaba el colectivismo. La base social del pueblo mapuche se basa en sus mismas familias, unidas en el *Lof* (comunidad), cada *Lof* tiene un *Longko* (Cabeza). La familia era el centro de esta sociedad, y la única institución social permanente. Las familias eran numerosas y los cronistas hablan de rucas gigantescas, algunas con más de cien personas en su interior. En otros casos, había agrupación de rucas alrededor de la del longko, pero siempre se mantenía cada familia separada de las otras, con una autonomía de territorio, afirma Bengoa (2000). Sin embargo, al ser un pueblo numeroso, también debieron organizarse entre todas las comunidades con una estructuración de “Estado Federado y Confederado”, en donde existía un poder horizontal, mas no piramidal (Chihuailaf et al., 2008). Así, la organización mapuche puede presentarse como una estructura de círculos concéntricos: varias comunidades o *lof* formaron *rewe* o *rewemapu* (llamados *rehues* o *reguas* por los españoles); varios *rewe*, por lo general nueve, constituyeron los *ayllarewe* (alianza política de nueve *rewe*) (Ruiz, 2013). Los *ayllarewe* eran independientes unos de otros, y mientras uno generaba medios políticos para hablar y llegar a acuerdos con los españoles, los otros mantenían su independencia. De esta división administrativa del *Wallmapu* o *Wajmapu* (territorio circundante o tierra circundante), podemos inferir que habrían existido 7.200 *lof*, 900 *Rewe-mapu*, 144 *ayllarewe* y cuatro *FutaelMapu* (integrados por *ayllarewe*), estos últimos conocidos hoy como los *Fütal Mapu*, instalados bajo el criterio de cosmovisión, *chumley ta wenu mapu ka feley ta nagmapu* (tal como es arriba así es abajo) (Dillehay et al., 2011).

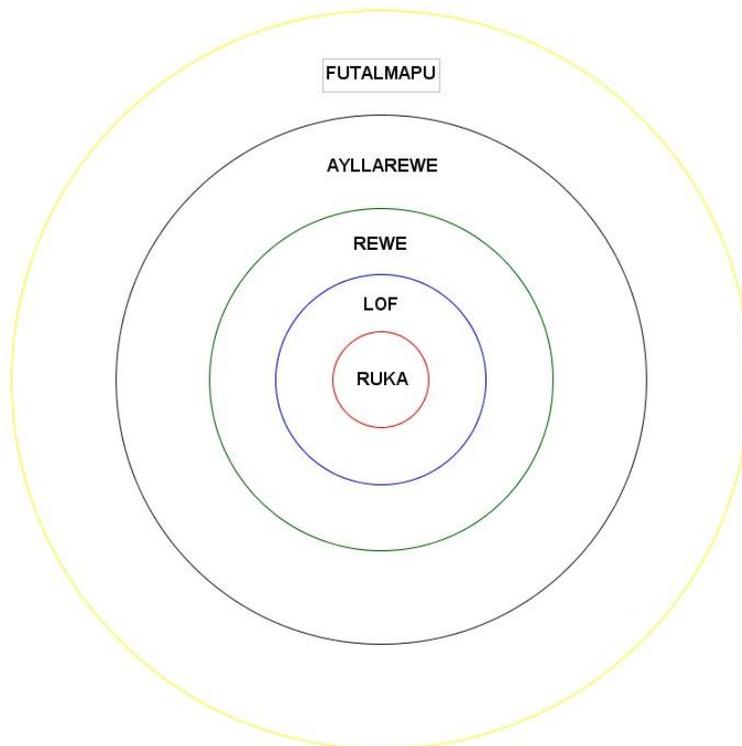


Figura 2.12: Diagrama de organización social mapuche
Elaboración propia basado en descripción de Chihualaf (2008).

El círculo, occidentalmente, es un objeto de estudio geométrico, enriquecida de relaciones matemáticas, mientras que para la cultura mapuche forma parte de su identidad, adquiriendo un importante significado para representar relaciones interpersonales, desde la intimidad de la ruca y las reuniones en torno al fogón, hasta la interpretación de Chihuilaf representada en la figura 2.12.

En cuanto a la relación del pueblo Mapuche con la naturaleza basta con conocer el significado de las palabras Mapuche y Mapuzungun (gente de la Tierra y lengua de la Tierra respectivamente) para entender la ancestral identificación que tiene este pueblo con la Tierra. La comunicación de la cultura mapuche con la diversidad de seres vivos y ecosistemas es captada y elaborada a través de diversas prácticas culturales (Ovalle 1646, Gusinde 1917a, 1917b; Coña y Moeshbach 1930, Domeyko 1971, Bulnes 1980, Massardo y Rozzi 1996; en Ochoa, 2014). Por ejemplo, existe un caso particular, se trata de Lorenzo Aillapán Cayuleo o también conocido como ũñümche (hombre pájaro). El hombre pájaro tiene la capacidad de comunicarse con las aves y hablar por ellas en mapuzungun. Aillapán, pide permiso en cada ocasión a las aves y a la Madre Naturaleza para hablar con ellas y/o por ellas. Lorenzo Aillapán es además poeta y escritor sobre la cultura mapuche, y menciona que en la cosmogonía mapuche se distinguen cuatro puntos cardinales que involucran a su vez cuatro divinidades centrales, los “Cuatro Ventosos de la Tierra”. De acuerdo con Aillapán, ellos provienen del oeste con el guardián del mar llamado Dumpall, del sudeste con el guardián de los volcanes o Pillán, del noreste con la princesa del sol o Anchümallen, y del norte con el gran visitante que tiene las riquezas o Witrantalwe. A través de los poemas, lo mismo que en la cultura mapuche, conviven los mundos natural, humano y divino (Ochoa Díaz, 2014).

La cosmovisión mapuche y su relación estrecha con la naturaleza la detalla la escritora, académica USACH y doctora en lingüística Elisa Loncón, quien señala que el mapuzungun es el idioma del futuro, en donde se encuentra conocimiento clave para el desafío que tiene hoy la humanidad: El cambio climático y la destrucción de la naturaleza. En el mapuzungun se encuentran valores y conocimientos que protegen a la naturaleza y se oponen a la destrucción de esta. Estos aspectos también se incluyen en la cosmovisión mapuche, siendo claves para el futuro de la vida como lo es el convivir en armonía con la naturaleza (Loncón, comunicación personal, 29 de diciembre de 2017).

2.3.2. ICONOGRAFÍA MAPUCHE Y SU RELACION CON LA GEOMETRIA

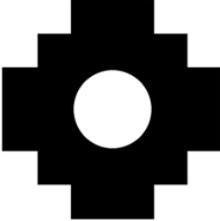
En las culturas ágrafas las representaciones visuales están cargadas de información y conocimiento traspasadas de generación en generación, resultando en un conjunto iconográfico

que puede ser percibido como elemento identitario, de memoria y de representación visual de un pueblo o de una región. Según Berta Ribeiro, el estudio de la iconografía arroja luz sobre el modo en que los grupos expresan sus códigos (Cavalcante, 2013).

En la iconografía mapuche se desprende su cosmovisión, y estos símbolos e iconos son decodificados por las personas que pertenecen a esa cultura. Es posible encontrar múltiples interpretaciones, que emergen desde una matriz común. Por ello, conocer el mensaje, significado o *dungu* contenido en los distintos diseños, requiere lectura especializada donde se manejen ciertos códigos culturales mapuche (Wilson, 1992).

Se han logrado descifrar algunos símbolos que se encuentran en telares confeccionados por los Mapuche. Al conocer los códigos y símbolos, es posible definir personalidades o recordar historias (Fiadone, 2008 en Micelli y Crespo, 2011).

En la siguiente tabla se muestran una serie de iconos presentes en telares y sus significados culturales estudiados por la Fundación Chol-Chol (Micelli y Crespo, 2011).

Icono textil	Significado
	Chakana: palabra compuesta del quechua, chakana viene del verbo chakay que significa “cruzar”, “trancar la puerta o entrada”, más el sufijo obligatorio –na que le convierte, añadido a un radical verbal, en sustantivo. Chakana entonces es el “cruce”, la “transición” entre dos puntos, el “puente” como nexo entre dos regiones. ¹ También se interpretan como las zonas de transición entre un estrato a otro, entre un período a otro, entre una entidad a otra, son de vital importancia para la génesis, el fomento y conservación de la vida. Estas zonas de transición, “chakanas” o “puentes cósmicos”, se constituyen en relaciones pachasóficas indispensables para el equilibrio y la armonía de todo el universo. La gran mayoría de los rituales andinos se “ubican” en estas zonas y tienen que ver con los fenómenos que tienen característica de chakana. La Cruz Andina es la Chakana por excelencia, porque articula el estrato de arriba (hanaq/alax pacha) con el estrato de la cotidianeidad del aquí y ahora (kay/aka pacha), pero también la esfera izquierda asociada con lo femenino, con la esfera derecha de asociación masculina. O, en otras palabras: la Cruz Andina articula las relaciones de correspondencia con las de complementariedad, y se convierte, por tanto, en chakana de las chakanas. El cuidado y la conservación de estas chakanas son de vital importancia para salvaguardar el equilibrio social, económico, religioso y ecosófico.



Variación de la Cruz andina. Mayoritariamente común en culturas andinas y significa la eternidad de dichas culturas. Generalmente, es un icono utilizado en textiles que son utilizados por el “Longko” de una comunidad o reducción mapuche.



Pichikemenküe: significa tinaja o jarrón de greda en la cultura Mapuche. Las tinajas están representadas por los diamantes más pequeños. Los diseños fuera de los diamantes son külpe ñimin, que representan garfios.



Wuñelfe: del Mapuzungun lucero del alba, en la cultura Mapuche representa uno de los dioses mayores el cual ayuda a la machi al amanecer para realizar rituales terapéuticos, brindando el conocimiento de éste por medio de los sueños.



Nge-nge: representa un par de ojos, que son el medio para mostrar el alma.



Wiriwel: Icono que representa el interior del cosmos. Líneas oblicuas y paralelas del tejido en cuyo centro casi siempre va otro icono.



Mauñimin: Diseño de cadenilla que representa la unión de todas las comunidades Mapuche.

	<p>Wangülen: estrella con las seis puntas principales, pero con un poco más de detalle, y más correspondiente con la cosmovisión Mapuche.</p>
	<p>Wenumapu: Símbolo del cosmos y el cielo. También representa aspectos de la vida no terrenal.</p>
	<p>La cruz con brazos iguales es un símbolo complejo; representa el cielo, la lluvia y la vida. También es un símbolo cosmológico o una representación.</p>
	<p>Külpuwe ñimin: Diseño acompañado de garfios, los que son muy comunes en la cultura Mapuche y en otras culturas precolombinas. Su significado se asocia a la serpiente antigua.</p>
	<p>Mauñimin: Figura de cadenilla que simboliza la unidad de las comunidades Mapuche.</p>

Tabla 2.3: Significado de iconografía textil Mapuche.
Fuente: Micelli y Crespo (2011). *Geometría Entretejida*

Para realizar una interpretación y un análisis geométrico es pertinente tener en cuenta lo citado en el Manual de Tejido de María Mastandrea (1987) Juan Beningar, antropólogo al que apodaban de “Cacique Blanco” señalaba que:

El araucano procede de modo diferente al nuestro para nombrar figuras geométricas, nosotros preferimos las abstracciones matemáticas; él se expresa plásticamente. Si miramos los dibujos en los tejidos indígenas, nosotros hablaremos de líneas quebradas, de triángulos, de cuadriláteros, de espirales. El araucano tomará las cosas como representaciones esquemáticas de objetos de su experiencia, hablará en figuras: el triángulo sin base será *wili waka* (pezuña de vaca); el triángulo completo se convertirá en *sítipu* (estribo); el rombo pequeño será *ge waka* (ojo de vaca); el cuadrilátero mayor *kuchiw choike* (parte posterior del avestruz). Y así sucesivamente. ¿Líneas paralelas? Ni de líneas ni de paralelismo nada sabe la lengua, pero al verlas, enseguida esta pronta la frase: *Rupu rupu ly* (igualitas como el camino están). (Mastandrea, 1987. p.18)

Desde el punto de vista geométrico, existe la presencia de cuadriláteros, en especial los rombos, aunque pueden observarse algunos triángulos isósceles, cuya base coincide con el lado no congruente. Desde esta mirada geométrica, se aprecia una cantidad de figuras simétricas, isométricas y también concéntricas. Es así como en los tejidos mapuches se encuentran diseños geométricos impregnados de ideas sobre el mundo y sus habitantes como así también sus creencias religiosas (cosmovisión). Por lo tanto, se está presente, nuevamente, ante obras textiles de importancia religiosa, como así también cultural, social y política. Además, de estar presentes ante la cuatripartición cósmica, al igual que se expresa en el Popol-Vuh (Recopilación de mitos, leyendas e historias Mayas), con lo cual se observa que los Mapuche también se rigieron por la cuatripartición del cosmos, transmitido en el arte del tejer (Mastandrea, 1987).

En ese sentido, Grebe (1973) propone que existen objetos-símbolos que agrupan diferentes significados y sentidos característicos de sus experiencias de vida y comunidad. Por ejemplo, el kultrún. Algunos artículos presentan el Kultrún como un instrumento musical de percusión (Greenhill, 1986) o como timbal mapuche (Hermosilla, 2001). Más preciso que definir la propiedad musical del kultrun es su poder de atraer las fuerzas cósmicas y terrenales que resultan vitales para la sanación (Putzi 2009 citado en Salvo, 2015). El kultrún tiene un rol fundamental en la preservación de la cosmovisión, en la cultura. Su función es de carácter místico y posee cualidades curativas importantes para los mapuche. Tiene que ser de uso exclusivo de la Machi. Se percute con una baqueta sobre un parche de cuero de animal, que puede o no tener iconografía en él. En su interior posee una serie de objetos sueltos: ramas de plantas, piñones, semillas o piedras (Salvo, 2015).

2.3.3. TEXTILERÍA MAPUCHE

La textilería se desarrolla desde tiempos precolombinos. Los datos más antiguos sobre la existencia de tejidos en las zonas más australes del continente americano (regiones sur de lo que actualmente es Chile y Argentina) se encuentran en algunos hallazgos arqueológicos como los de los Cementerios Pitrén en las proximidades de la ciudad de Temuco, el sitio Alboyanco en la octava región de Chile y el Cementerio Rebolledo Arriba en la Provincia de Neuquén (Argentina). Los registros más antiguos corresponden al sitio Alboyanco, en donde se hallaron evidencias de tejidos realizados con complejas técnicas y diseños vinculados a las culturas del norte andino con un fechado que ronda entre el 1300-1350 d.C. (Méndez, 2009). Desde las primeras crónicas y escritos coloniales, se encuentran descripciones que dan cuenta tanto de la forma de vestir de los indígenas de Chile, así como de las técnicas y procedimientos empleados en su hechura. Por ejemplo, el cronista González de Nájera refiriéndose al trabajo realizado por los mapuche lo describe así:

Sus ejercicios son hilar y tejer lana de que visten en telares que arman de pocos palos y artificio. Dan con raíces a sus hilados todos colores perfectísimos, y así hacen los vestidos de varias

listas, el negro para el cual no tienen raíces, lo dan muy bueno, cociendo lo que han de teñir en cieno negro repodrido. (Wilson, 1992. p 23)

Dentro de la frase de González de Nájera se puede inferir el material utilizado para tejer, la coloración de los tejidos y ciertos detalles de las técnicas utilizadas por las tejedoras. Las encargadas de tejer eran las mujeres mapuche, porque en la cultura mapuche, la mujer es la especialista en tejidos; ella confecciona y diseña. Sin embargo, no es una obligación de toda mujer mapuche, es más bien un placer, se teje con empeño, con voluntad y en público (Mege, 1990).

Según la *düwekafe* Matilde Painemil “Nacían las niñas y las llevaban donde hubiera más tela de araña, y esa tela de araña se la pasaban por las manos para que así fuera una buena hilandera, una buena tejedora” (Loyola, 2015). Las mujeres que tejen fueron instruidas por otra tejedora o *düwekafe*. También afirma que una gran tejedora adopta a una alumna, le enseña todo y, después, al final de su proceso de aprendizaje general, le enseña a tejer. Por último, le enseña a expresarse adecuadamente en su telar. Las formas, las frecuencias de una figura, las veces que la figura se repite en una tela y las expresiones no tienen un recetario o un patrón común de todas las tejedoras, sino que a través de la memoria que las *düwekafe* se expresan en sus telares (Loyola, 2015).

Mege (1990) propone una etnotaxonomía del *düwen* (lo tejido). A continuación, hay un resumen de aquello.

Düwen (lo tejido)		
Ngeren (vestimenta, dominio de la ropa tejida)	Enseres (dominio de los artefactos tejidos para la casa)	Aperos (dominio de los artefactos tejidos para mostrar).
Chamal (pañó cuadrangular)	Eküll (pañuelo, pañal)	Matra (sudadero)
Iwutue (sobretudo) - Makuñ (manta de hombre) - Ikúlla (capa de mujer)	Küka (vendas)	Kutama (alforja)
Trariwe o traruwe (faja) - Traruwe (mujer) - Trarúchiripa (hombre)	Lama (alfombra)	Chañu (pelero)
Trarilongko (cintillo)	Pontro (frazadas)	

Tabla 2.4: Etnotaxonomía de lo tejido.

Adaptado de Mege, 1990. *Arte textil mapuche*.⁹

2.4. MIRADAS DEL PUEBLO MAPUCHE

Desde la política pública en la educación, se ha expuesto constantemente un bajo rendimiento escolar en el contexto de La Araucanía, que si bien ha mejorado y se ha equiparado con el

⁹ Cabe destacar que se extrajeron los componentes generales de la etnotaxonomía de los textiles mapuche.

resto del país, sigue siendo deficiente (los resultados SIMCE en 10 años, se ha aumentado 18 puntos en Matemática en cuarto básico, mientras que en cuarto medio existe un alza de 15 puntos promedio pero una diferencia de 118 entre grupos socioeconómicos acomodados y vulnerables) (Agencia de la calidad de la Educación, 2015), atribuido a los altos índices de ruralidad (32,3% de la población), presencia importante de población mapuche (31,7% de la población) y la pobreza económica (La Araucanía es un 11,9% más pobre por ingresos que la media de todo Chile y un 8,3% más en cuanto a la pobreza multidimensional). Además, existe un 41,5% de hogares carentes de escolaridad (Encuesta de caracterización socioeconómica [CASEN], 2015).

Sin embargo, en investigaciones actuales, se revelan variables importantes que podrían tener relación con el bajo rendimiento en la región. A saber:

La actuación prejuiciada y estereotipada de profesores del sistema educativo, lo cual suprime saberes y conocimientos educativos propios o bien, niegan otra racionalidad que no sea la occidental para conocer y comprender la realidad (Merino, 2006 en Quintriqueo y Torres, 2012)

La coexistencia de hecho de la lógica del pensamiento y conocimiento cultural mapuche con el conocimiento occidental en el medio escolar (Quintriqueo, 2007 en Quintriqueo y Torres 2012). La doble racionalidad mapuche y no mapuche que viven los niños, niñas y adolescentes en el medio escolar y social (Quilaqueo, 2008 en Quintriqueo y Torres, 2012).

Respecto al punto 1, se puede tomar como ejemplo las formas de reconocer territorialmente al pueblo Mapuche, ya que existen dos formas de identificar sus divisiones territoriales. Una es de la perspectiva de la historia clásica con influencia *wingka* (no mapuche), y otra es de la manera en que los mismos mapuche dividían este territorio. Las diferencias son a través de la orientación, así en la historia clásica se hace una división de norte a sur, es decir las divisiones serían Picunche o *pikunche* (gente del norte), Mapuche o “Araucano” y *Huilliche* (gente del Sur), por su parte los mapuche hacen la división de acuerdo a su identificación con cierto territorio, de oriente a poniente: *Puelche* (gente del oriente, en la actual Argentina); *Pehuenche* (pewenche, gente del pehuén, piñón o araucaria, en la cordillera de los Andes), *Huenteche* (wenteche, gente de las tierras altas, en Chile), *Nagche* (gente de las tierras bajas) y *lafkenche* (gente de la costa) (Chihuailaf et al., 2008). Hoy en día, los mapuche habitan en comunidades o reducciones rurales en el Sur de Chile y en menor medida en el Sur de Argentina, donde muchos han migrado a las ciudades. Es un pueblo con una fuerte identidad y que mantiene vivas la mayor parte de sus tradiciones y su lengua (Bengoa, 2011). Sin embargo, hay quienes no reconocen estas divisiones del Pueblo Mapuche, como el historiador Sergio Villalobos, un referente de la historiografía chilena contemporánea y que su vasta trayectoria fue reconocida en 1992 al obtener el Premio Nacional de Historia. Villalobos se refiere a los mapuche como “araucanos”, cuyo origen proviene de los colonizadores (los españoles los denominaron araucanos) y

también se divulgó esta denominación en el poema de La Araucana, del poeta Alonso de Ercilla y Zúñiga (Consejo Nacional de la Cultura y las Artes, 2011). Sin embargo, Villalobos (1995), se refiere al pueblo mapuche como "araucanos" porque se basa en la división wingka del Pueblo Mapuche, es decir pikunche, "araucanos" y huilliches, y señala que los araucanos fueron el núcleo principal perteneciente a esta entidad mayor que serían los Mapuche. Sergio Villalobos, además, ha sido profesor de historia en la Universidad de Chile, Universidad Católica y en el año 1992 es designado director de la Dirección de Bibliotecas, Archivos y Museos (DIBAM) y director de la Biblioteca Nacional. Con todos estos reconocimientos y el extenso currículum a su haber, Villalobos, ha sido parte de los autores que escriben los textos escolares desde los inicios de la década del 2000 (en los textos anteriores al 2000, no se encontraban referencias a autores) junto a otros historiadores como Barros Arana, Encina, Heise, Edwards, Arancibia, Castedo, Eyzaguirre, Mellafe, Góngora, Pinto, Salazar, Grez, Moulian, Garretón, Ramírez, Krebs, Cruz, Illanes, Jocelyn-Holt (Münzenmayer, 2012). Los textos de historia dependen de la óptica de la historiografía, de la posición ideológica de los autores, del momento histórico en que se escriben, del entorno político nacional y del uso del lenguaje. Aunque se quiera lo contrario los textos nunca van a ser objetivos y dependerán del autor o los autores (Negrín, 2009; en Münzenmayer, 2012).

A pesar de estos reconocimientos y su influencia académica, Sergio Villalobos ha sido duramente criticado por intelectuales mapuche y otros historiadores, como Gabriel Salazar, tanto por su visión euro centrista y tradicional de los pueblos originarios, como por el análisis que propone del proceso de colonización y ocupación de la Araucanía. Su postura epistemológica, para muchos de sus detractores, supone juicios racistas y obsoletos al considerar los pueblos originarios como entidades inmutables y derrotadas (Biblioteca Nacional de Chile, 2016).

Respecto a este punto, Elisa Loncón realiza una reflexión a su etapa escolar:

"Los Mapuche en la escuela eran los indios, los malos, el pasado. Hablaban de nosotros y nosotros estábamos ahí, y todos los profesores hablando mal de los mapuche, que eran sucios, borrachos. Ellos, todos los profesores, de historia y el resto, no nos vieron a nosotros. Tenían la idea de que éramos prehispánicos, que éramos el pasado y aun se ve de esa manera. Muy desfasado en cuanto al conocimiento."

Se puede inferir que Quintriqueo y Loncón enfatizan en este factor incidente del bajo desempeño de los estudiantes; los prejuicios y estereotipos desde profesores hacia la comunidad mapuche.

Respecto a los puntos 2 y 3, Elisa Loncón (2017) reflexiona que en la escuela se desconoce el conocimiento que el niño lleva acumulado en su experiencia de vida con su familia porque el conocimiento que 'vale' es aquel que procede de los textos de estudio y currículum. También,

declara casos de niños y niñas mapuche con problemas de lenguaje, enfocado en la producción del mismo, no tomando en cuenta la situación bilingüe que vive un niño y niña mapuche. Continúa, agregando un factor al bajo rendimiento de estudiantes mapuche o de la novena región, señalando que las pruebas estandarizadas se aplican de la misma manera a todo el país, sin tomar en cuenta las situaciones particulares antes mencionadas, enfatizando en el lenguaje y el idioma al que se enfrentan los y las estudiantes mapuche (Loncón, 2017).

Finalmente, Loncón hace en un relato actual sobre la mirada de la escuela chilena hacia el pueblo Mapuche, desde su experiencia como estudiante y como investigadora de educación intercultural bilingüe. Señala que:

Los indígenas siguen siendo estudiados como sociedades prehispánicas, se mantienen los verbos en pasado. Solo algunas unidades abordan conocimientos respecto a los pueblos originarios. Muy poco. Algo en lenguaje, en música, en artes; solo pinceladas. Y, por otro lado, ese currículo que se entrega compite con los medios de comunicación que son adversos a la presencia nuestra. La tv, la prensa, la visión del mapuche terrorista es contraproducente a cualquier valor de derecho fundamental que debiera resguardar para los indígenas en la sociedad chilena. (Loncón, 2017).

Pedro Cayuqueo en su libro “Sólo por ser indios” hace la analogía entre la convivencia entre el estado chileno y el pueblo mapuche como las películas de cowboys, donde los malos son los indios y los buenos son la gente blanca. El punto es que no debe haber bandos malos o buenos, sino justamente la posibilidad de convivir y reconocerse mutuamente.

2.4.1. DISTANCIA ENTRE EL CONOCIMIENTO MAPUCHE Y CONOCIMIENTO ESCOLAR OCCIDENTAL

Quintriqueo y Torres en el año 2012, realizaron una investigación educativa sobre “Categoría Conocimiento mapuche y occidental en el medio escolar” y la “Categoría Lógica del conocimiento mapuche”, mediante entrevistas y encuestas, en donde contrastaron el conocimiento occidental y conocimiento mapuche presentes en el aula. En la segunda parte de la investigación se buscaba conocer el nivel de trascendencia e importancia de cada una de diferentes variables que construyen la lógica del conocimiento mapuche. Estos resultados permitirán dar indicios de las distancias entre el conocimiento mapuche y el conocimiento escolar occidental.

En este estudio, las entrevistas fueron aplicadas a estudiantes y profesores de las escuelas Mañío Chico, Liceo Jamen Mundel, Colegio Juan Maquehue, Escuela Boyeco y Escuela Roble Huacho y, además, se entrevistó a *kimche* (sabios) provenientes de las zonas aledañas. Todos los establecimientos se encuentran en la Novena Región de la Araucanía de Chile, distribuidos en tres comunas las que son Temuco, Chol Chol y Padre Las Casas.

Respecto a la “Categoría Conocimiento mapuche y occidental en el medio escolar”, los resultados más significativos para este documento, según los registros etnográficos y el análisis cualitativo de los datos, indican que “la lógica del conocimiento escolar que se enseña en la escuela está asociada a la racionalidad de los profesores, producto de la cultura escolar y la formación profesional con ausencia de conocimiento cultural mapuche” (p.23). Así, al preguntar si en la escuela se enseñan conocimientos sobre valores y costumbres no mapuche, en general un 60.9% de estudiantes, padres y kimche, se manifiestan de acuerdo. De esta forma, se constata que la educación escolar sustenta la formación de los y las estudiantes en el conocimiento occidental. Luego, ante la pregunta si los estudiantes presentan dificultades para entender los contenidos que se enseñan en los libros, un 70.4% de los docentes y un 59% de los padres son conscientes de que existe dificultad para entender las materias de los libros. Otro resultado interesante, es ante la pregunta si en la escuela los y las estudiantes pueden hablar mapudungun en clases, en general un 47% de estudiantes, padres y kimche, indican niveles de desacuerdo, mientras que los docentes evitan dar una respuesta clara, mostrándose indiferentes. En este sentido, estudiantes y padres coinciden en un 75% que los profesores no hablan ni enseñan la lengua mapuche en clase. También se mostraron en desacuerdo ante la pregunta si los profesores los dejan conversar en mapudungun en clase. Esto significa, según Torres y Quintriqueo, que los docentes no usan la lengua mapuche en clases, lo que podría estar asociado al desconocimiento de los profesores sobre el mapuzugün y el conocimiento cultural mapuche.

Finalmente, respecto a la valoración del conocimiento escolar por los estudiantes, padres y kimche, ellos coincidieron en que es más objetivo y explicable que el conocimiento mapuche (54,2%). Sin embargo, no se cuenta con una alta valoración positiva, es decir, el conocimiento escolar es considerado como más explicable, pero se observa una alta valoración de desacuerdo principalmente en docentes (48.1%) y los padres y kimche (48.2%). Esto podría indicar una complejidad conceptual y niveles de abstracción del conocimiento escolar, lo que estaría asociado a la dificultad para explicar la realidad. Mientras que, al preguntarse si el conocimiento mapuche es más subjetivo y menos explicable que el conocimiento escolar, en general el 40,6% de estudiantes, docentes, padres y kimche indican niveles de acuerdo. Por lo tanto, un porcentaje de los actores de la investigación considera que el conocimiento mapuche es menos explicable, no alcanzándose valores significativos. Es decir, se reconoce una alta valoración de indiferencia y desacuerdo (59.4%) con respecto al contenido preguntado, lo cual podría indicar que el conocimiento cultural mapuche es explicable en la medida que los sujetos lo conocen. Entonces, según Quintriqueo y Torres, el dominio del mapuzugün es de vital importancia para comprender los procesos de construcción de conocimientos en el medio escolar y comunitario, tal y como anteriormente lo señaló Elisa Loncón.

Por otra parte, respecto a la investigación de “Categoría Lógica del conocimiento mapuche”, se consideraron elementos epistemológicos que son vitales para comprender las características del conocimiento mapuche, los que son:

- La relación directa con el medio natural.
- La trascendencia del conocimiento.
- El contexto del conocimiento.
- La oralidad.
- La complementariedad con el medio.

De esta parte de la investigación, es relevante para este documento extraer parte de los conceptos, de las entrevistas, y el desarrollo de los elementos nombrados recientemente para poder hacer un contraste entre el conocimiento mapuche y el conocimiento escolar, también tomando en cuenta la conversación y entrevista que se mantuvo con Elisa Loncón.

Para los mapuche hay una relación directa con el medio natural, esto implica que cada uno de los elementos de la naturaleza representan fuentes de conocimiento que son utilizadas cotidianamente por el mapuche, como, por ejemplo, el relato de las niñas recién nacidas y las telas de araña vistas anteriormente. En una de las entrevistas presentadas en el estudio, un kimche señala, que los mapuche deben conocer la importancia medicinal que tiene una planta, solo así será capaz de entender lo malo que es cortar plantas y árboles. Los kimche proponen un equilibrio constante con el medio natural para favorecer un buen desarrollo de vida.

La trascendencia del conocimiento se refiere a que en el medio familiar mapuche la lógica de pensamiento se sustenta en un cuerpo de conocimientos que ha mostrado ser eficaz y se mantiene vigente en la memoria individual y social. Hay una importancia en la memoria, en la valoración de los abuelos y abuelas de las comunidades. En entrevistas se menciona la importancia de la “gente antigua” que conoce la Tierra desde antes que ellos y por tanto se valoran sus saberes.

El contexto del conocimiento se refiere a que se construye de acuerdo con las necesidades del entorno y situación en el que viven las personas, como también lo señaló Elisa Loncón, diciendo que ella aprendió matemáticas para poder dedicarse a vender cuando niña y muchos de sus compañeros también. A partir de esto, Quintriqueo y Torres (2012) señalan que “se reconoce que el contexto de vida es un aspecto clave en la configuración del conocimiento, aportando elementos sociales, culturales y espirituales que orientan las prácticas cotidianas de los sujetos” (p.25).

Respecto a la oralidad en el contexto de la familia mapuche, el aprendizaje se fundamenta en el diálogo y la interacción que se genera entre el sujeto que da un consejo y quien es formado. Así, la oralidad permite que el saber enseñado en el pasado se mantenga vigente en la

memoria social de la familia, permitiendo la construcción y enseñanza de los saberes y conocimientos.

Por último, la complementariedad con el medio señala que las personas no establecen sus relaciones con el medio desde una posición de intereses, debido a que mantienen un vínculo basado en el respeto que orienta el actuar de los sujetos. Por ello es por lo que la ausencia del respeto se asocia con el desconocimiento, lo que provoca un quiebre en el equilibrio de la vida. En este último punto, tomar las palabras de Elisa Loncón, son claves, señalando que el conocimiento mapuche es el conocimiento del futuro y el mapuzugün la lengua del futuro.

Concluyendo, la distancia entre el conocimiento mapuche y el conocimiento de la escuela occidental está marcada por una constante discrepancia (Quintriqueo y Cárdenas, 2010 en Quintriqueo y Torres, 2012). Esta discrepancia es a causa del marcado uso del castellano y su profundo origen occidental, fundada en la escritura. En cambio, la lógica del conocimiento mapuche está fundada en la oralidad, en el contexto, para atribuir sentido y significado a la relación de las personas con “las cosas” y lo espiritual (mundo subjetivo e intersubjetivo). Es así como para los estudiantes de orígenes diversos, ya sea mapuche o de otros países, como los inmigrantes afro - descendientes haitianos, la escolarización se traduce en una experiencia que puede ser perturbadora según Torres y Quintriqueo, por un proceso de discontinuidad escolar.

La propuesta didáctica diseñada, pretende disminuir este distanciamiento entre el conocimiento occidental y aspectos del conocimiento mapuche, pues a través del enfoque etnomatemático se relacionan las actividades humanas con actividades matemáticas de manera contextual. Se espera que la incorporación del estudio de la iconografía mapuche aporte en desarrollar clases contextualizadas donde se le dé un sentido y un significado al conocimiento matemático, generando espacios donde se incorporen los diferentes aspectos destacados del conocimiento mapuche mencionados anteriormente; instancias de reflexión donde se cuestione la **trascendencia del conocimiento**, entendiéndolo como una construcción social, generando espacios para comunicar las ideas propias respecto a un tema, atribuyéndole importancia a las habilidades comunicativas y a la **oralidad**, otorgándole **contexto al conocimiento** a través de la enseñanza de las isometrías mediante la iconografía y actividades humanas reales, y finalmente, afianzando las interacciones sociales promoviendo el respeto hacia la diversidad incorporando el elemento de la **complementariedad con el medio**, siendo este la sala de clases.

2.5. MATEMATICA Y GEOMETRIA EN EL CURRÍCULUM CHILENO

Como se presentó en los antecedentes, la enseñanza de la matemática ha sufrido cambios a lo largo del tiempo, en congruencia con los paradigmas vigentes, y Chile no ha sido la excepción en la recepción de estas diferentes maneras de realizar el proceso enseñanza - aprendizaje, lo

que se evidencia en los cambios de planes y programas realizados prácticamente, por cada gobierno de turno.

Actualmente, la asignatura de matemática se divide en 4 ejes transversales, tanto en educación básica como en la media, los cuales son: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar, y donde según el currículum vigente (actualizado el año 2016) tienen su enfoque en la resolución de problemas, con el fin de “que los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas”, (MINEDUC, 2016, p.38), como también desarrollar diferentes niveles de representación (concreto, pictórico, simbólico), de modo que los y las estudiantes puedan utilizar símbolos matemáticos para representar situaciones de la vida cotidiana, dando relevancia al modelamiento matemático. Por otro lado, se pretende desarrollar habilidades comunicativas y argumentativas (expresar con claridad las ideas y desarrollar una actitud reflexiva al debate) y promover el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), considerándose como recurso de apoyo en la comprensión del conocimiento matemático, dando énfasis al proporcionar climas de trabajo adecuados para la participación y colaboración.

Otra de las consideraciones que cabe mencionar respecto al currículum vigente, es que declara que el enfoque de la matemática que guio su elaboración considera que el proceso de aprendizaje “tenga una base en contextos significativos y accesibles para los niños, niñas y jóvenes, favoreciendo la comprensión por sobre el aprendizaje de reglas y mecanismos sin sentido” (MINEDUC, 2016, p. 44) , siendo interesante analizar qué habilidades se pretenden realmente desarrollar, cómo se pretende que éstas sean desarrolladas, y cómo se lleva a cabo en la práctica.

La incorporación de diversos elementos de la cosmovisión mapuche (oralidad, trascendencia y contextualización del conocimiento y complementariedad con el medio) en las escuelas bajo un enfoque etnomatemático, se corresponde con el enfoque propuesto en las actualizaciones curriculares, pues se contextualiza el conocimiento como una creación social y cultural, permitiendo la comprensión del medio y de la vida en sociedad, rompiendo las incongruencias presentes entre el documento escrito (las bases curriculares) y la manera en que efectivamente se realizan las clases (de manera axiomática y demostrativa), como se argumentó en párrafos anteriores.

2.5.1. ENSEÑANDO MATEMÁTICAS PARA EL FUTURO

Durante los últimos años se han experimentado una serie de transformaciones sociales que no han sido precisamente un tema de preocupación en las escuelas; la hiper información, los avances tecnológicos, la incertidumbre respecto a diversas temáticas políticas y económicas, la multiculturalidad y una amplia consideración a la diversidad, corresponden a hechos ajenos a las temáticas y a los modos de enseñar en la mayoría de las aulas (Fundación Chile, 2016).

Así, existe una necesidad de abordar los modelos emergentes de desarrollo económico y social con habilidades, competencias y metodologías de enseñanza acordes al siglo XXI, más que con aquellas del siglo pasado, que se encuentran al servicio del modo industrial de producción. Resulta necesario definir metodologías de enseñanza que puedan, entonces, contribuir en desarrollar habilidades para el siglo XXI, legitimando las diferentes ramas del conocimiento, las concepciones previas de los y las estudiantes, y que estos sean entes activos de su proceso cognitivo de aprendizaje, entendiéndonos como seres sociales influenciados por el contexto sociocultural (Freire, 1996), y donde la etnomatemática, como enfoque y herramienta pedagógica, coincide perfectamente con este fin, pues toma como base el conocimiento sociocultural, aplicado a cada contexto, desarrollando aprendizajes significativos y habilidades propias del conocimiento matemático (Blanco-Álvarez, 2008).

2.5.2. MODELO INTERACTIVO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

Para entender y caracterizar diferentes metodologías de enseñanza, resulta necesario estudiarlas desde un enfoque didáctico. El concepto “didáctica” tiene su origen epistemológico del griego *didaktiké: arte de enseñar*, y si bien a lo largo de la historia diferentes autores han realizado sus propias aportaciones a lo que es el concepto de didáctica, todos ellos coinciden en algunos elementos:

Mallart (2001) realiza un esquema donde expone los elementos en común que presenta el concepto didáctica según diferentes autores, basado en los trabajos de Estebaranz (1994) Sáenz Barrio (1994), Ruiz (1996) y Benedito (1987), tal como Rufino Blanco realizó con el concepto de educación. Se presenta a continuación un cuadro con las aportaciones realizadas por Mallart.

Aspectos	Descriptorios en la definición de Didáctica
Carácter	disciplina subordinada a la Pedagogía, teoría, práctica, ciencia, arte, tecnología
Objeto	proceso de enseñanza-aprendizaje, enseñanza, aprendizaje, instrucción, formación
Contenido	normativa, comunicación, alumnado, profesorado, metodología
Finalidad	formación intelectual, optimización del aprendizaje, integración de la cultura, desarrollo personal

Tabla 2.5: Descriptorios en común del concepto de Didáctica
Fuente: Mallart, 2001. *Didáctica: Concepto, objeto y finalidades*.

Considerando los elementos en común presentes en diversas definiciones de “didáctica”, resulta posible comprender el campo en el cual se desenvuelve: didáctica se relaciona con el proceso enseñanza - aprendizaje para el desarrollo integral del ser humano, y a los procedimientos para que éste sea efectivo.

Debido a los aportes de exponentes como Piaget, Vygotsky y Ausubel en lo que respecta a teorías constructivistas del aprendizaje, la Didáctica ha adquirido el carácter de “ciencia” por diferentes autores. Entre ellos, Escudero (1980) expresa que didáctica es la “Ciencia que tiene

por objeto la organización y orientación de situaciones de enseñanza-aprendizaje de carácter instructivo, tendientes a la formación del individuo en estrecha dependencia de su educación integral" (Jimenez, 2017), Brousseau (1991) que es la "Ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos", Mallart (2001), la "Ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando".

Concebido este carácter de ciencia, desarrolla entonces la didáctica la responsabilidad de entender la enseñanza desde sus elementos constitutivos, brindando apoyo teórico al docente en los procesos de enseñanza-aprendizaje, de modo que sus métodos, técnicas, tecnologías y teorías constituyen una ciencia aplicada a la formación integral para la *aprehensión de la cultura* y el desarrollo individual y social del ser humano (De Jesús y otros, 2007).

Según la Real Academia Española (RAE), método es el modo de hacer con orden, de obrar o proceder en función de un objetivo, definiendo que filosóficamente es el "Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla".

Así, un método de enseñanza es el medio que utiliza la didáctica para orientar el proceso enseñanza-aprendizaje, es decir, la manera en que se conduce el pensamiento y las acciones, con el fin de conseguir un proceso formativo de calidad tanto para la enseñanza como para el aprendizaje.

Dentro de los métodos, se destacan por ejemplo el método inductivo o deductivo (basados en la forma de razonamiento que se desarrollará en clase), el método expositivo, un método basado en la demostración práctica, de trabajo independiente o en el trabajo de grupo; pudiendo ser éstos aplicados de forma combinada.

Respecto a la técnica, corresponde a los procedimientos didácticos que ayudan a desarrollar y organizar una actividad en función de los objetivos propuestos; el "*cómo hacerlo*", por ejemplo: el debate, un estudio de caso, elaboración de resúmenes, lluvia de ideas, análisis de texto, o la resolución de problemas; muy aplicada en el área de matemática.

Así, considerando estas teorías, se han desarrollado diferentes estrategias y metodologías para abordar la enseñanza; secuencias organizadas para conseguir el aprendizaje significativo en los y las estudiantes.

El conjunto de procedimientos a desarrollar, la manera de hacerlo y el pensamiento que lo guía, es lo que se define como metodología de enseñanza, siendo ésta la parte del proceso que permite sistematizar los métodos y las técnicas necesarios para llevarla a cabo (Wohlers, 1999 en Gálvez, 2013).

Estas metodologías suelen estar guiadas por paradigmas educativos (tales como el conductista o el constructivismo) y teorías de aprendizaje (las que han sido desarrolladas en función de

estos paradigmas). Dentro de las corrientes didácticas que surgen con el constructivismo, es decir, donde los y las estudiantes poseen un rol activo y de responsabilidad de su propio proceso de aprendizaje, y donde los profesores adquieren un rol de guía en este proceso, se destaca la teoría del aprendizaje por descubrimiento y la teoría del aprendizaje significativo, ambas estudiadas en profundidad por la comunidad dedicada a estudiar la educación:

La teoría del aprendizaje por descubrimiento fue elaborada por el profesor Jerome Bruner en los años 60, contribuyendo en la reforma educativa de Estados Unidos en la época.

El aprendizaje por descubrimiento consiste en que los y las estudiantes, por sí mismos, deduzcan y descubran formulaciones generales y/o fundamentales del conocimiento a estudiar a partir de problemáticas específicas planteadas por el profesor; es un descubrimiento guiado, pues el profesor debe actuar como guía, en concordancia con el paradigma constructivista, y plantear problemáticas que estimulen el razonamiento inductivo, donde desde ejemplos específicos los y las estudiantes descubren las interacciones entre ellos y las ideas fundamentales, el llamado método de ejemplo-regla (Bruner, 2011).

La teoría del aprendizaje significativo fue elaborada por David Ausubel en la década del 70, considerando que la variable crucial para el aprendizaje significativo es el conocimiento previo de los y las estudiantes, para así, enseñar consecuentemente a ello, de modo que lo que se pretende enseñar, resulte ser significativo para los y las estudiantes. Los más básicos aprendizajes significativos, según Ausubel, son el aprendizaje representacional (el cual tiene relación con el aprendizaje del significado de los símbolos individuales y lo que ellos representan) y el aprendizaje conceptual, relacionado a comprender específicamente un concepto, el cual resulta un caso particular del anterior pues los conceptos también se representan por símbolos individuales (Moreira, 1997). Así, queda en evidencia que las representaciones previas que tengan los y las estudiantes sobre diferentes símbolos y conceptos influyen su proceso de aprendizaje (Ausubel, 1983).

Por otro lado, tras surgir el enfoque psicológico constructivista, es posteriormente desarrollado el enfoque socio constructivista, donde si bien conserva las características del modelo "anterior" en cuanto a participación e involucramiento del estudiante en su proceso de aprendizaje, se agrega una variable que enriquece aún más este proceso, y contribuye en la generación de aprendizajes significativos: el contexto social (Jaramillo, 1996).

El enfoque socio-constructivista, aborda mayoritariamente las ideas de Vygotsky sobre el aprendizaje, el hecho de que se aprende en interacción con el otro, atribuyendo importancia al lenguaje utilizado, a las interacciones entre sujetos y al contexto, tanto social como cultural, en que se desarrolla el proceso. Así, el aprendizaje es entendido bajo la dimensión constructivista (la organización del proceso de enseñanza - aprendizaje es entendida desde la perspectiva del sujeto que aprende, el cual participa de manera activa en este proceso), y bajo una dimensión

social e interactiva (relacionado a interacciones necesarias entre pares para la construcción de los conocimientos, y a incluir elementos contextuales en el proceso). Estas dimensiones son esenciales en el proceso de enseñanza - aprendizaje, y se organizan de manera interactiva para lograr aprendizajes significativos, siendo éste un producto de la organización, elaboración, reflexión y evaluaciones colectivas en instancias de diálogo (Jaramillo, 1996).

Uno de los enfoques emergentes, y surgido en base al enfoque socio - constructivista, pues sienta sus bases en la relevancia al contexto sociocultural, es el abordado en esta propuesta y detallado en incisos anteriores: el enfoque etnomatemático.

En base a lo anteriormente expuesto, se puede inferir que la etnomatemática debe ser implementada mediante estrategias donde los y las estudiantes sean conscientes de su proceso cognitivo, siendo incompatible con un modelo tradicional demostrativo y axiomático donde se suprime el relativismo del conocimiento matemático en base a su cultura y contexto.

Así, el enfoque deseado no puede ser puesto en práctica sin una metodología y diversas técnicas que lo sustenten y le den sentido, siendo necesarias “metodologías activas” (es decir, donde el rol de quien aprende -los y las estudiantes- sea activo, responsables y conscientes de su proceso de aprendizaje), motivando y generando aprendizajes significativos, pues de una manera pasiva no asumen interés con los potenciales aprendizajes, y no existe la intención de involucrarse más allá; no se desarrolla la meta cognición (Rudy, 2006, en Urbina 2012).

Respecto a la asignatura de matemática, se ha desarrollado un modelo interactivo que puede guiar las técnicas que se implementen en la asignatura, con el fin de propiciar espacios de reflexión en torno a las matemáticas y erradicar la postura acrítica que se tiene sobre ella.

Se presentan a continuación los principales cambios de enfoque del conocimiento matemático entre un modelo tradicional y un modelo interactivo:

Cambios de énfasis acerca del conocimiento matemático	
Método tradicional	Método interactivo
Conocimiento que en la práctica aparece como aislado	Conocimiento contextualizado, así como temporal y espacialmente ubicado
De un conocimiento construido (acabado)	Conocimiento por hacer o en construcción
Conocimiento que se entrega o se "deposita" en el estudiante	Conocimiento que es buscado por el que aprende
Conocimiento formal o formalmente expresado	Conocimiento expresado en las palabras del estudiante.
Conocimiento estable en el tiempo	Conocimiento que cambia.
Conocimiento ajeno para el que aprende	Conocimiento apropiable y con significado para el estudiante
De un conocimiento contenido en los textos	Conocimiento contenido en la vida, la cultura y también en los textos.

Conocimiento eminentemente intelectual, o que sólo apela a la razón.		Conocimiento que se expresa en cuatro componentes: valoraciones, comprensiones, sentimientos y acciones
Conocimiento en el que existe una respuesta correcta		Conocimiento abierto, que admite alternativas y que permite evaluar la calidad de una solución
De un conocimiento centrado en una disciplina.		Conocimiento que acepta tensiones desde campos diferentes.

Tabla 2.6: Cambios de énfasis del conocimiento matemático.

Adaptado de Oteiza y Miranda 2002. *El modelo interactivo para el aprendizaje matemático.*

Respecto a los cambios de énfasis sobre el estudiante y su rol:

Cambios de énfasis acerca del estudiante y su rol	
Método tradicional	Método interactivo
Alumno que entiende la lección	Estudiante que produce
Alumno que copia de la pizarra	Estudiante que elabora conocimiento
Alumno que escucha o atiende.	Estudiante que escucha, atiende y busca información.
Alumno que llega a la sala de clases o al liceo a esperar ordenes	Estudiante que planifica su trabajo
Alumno que hace tareas para un profesor	Estudiante que trabaja en lo propio
Alumno que entrega tareas o da pruebas	Estudiante que informa acerca de avances, logros, dificultades y resultados
Alumno que debe ser moldeado según patrones preestablecidos	Estudiante que crece de acuerdo con su naturaleza, en diálogo con otros, incluidos los adultos de la institución escolar y en conocimiento de patrones deseables.
Alumno del que se esperan respuestas	Estudiante que formula preguntas y procedimientos para responderlas.
Alumno que en las evaluaciones repite lo que le enseñaron	Estudiante que informa acerca de sus logros.
Alumno que aprende de los libros	Estudiante que interroga a la naturaleza, la cultura (los libros, por ejemplo) y a la vida misma.
Alumno que aprende contenidos	Estudiante que aprende procesos, control de procesos, expresión de procesos y también contenidos
Alumno que posiblemente confía en su profesor	Estudiante que construye confianza en sí mismo, sobre una base objetiva de esfuerzo, resultados y exposición de su trabajo

Tabla 2.7: Cambios de énfasis del estudiante y su rol

Adaptado de Oteiza y Miranda 2002. *El modelo interactivo para el aprendizaje matemático.*

También se presentan cambios respecto al rol que cumple el docente que guía el proceso de enseñanza – aprendizaje:

Cambios del adulto que guía el proceso (profesor/a)	
Método tradicional	Método interactivo
Docente que es un modelo de conocimiento	Docente que es un modelo de complejidad cognitiva y desarrollo personal.
De un docente que sólo hace clases	Docente que es un jefe de proyectos.
De un docente que dice qué hacer	Docente que formula preguntas
De un docente que sólo explica	Docente que observa con interés el trabajo de sus estudiantes.
De un docente que pide respuestas	Docente que da apoyo y es recurso para sus estudiantes.
De un docente que dicta	Docente que propone alternativas.
De un docente que premia o castiga	Docente que reconoce logros, apoya en las dificultades, alienta la originalidad y estimula la capacidad crítica.
De un profesor que responde correcto o incorrecto	Docente que estimula la metacognición, la comprensión de procesos de pensamiento, la aceptación de sentimientos y apoya la capacidad para expresarse en esas áreas.

Tabla 2.8: Cambios del rol del adulto que guía el proceso
Adaptado de Oteiza y Miranda 2002 *El modelo interactivo para el aprendizaje matemática.*

Otro de los cambios, considerada la situación de enseñanza, con relación a la forma de considerar al curso y al trabajo que realizan, y a los objetivos planteados para las clases:

Respecto a la situación de enseñanza, sus objetivos y el contexto	
Método tradicional	Método interactivo
Situación de enseñanza	Situación de investigación
Clase expositiva	Realización de proyectos.
Situación que busca como resultado notas	Situación que facilita la generación de productos de naturaleza variada.
Un ambiente de sala de clases	Un taller de laboratorio
Situación en que los recursos son el cuaderno, la pizarra y ocasionalmente el texto	Situación donde abundan recursos de aprendizaje, material de enseñanza, libros, computadores, en fin, aquello que facilita el contacto directo del estudiante con el conocimiento
Grupo curso	Equipos de investigación.

Tiempo medido en horas de clases		Tiempo negociado según intereses, planificación y avances.
Situación que prepara exámenes		Situación que permite preparar exposiciones u otras formas de exponer los resultados y productos del trabajo de los jóvenes.

Tabla 2.9: Respetto a la situación de enseñanza, sus objetivos y el contexto
Adaptado de Oteiza y Miranda, 2002. *El modelo interactivo para el aprendizaje matemático.*

Por último, existen cambios entre un modelo tradicional y el interactivo en cuanto a las consideraciones a tener para la evaluación de los aprendizajes:

Respetto a la evaluación de los aprendizajes	
Método tradicional	Método interactivo
Comprobar lo que los alumnos no saben.	Comprobar qué sabe el/la estudiante y cómo razonan acerca de los temas en estudio
Considerar la evaluación simplemente como un recuento de respuestas acertadas de un examen con el único propósito de poner una nota.	Considerar la evaluación como parte integrante de la docencia
Centrarse en un gran número de destrezas específicas y aisladas organizadas como contenido / actuación.	Centrarse en una gama amplia de tareas y adoptar una visión global del objeto de estudio
Utilizar ejercicios o enunciados que sólo requieren de pocas destrezas.	Utilizar técnicas y fuentes múltiples de evaluación, incluyendo informes escritos y orales, exposiciones, archivadores y la demostración de las capacidades aprendidas (desempeño).
Utilizar exclusivamente pruebas escritas o normalizadas.	Utilizar en la evaluación diversos materiales, según la especialidad, incluidos calculadoras y computadores.
Utilizar ejercicios o preguntas que muestren los contenidos descontextualizados	Determinar el valor de un programa recolectando información sobre resultados, currículo, materiales, relación pedagógica y docencia.
Excluir de la evaluación materiales, situaciones, calculadoras y computadores.	Facilitar que el alumno reconozca sus fortalezas.
Valorar el programa basándose exclusivamente en la puntuación de exámenes.	Desarrollar un lenguaje que permita expresar formas de razonar y sentimientos.

Tabla 2.10: Cambios en las consideraciones para la evaluación de los aprendizajes
Adaptado de Oteiza y Miranda 2002. *El modelo interactivo para el aprendizaje matemático.*

Se espera que, basando la enseñanza de las matemáticas en un modelo interactivo, se propicien espacios de reflexión en el aula, que los y las estudiantes sean agentes activos y conscientes de su proceso cognitivo, y que el o la docente pueda guiar este proceso a fin de

generar aprendizajes significativos. Este modelo presenta un quiebre en los roles de docente y estudiantes con respecto al método tradicional, y abre la posibilidad de desarrollar, con la enseñanza de la geometría, diferentes competencias científicas que permitan interpretar y describir el mundo, aportando a fomentar la capacidad de asombro y al análisis de lo visual, considerando así, el uso de la geometría aplicada; volver concreto las teorías abstractas, dirigiendo la enseñanza a la observación del espacio (Villela, 2001). Esta observación del espacio, del entorno, del contexto, añade la dimensión sociocultural y contextual al proceso de enseñanza. Al volver concreto teorías abstractas, evidenciamos las prácticas matemáticas en la cotidianidad, pudiendo realizar un estudio de la actividad matemática presente en las culturas, tal y como lo hace el enfoque etnomatemático y se pretende realizar en este seminario, estudiando las isometrías contextualizando con la riqueza geométrica presente en la iconografía textil mapuche.

2.3.3. HABILIDADES PARA EL SIGLO XXI

La necesidad incorporar nuevas habilidades pertinentes para este siglo ha resultado ser un tema recurrente, comenzando a generar cambios en las escuelas y sistemas educativos de diferentes partes del mundo tras coincidir grupos de profesores, investigadores, instituciones de la Administración, políticos, trabajadores, etc., en que las escuelas deben buscar soluciones para adaptarse para una formación más pertinente para los y las estudiantes del siglo XXI.

Así, las Habilidades para el siglo XXI (HS21) corresponden a “aquellas habilidades y competencias necesarias para que los jóvenes sean trabajadores efectivos y ciudadanos de la sociedad del conocimiento del siglo XXI” (OCDE, 2010); la amplia adhesión de los grupos respecto a la incorporación de éstas habilidades radica en que, en un mundo donde los contenidos quedan rápidamente obsoletos, se deben establecer como objetivos de aprendizaje el resolver problemas, trabajar y vivir con otros, para hacerlo en el futuro de una manera más efectiva (Fundación Chile, 2016).

Aunque aún no hay acuerdo acerca de un conjunto específico de habilidades y competencias, así como tampoco respecto de su definición, la OCDE, agrupa estas habilidades bajo 3 dimensiones: Uso interactivo de las herramientas, Interacción entre grupos heterogéneos y actuar de forma autónoma, atribuyendo importancia al uso de las TIC, al rol social y a la capacidad de los individuos para pensar por sí mismos, asumiendo la responsabilidad respecto a su aprendizaje y sus acciones. Por otro lado, aun se realizan estudios respecto a obtener información acerca de las pautas y las normas que regulan la enseñanza en los países y regiones que definen estas habilidades, como también a la manera de evaluar, pues resultan, por naturaleza, difíciles según el estándar.

La propuesta de habilidades para el siglo XXI considera un concepto de alfabetización innovador relacionado con la capacidad de los y las estudiantes para aplicar su conocimiento y

habilidades en diversas áreas disciplinarias, y al hecho de analizar, razonar y comunicar efectivamente al resolver e interpretar problemas y distintas situaciones, dando también relevancia al aprendizaje a lo largo de la vida, exigiendo que se informe sobre la propia motivación para aprender, las creencias sobre sí mismos y las estrategias de aprendizaje (OCDE, 2010)

Se presenta a continuación un cuadro que recoge las agrupaciones de HS21 en cuatro dimensiones, dadas por Assessment and Teaching Century 21 Skills (ATC21S):

<p>1. Maneras para pensar</p> <p>Creatividad: competencia en la que los estudiantes llevan a cabo procesos que demuestran pensamiento original, y otros medios, en vez de centrar nuestros esfuerzos en la retención de información, debemos ocupar el máximo de nuestras capacidades en saber qué hacer con esta información. construyen conocimiento y desarrollan productos y procesos novedosos.</p> <p>Pensamiento crítico: competencia en la que los estudiantes llevan a cabo un proceso disciplinado activo e intelectualmente hábil para la conceptualización, aplicación, análisis, síntesis y/o evaluación, de información recolectada o generada, como guía para la creencia y la acción.</p> <p>Metacognición: capacidad de las personas para reflexionar sobre la forma en que aprenden y los procesos cognitivos que involucra</p>
<p>2. Maneras para trabajar</p> <p>Colaboración: capacidad de involucrarse en tareas que requieren y reconocen los roles individuales de cada miembro del grupo y dependen del conocimiento de cada uno de ellos para lograr un trabajo cooperativo eficaz.</p> <p>Comunicación: capacidad de articular ideas de manera efectiva usando habilidades comunicativas, orales, escritas y verbales para distintos propósitos según el contexto.</p>
<p>3. Herramientas para trabajar</p> <p>Alfabetización en información: competencia que articula distintos procesos para resolver problemas informativos, como definir, buscar, evaluar, sintetizar o crear un nuevo producto.</p> <p>Alfabetización en tecnologías digitales de información: competencias requeridas para desempeñarse en el uso de herramientas para crear, comunicarse y trabajar en contextos digitales.</p>
<p>4. Maneras para vivir en el mundo</p> <p>Ciudadanía: competencia que requiere que el alumno comprenda los valores democráticos que determinan la convivencia entre ciudadanos, incluyendo organización social, derechos, roles y responsabilidades de los ciudadanos y de las instituciones que los dirigen.</p> <p>Responsabilidad personal y social: requiere que el alumno conozca y adopte los códigos de conducta aceptados para vivir armónicamente en sociedad y la capacidad para comunicarse constructivamente. Vida y carrera: habilidades que permiten que el estudiante pueda adaptarse a los cambios en el mundo y gestione la construcción del modo de vida que quiere para su futuro</p>

Tabla 2.11: Competencias y Habilidades para el Siglo XXI
 Adaptado de Fundación Chile, 2016, disponible en: <https://fch.cl/wp-content/uploads/2016/12/Ficha-HS21-lista-1.pdf>)

Según el estudio de Habilidades y competencias del siglo XXI para los aprendices del nuevo milenio en los países de la OCDE, realizado por la misma institución el año 2016, se establece que la mayoría de los países integran el desarrollo de las HS21 de manera transversal, es decir a través de las diferentes asignaturas del currículo.

En Chile, si bien en el currículum actual no explicita en términos de “Habilidades para el siglo XXI”, sí se han realizado actualizaciones que buscan justamente desarrollar habilidades con aquellas características, introducidas como Objetivos Transversales (OT) (MINEDUC, 2011), los cuales hacen referencia al desarrollo personal, intelectual, moral y social de los y las estudiantes, también relacionados con el ámbito del conocimiento y la cultura, según establece la actual Ley General de Educación (LGE).

Los OT se agrupan en cinco ejes:

1) Crecimiento y autoafirmación personal: Con relación a que los y las estudiantes afirmen y conformen su identidad personal, desarrollando el conocimiento sobre sí mismos, su propia afectividad y equilibrio emocional.

2) Desarrollo del pensamiento: Desarrollar habilidades relacionadas con la generación de ideas, pensamiento crítico y creativo.

3) Formación ética: Desarrollar la voluntad de autorregular la conducta, desarrollar la autonomía en función de una conciencia éticamente formada respecto a la verdad, la justicia, el bien común, el espíritu de servicio y el respeto por el otro.

4) La persona y su entorno: Referente a mejoramiento de la interacción personal, familiar, social y cívica.

5) Tecnologías de la información y comunicación: Potenciar el aprendizaje y el desarrollo personal a través de la capacidad de utilizar tecnologías de la información y la comunicación (TICs) para acceder, analizar y comunicar información, como también para participar en diversos tipos de redes.

Finalmente, al comparar estos objetivos transversales (que debieran ser incorporados en cada asignatura, que pretenden estar tan relacionados con la comunidad y la reafirmación de identidad) con los apartados anteriores que hacen referencia al currículum y a los programas de estudio de la asignatura de matemática, se evidencia que no son realmente abordados, pues estos últimos velan por la individualidad del proceso cognitivo y por la formalidad del contenido.

Existe un desafío para abordar las problemáticas sociales y, por ende, educativas que presenta este siglo. Parecen ser múltiples dimensiones que se deben considerar para enriquecer el proceso educativo y la vida en sociedad. Es por ello que esta propuesta pretende contribuir en una apuesta interdisciplinar, donde se incorporen diferentes conocimientos, pues independiente de la asignatura, el o la docente es quien debe guiar a sus estudiantes, desde sus conocimientos previos, a pensarse la sociedad en la que desarrollan su proceso de aprendizaje, mientras que los y las aprendices construyen su conocimiento desde su relación entre pares en el aula, pasando de ser seres sociales pasivos, a seres sociales activos, críticos y pensantes (Freire, 1996).

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

Se presentan a continuación los aspectos metodológicos que guían la propuesta didáctica, basada en una perspectiva etnomatemática justificada en el capítulo 2: Marco teórico, enunciando por un lado una descripción general del diseño y los contenidos a abordar, describiendo las etapas de la secuencia didáctica propuesta y también su evaluación. Finalmente, se describe también la etapa de validación de la propuesta realizada por diferentes expertos y expertas del área educacional; un grupo de profesores de matemática y un profesor de historia con conocimientos de la etnia mapuche.

3.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica a presentar está diseñada para ser implementada en octavo año básico, en la asignatura de Matemática, abordando la unidad de "Geometría", según las actuales bases curriculares y se sustenta bajo una perspectiva etnomatemática; se evidencia el vínculo de la actividad humana con el conocimiento matemático, validando el saber de diferentes culturas (en este caso, mapuche) guiando el proceso de aprendizaje desde una base contextual, como es el estudio del significado y construcción de símbolos iconográficos, los cuales constituyen una forma de comunicación y lenguaje en las culturas ágrafas. Por otro lado, se toma en consideración también el desarrollo de habilidades para el siglo XXI y que guardan relación con aspectos del conocimiento mapuche tales como la trascendencia del conocimiento, su contexto, la oralidad, como se explica en el capítulo anterior, esperando generar espacios de diálogo donde se desarrollen habilidades comunicativas, tanto de rigurosidades matemáticas (al explicar el procedimiento realizado) como para comunicar opiniones y diferentes perspectivas respecto a un tema, como es la noción de entender el conocimiento como una construcción social. El objetivo de aprendizaje a abordar corresponde al OA14: "Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a las simetrías de polígonos y poliedros, y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte" (MINEDUC, 2016), ajustándose a los Indicadores de evaluación del Programa de Estudios que entró en vigencia el año 2016, expuestos a continuación:

	Indicadores de Evaluación
OA14	Realizan diferentes combinaciones de traslaciones, reflexiones y rotaciones y reconocen las propiedades.
	Realizan teselados con figuras 2D, según los patrones dados.
	Identifican patrones de teselados dados, descubriendo experimentalmente las propiedades de la congruencia; es decir, la conservación de la medida de segmentos y de ángulos.
	Reconocen transformaciones isométricas dadas en el plano, identificando puntos importantes, como vector de traslación, centro de rotación, ángulo de rotación, eje o punto de reflexión.

Tabla 3.1.: Indicadores de Evaluación del OA14
Adaptado de MINEDUC, 2016, *Programa de Estudio Octavo Básico*.

Estos indicadores corresponden a los relacionados con el contenido de isometrías, pues son 6 los “conocimientos” (como se indica en el programa) a abordar en geometría de octavo año básico: área de superficies y volumen de prismas rectos con diferentes bases, área de superficies y volumen de cilindros, teorema de Pitágoras, la posición y el movimiento de figuras 2D, movimientos de figuras 2D y composición de rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, siendo este último el que guarda relación con la propuesta didáctica diseñada.

Por otro lado, la unidad de geometría tiene, por programa, destinadas 48 horas semestrales, de las cuales la propuesta considera 10 horas pedagógicas para su implementación, distribuidas en 3 guías de trabajo de construcción de isometrías, una rúbrica de evaluación (formativa) clase a clase, y una rúbrica de evaluación grupal e individual (sumativa) del trabajo final.

Como orientación general, y en concordancia con el enfoque utilizado, se recomienda que la distribución de la sala de clases sea de manera que los y las estudiantes trabajen en grupo (con los bancos distribuidos de esa manera) a lo largo de toda la unidad, y por sobre todo propiciar un ambiente de discusión y de compartir ideas en comunidad, fomentando la oralidad y el trabajo colaborativo, pues los objetivos de esta propuesta, si bien son el cumplimiento de los aprendizajes esperados propuestos por el programa de estudio, también incluye el desarrollo de habilidades comunicativas y sociales propias para el siglo XXI, como es el hecho de analizar, razonar y comunicar efectivamente al resolver e interpretar problemas y distintas situaciones. Estas habilidades pretenden desarrollarse a través de generar espacios de reflexión en el aula donde se valore el conocimiento de diversas culturas, incorporando elementos de la lógica del conocimiento mapuche que se fundamenta en la oralidad y el conocimiento contextual, este último íntimamente relacionado al enfoque utilizado: la etnomatemática, atribuyendo sentido y significado a la relación de las personas con diversos elementos; en este caso, a íconos de la textilería mapuche y la geometría.

Respecto a las evaluaciones, se han diseñado dos rúbricas (Apéndice 3). Una corresponde a ser utilizada clase a clase (hasta la clase 4 de 5), destinada a que el o la docente evalúe el desempeño y la participación del grupo curso bajo esta modalidad de trabajo, es decir, permitiéndole detectar y tomar decisiones pedagógicas respecto a si la metodología implementada permite el cumplimiento de los logros esperados (como el fomentar la oralidad a través del respeto y el trabajo en equipo) a través del cumplimiento de los indicadores, y otra para evaluar la última clase, donde cada grupo realiza una presentación de la actividad solicitada (composición de un ícono que a través de isometrías represente a su grupo de trabajo, desarrollando un sentido de pertenencia en el equipo). El promedio de ambas calificaciones otorga una calificación final. Cabe mencionar que ambas rúbricas pretenden evaluar tanto el desempeño de habilidades para el siglo XXI como los procedimientos y

razonamientos matemáticos realizados; de esta manera, cada indicador presenta relación con alguno de estos elementos.

Bajo el enfoque de etnomatemática, se espera conseguir ciertos logros, los cuales se relacionan con el saber histórico del conocimiento matemático, la diversidad, la contextualización del mismo y las interacciones, argumentación y comunicación entre estudiantes y docentes, como también, al potencial interdisciplinario que expresa la propuesta para asignaturas como historia, arte, tecnología, orientación, entre otros. Para el último punto se toman en cuenta tres asignaturas con las que denota cohesión y la posibilidad de expandir este conocimiento interdisciplinar:

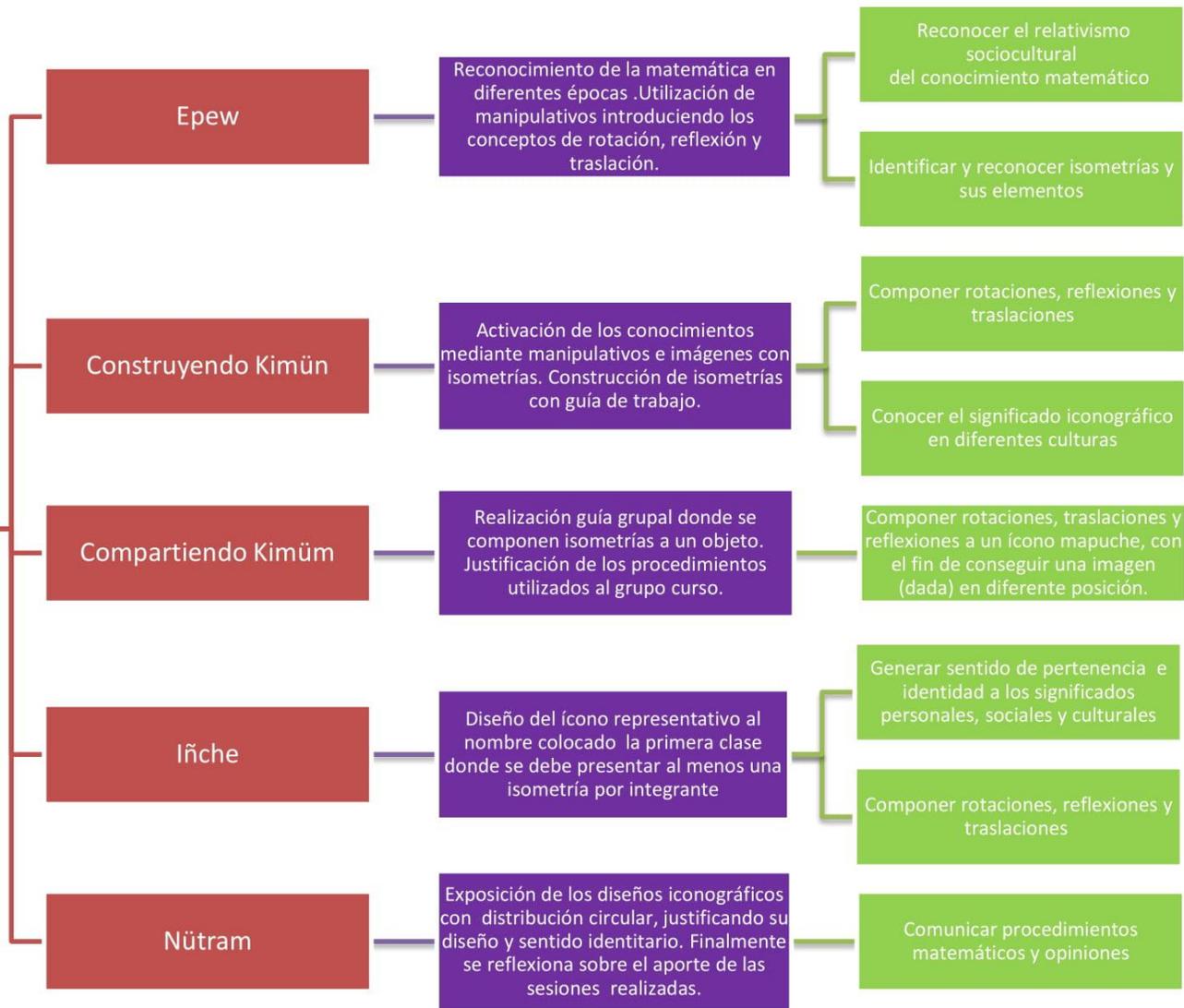
En historia, en la Unidad 1: Reforma y el choque de dos mundos, está presente el OA 5: “Argumentar por qué la llegada de los europeos a América implicó un enfrentamiento entre culturas, considerando aspectos como la profundidad de las diferencias culturales, la magnitud del escenario natural americano, y la desarticulación de la cosmovisión de las sociedades indígenas”. En la Unidad 2, está presente el OA 12: “Analizar y evaluar las formas de convivencia y los tipos de conflicto que surgen entre españoles, mestizos y mapuches como resultado del fracaso de la conquista de Arauco, y relacionar con el consiguiente desarrollo de una sociedad de frontera durante la Colonia en Chile”. En la asignatura de orientación, existen la Unidad 3: OA 5 Analizar sus relaciones, presenciales o virtuales a través de las redes sociales, y las de su entorno inmediato atendiendo a los derechos de las personas involucradas considerando los principios de igualdad, dignidad, inclusión y no discriminación, identificando circunstancias en las que no se ha actuado conforme a estos derechos, y reconociendo el impacto en el bienestar de quienes se vean involucrados, y la Unidad 4: OA 7 Reconocer intereses, inquietudes, problemas o necesidades compartidas con su grupo de pertenencia, ya sea dentro del curso u otros espacios de participación, y colaborar para alcanzar metas comunes valorando el trabajo en equipo y los aportes de cada uno de sus miembros. Por otra parte, en artes visuales Unidad 1: OA 1 Crear trabajos visuales basados en la apreciación y el análisis de manifestaciones estéticas referidas a la relación entre personas, naturaleza y medioambiente, en diferentes contextos.

Con esto, es posible visualizar que los logros esperados en esta propuesta pueden ser abordados también en diferentes asignaturas, siendo una propuesta que puede ser adaptada interdisciplinariamente bajo una perspectiva crítica y reflexiva respecto a la diversidad, al trabajo colaborativo y a la identidad de diferentes culturas como el pueblo mapuche.

3.2. DETALLE DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

Se presenta a continuación un esquema resumen, que expone una breve descripción de las clases diseñadas, y los logros esperados de la propuesta bajo el enfoque etnomatemático detallado con anterioridad:

Propuesta didáctica de enseñanza-aprendizaje de isometrías a través de la iconografía textil mapuche desde el enfoque etnomatemático



Se recalca el potencial interdisciplinario que logra expresar la propuesta para asignaturas como historia, artes, tecnología, orientación, filosofía entre otras.

Simbología	
	Logros Obtenidos
	Actividad Genérica
	Objetivos de aprendizaje
	Clase Impartida

Se describen a continuación las cinco clases diseñadas (consideradas de dos horas pedagógicas cada una), incluyendo el objetivo específico, el material didáctico utilizado, y una descripción de las actividades a diseñar y el enfoque esperado. Cabe mencionar, que las guías y las planificaciones se encuentran disponibles además en formato de Código QR, con el fin de facilitar el acceso a ellas mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, quedando a juicio de cada docente su utilización de acuerdo con su contexto.

3.2.1. CLASE 1: EPEW (CUENTOS O RELATOS)

Esta clase resulta crucial para conversar con los y las estudiantes respecto al enfoque a utilizar. Tiene como objetivo que los y las estudiantes:

- Reconozcan el conocimiento matemático como una construcción social y dinámica mediante el intercambio de opiniones.
- Identifiquen isometrías presentes en la iconografía mapuche

Los materiales didácticos elaborados para esta clase son:

- Apéndice 2.1: "Curiosidades matemáticas"; un listado de diez "curiosidades", relatos o situaciones, donde a cada grupo de trabajo se le entrega una, con sus respectivas preguntas que guían un intercambio de opinión entre integrantes del grupo, para después ser llevada al grupo curso en su totalidad.
- Manipulativos tangibles (presentados en formato video, en Apéndice 5.1, Apéndice 5.2 y Apéndice 5.3) donde se aprecia y se crean íconos mapuche a través de las 3 isometrías a estudiar: traslación, reflexión y rotación.
- Manual para elaborar los manipulativos diseñados (Apéndice 5.4), encontrando en él las instrucciones pertinentes para su confección.

Las actividades a realizar, consiste en primeramente dar las instrucciones, contenidos y objetivos de la clase y las posteriores. Se forman los grupos de trabajo (los que se mantendrán durante las clases siguientes), acuerdan un nombre que los represente (necesario para la evaluación final del contenido) y discuten sobre diversas "Curiosidades matemáticas" (Apéndice 1), esperando romper la noción de que el conocimiento está acabado, y generar una postura crítica y reflexiva respecto al dinamismo del conocimiento y al entendimiento de éste como una construcción social. Las orientaciones respecto a cada curiosidad y orientaciones para guiar la discusión se encuentran en las indicaciones al docente.

Posteriormente, se utilizan tres manipulativos para relacionar y evidenciar las isometrías presentes en la iconografía mapuche, realizando una lluvia de ideas respecto a qué conocimiento matemático se evidencia en él, guiando hacia el concepto de isometrías (reflexión, traslación y rotación), y explicitando cómo cada una de ellas está presente en los manipulativos (en colaboración de los y las estudiantes).

Finalmente, se deja la tarea de ver videos explicativos de isometrías, donde deben responder qué son, en qué se diferencian, y qué elementos caracteriza a cada una, preparándolos cognitivamente para la siguiente clase.

3.2.2. CLASE 2: CONSTRUYENDO KIMÜN (CONSTRUYENDO CONOCIMIENTO)

En esta clase se ejercita la construcción de isometrías, como también se reflexiona sobre la importancia de la iconografía en diferentes culturas. Tiene como objetivo que los y las estudiantes:

- Apliquen isometrías a un objeto plano, formando iconos de la cultura mapuche y precolombinas.
- Generen espacios de conversación respecto al significado de diferentes íconos.

El material didáctico diseñado para esta clase, consiste en 3 guías (una para cada isometría a estudiar) y donde a cada grupo se le repartirá solo una, pues compartirán sus procedimientos y resultados con el grupo curso:

- Apéndice 2.2.: “Construyendo Kimün” (documento que incluye las 3 guías de trabajo)

Al inicio, se activan los conocimientos, tanto con los manipulativos (nuevamente), y también aludiendo a los videos que debían ver, formalizando el contenido de isometrías a través de las preguntas dejadas en la clase anterior, como también dando ejemplos cotidianos¹⁰. Con apoyo del apéndice 2.2. Guía "Construyendo Kimün" (donde cada grupo tendrá una diferente, algunos grupos trabajarán traslación, otros reflexión y otros rotación), estudiantes realizan individualmente cada una de las isometrías utilizando lenguaje y procedimientos matemáticos para formar íconos del pueblo mapuche. Uno de los objetivos es reflexionar respecto a la representación de cada ícono, otorgándole la relevancia pertinente a los símbolos iconográficos, pues es donde diferentes pueblos prehispánicos han manifestado sus aspectos religiosos, sociales y políticos a través de diseños que trascienden hacia otras generaciones, comunicando su cultura e identidad.

En la guía de “Traslación”, se forma el ícono de la chakana (o cruz del sur), que si bien no es exclusivo de la cultura mapuche, representa el puente o escalera que permitía al hombre andino mantener latente su unión al cosmos.

¹⁰Traslación: Abrir un cajón, la apertura de puertas de un ascensor o del metro, el movimiento de una cinta transportadora. Rotación: Movimiento de las articulaciones, abrir una puerta o ventana con bisagra, levantar mancuernas con un brazo, rotación de planetas en torno a su eje. Reflexión: Reflejo en el espejo plano, una posible simetría de la cara o del cuerpo humano. En indicaciones al docente.

En la guía de "Rotaciones", forman el ícono *Wüñulfe* ("portador del amanecer" o "lucero del alba"), una estrella de ocho puntas, a través de rotar un patrón (un cuarto del ícono). Este fue utilizado en el logo de la Copa América CHILE 2015.

Por último, la guía de "Reflexión", está diseñada para que reflejen la mitad de un ícono simétrico, formando el ícono en su totalidad, el cual representa una araña. En la cultura mapuche, las mujeres que tejen fueron instruidas por otra maestra tejedora o *düwekafe*, y antes de enseñarles a tejer, llevan a las niñas pequeñas, futuras tejedoras, a las profundidades de los bosques, y allí, entre los árboles encuentran la tela de araña, en la cual posan las manos de la *pichiche* (gente pequeña) para que así sea una buena tejedora. Tras un proceso de aprendizaje general, se les enseña finalmente a tejer (Loyola, 2015).

Cada guía cuenta con una breve descripción y significado del ícono a construir.

Tras dejar un tiempo considerable para que terminen la actividad, un o una integrante de cada grupo explicará el procedimiento realizado, permitiendo desarrollar habilidades oratorias en los y las estudiantes, y siendo guiados por el o la docente a cargo, tanto en la formalización del conocimiento, como para guiar una discusión en torno a reflexionar sobre la significancia de los íconos para las diferentes culturas (las decoraciones navideñas, los íconos utilizados en fiestas patrias, o el actual uso de emojis) atribuyéndole importancia a las representaciones simbólicas, y el entendimiento de que éstas representan también parte de la identidad y del conocimiento de una cultura.

3.2.3. CLASE 3: COMPARTIENDO KIMÜN (COMPARTIENDO CONOCIMIENTO)

Nuevamente, en esta clase se ejercita la construcción de isometrías, siendo necesario también guiar una discusión de curso respecto al significado de los diferentes íconos.

El objetivo para esta clase, es que los y las estudiantes:

- Compongán rotaciones, traslaciones y reflexiones a un ícono mapuche, con el fin de conseguir una imagen (dada) en diferente posición.

El material didáctico diseñado, consiste en cinco guías (una para cada grupo), donde aparece un ícono mapuche (con una breve descripción de su significado) ubicado en un plano cartesiano, al cual se le debe aplicar diferentes transformaciones isométricas, con el objetivo de conseguir el ícono ubicado en otra posición y orientación dentro del plano:

- Apéndice 2.3: Guía "Compartiendo Kimün" (contiene las cinco guías)

Por otro lado, el desarrollo de la guía se debe realizar en una hoja de block grande (N° 99¼) con el fin de explicar los procedimientos matemáticos realizados como las reflexiones respecto a los íconos al grupo curso. Igual que en la clase anterior, se le atribuye importancia a la comunicación por parte de los y las estudiantes al momento de dar a conocer sus ideas.

Respecto a los íconos utilizados, se repite la *wüñulfe* (estrella de ocho puntas que representa uno de los dioses mayores, quien ayuda a la machi al amanecer para realizar rituales terapéuticos, brindando el conocimiento de éste por medio de los sueños) y la *chakana* (representa un nexo, o puente, entre dos regiones, como puede ser la vida espiritual de la terrenal), solo que con otra representación gráfica; se presenta también el *wenumapu* (símbolo del cosmos y del cielo, también representa aspectos de la vida no terrenal), y el *mauñimin* (diseño de cadenilla que representa la unión de todas las comunidades Mapuche). Todos ellos presentes en la iconografía textil mapuche y que pueden ser construidos a través de isometrías.

Se espera que la discusión generada respecto a la iconografía, sea guiada hacia la importancia de los íconos en una sociedad, comunidad o grupo, realizando una síntesis de las apreciaciones de los y las estudiantes, guiando la discusión a que los íconos son corresponsales de las culturas, y una forma de representar la identidad de cada una.

3.2.4. CLASE 4: IÑCHE (YO SOY)

Para esta clase tendremos la formación del ícono representativo del grupo, teniendo como objetivo que los y las estudiantes:

- Apliquen isometrías a las distintas iconografías diseñadas tomando en cuenta los elementos necesarios para generar la figura deseada.
- Generen sentido de pertenencia e identidad a los significados personales, sociales y culturales.

Para la cuarta clase, penúltima clase implementada, se trata el sentido de pertenencia en función de los significados para un grupo social, ya que cada grupo deberá trabajar con un ícono que represente su sentido de pertenencia e identidad basándose en el nombre escogido la primera clase, correspondiendo dicha actividad a la evaluación final. Se debe tener en cuenta que, para cada grupo implicado en la actividad, se tornará el eje central de referencia a las características que los y las mismas estudiantes han atribuido a su experiencia personal y grupal dentro y fuera del aula de clases.

Para esta clase no se cuenta con guía de trabajo, ya que se pretende, por medio de estas indicaciones, que se pueda realizar la actividad esperada, destinando el tiempo para el diseño y elaboración de su ícono representativo. Este ícono deberá plasmar los valores y características que destacarían los y las estudiantes del grupo en colaboración con el docente a cargo, y su oportuna guía.

Para temas de creación del ícono se dará cuenta sobre cómo las tejedoras mapuche (según indica diferente bibliografía) diseñaban un ícono para ser plasmado en su textilería, pues intentan muchas veces representar un objeto de tres dimensiones, en un diseño textil de dos. Se recomienda mencionar ejemplos de esto en nuestra cultura, tal como se mencionó en una

clase anterior el copihue, un ícono típico de fiestas patrias, que representa en dos dimensiones un objeto que en realidad es en tres dimensiones. Las orientaciones a tener en cuenta, es que intenten representar en un objeto el nombre de su grupo. Idealmente, que algún aspecto característico pueda ser representado con figuras geométricas, para que así esas características puedan ser apreciables en una representación plana (por ejemplo, una nariz puede ser un triángulo, y si es algo que resalta, puede hacerse un triángulo de mayor tamaño), otro ejemplo que también puede ser utilizado es el dibujo animado Peppa Pig.

Para esta actividad se contará con toda la clase, a fin de que los y las estudiantes tengan suficiente espacio creativo en la elaboración del ícono, incorporando los correspondientes aspectos isométricos en su realización atribuidos al sentido de pertenencia e identidad que éste posea por parte del grupo. Para ello se deberá tener en cuenta la posterior exposición en la quinta clase, donde se tomarán los aspectos anteriormente mencionados.

3.2.5. CLASE 5: NÜTRAM (ESPACIO DE CONVERSACIÓN)

Se entiende por Nütram al espacio de conversación, en el pueblo mapuche, donde una persona mayor habla de su vida, su cultura y la historia de su pueblo, según afirma Elicura Chihuailaf, reconocido poeta mapuche; el arte de una conversación profunda que apela a la memoria. Por aquella razón se decide titular así a esta última sesión, pues se espera que, formando un círculo, cada grupo exponga su diseño, y se puedan compartir experiencias y apreciaciones de las clases realizadas. El o la docente deberá ser un mediador o guía de la exposición centrada en cada grupo, guiando todo esto por medio de preguntas que permitirán expresar la importancia matemática y el conocimiento exclusivo de pertenencia e identidad que cada grupo atribuya al ícono confeccionado.

Para el desarrollo de la clase se plantean las siguientes preguntas como guías de la presentación.

¿Qué significa para ustedes la matemática, la geometría?

¿Es un conocimiento que esté acabado?

¿Cómo se ha desarrollado el conocimiento?

¿Qué importancia tienen las relaciones humanas y sociales en el desarrollo del conocimiento?

¿Qué importancia tienen los símbolos e íconos en las diferentes culturas?

Se espera que, desarrollando la secuencia, estas preguntas puedan ser abordadas de manera reflexiva y bajo una perspectiva etnomatemática, es decir, con la noción de que el conocimiento, incluso el matemático, es contextual y no es aislado de las actividades humanas.

Se debe tener en cuenta que la exposición que los y las estudiantes realizan será en base a la pauta presentada en los recursos didácticos, con la correcta guía del docente a fin de que expresen los elementos requeridos tanto en el aspecto matemático, como los elementos correspondientes a la etnomatemática, pudiendo entrelazar dichos saberes.

3.3. EVALUACIONES

Respecto a las evaluaciones, se detalla a continuación la manera en que deben ser utilizadas las rúbricas diseñadas y la justificación de las mismas.

3.3.1. EVALUACIÓN CLASE A CLASE

La evaluación clase a clase permite que el o la docente identifique si la dinámica propuesta e implementada está siendo efectiva con el grupo curso. Si bien cada docente debe estar constantemente evaluando de manera sumativa su desempeño individual y el del grupo curso, resulta imperante se realice al trabajar una dinámica diferente, que considera, como esta, estar constantemente trabajando en grupo, con la sala, sillas y mesas distribuidas de aquella manera.

Por otro lado, coherente al enfoque utilizado, también se debe evaluar si los logros esperados y el objetivo de la propuesta están siendo cumplidos, es decir, evaluar si la implementación permite el desarrollo de las habilidades comunicativas, reflexivas y creativas propias del siglo XXI, que se esperan desarrollar, como también la comprensión de los conceptos matemáticos a trabajar, permitiendo la toma de decisiones pedagógicas.

Sin afán de añadir agobiantes responsabilidades adicionales a los y las docentes, la evaluación clase a clase consiste en evaluar qué fracción del total del curso participa activa y responsablemente de las actividades, permitiendo reflexionar respecto a si la dinámica motiva, incluso de manera progresiva, la participación de los y las estudiantes, evidenciando algún cambio con las clases anteriores y las siguientes, permitiendo la detección oportuna de las carencias para así tomar decisiones didácticas surgidas tras la reflexión, ya sea reconsiderar ciertas actividades, intencionar y/o problematizar de diferente manera, cambiar la organización de los grupos, etc. Por otro lado, al ser una evaluación común para todo el curso, todos y todas deben hacerse responsables, autoregulándose y esperando contar con una actitud empática, además de involucrar directamente a cada estudiante con su evaluación y la del resto.

Como promedio de la calificación obtenida clase a clase, se obtiene una nota que será promediada con la evaluación realizada en la última clase, detallada a continuación.

3.3.2. EVALUACIÓN FINAL

La evaluación final, realizada en la última clase, Nütram, da por terminada las clases orientadas al estudio de las isometrías. Consiste en la presentación del ícono trabajado y diseñado en la Clase 4, pretendiendo fomentar el sentido de pertenencia a un grupo, evidenciando la formación de vínculos y valoración del trabajo realizado a lo largo de las clases anteriores.

Así, tal como se detalla en la Clase 5: Nüttram, el grupo curso forma un círculo, permitiendo que todos y todas observen sus rostros, mientras cada grupo expone el ícono diseñado, justificando matemática y emocionalmente su creación.

La rúbrica contiene un apartado para una auto evaluación (donde cada integrante evalúa individualmente su desempeño para cada indicador), y uno para la evaluación realizada por el o la docente al observar la presentación. El puntaje total obtenido otorgará una calificación, la cual deberá ser promediada con la nota obtenida en la Evaluación clase a clase (Apéndice 3.1.), obteniendo así una calificación sumativa. Recordar que la evaluación clase a clase es una nota común para todo el grupo curso.

Finalizando, se reitera que el objetivo de estas evaluaciones es, por un lado, evaluar el desempeño de los y las estudiantes y su relación con el desarrollo de las habilidades para el siglo XXI que se espera desarrollar, es decir, habilidades comunicativas, críticas y reflexivas, como la creatividad y el trabajo en grupo, pues son las relacionadas a los aspectos que caracterizan al conocimiento Mapuche planteadas por Torres y Quintriqueo, 2012, como también evidenciar el aprendizaje de los elementos geométrico-matemáticos estudiados, por lo que cada indicador presenta relación con alguno de estos elementos. Por otro lado, también es una herramienta para que docentes reflexionen respecto a su práctica pedagógica, permitiéndoles detectar qué aspectos presentan como bajos (particularmente, su grupo), facilitando la toma de decisiones y ejecutando las prácticas necesarias para resolverlo de manera contextual, pues una solución para un grupo en particular no podría afirmarse como exitosa para otro grupo, bajo otro contexto.

3.4. VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

El proceso de validación es la instancia para evaluar el diseño de la propuesta didáctica, a través de opiniones, críticas y apreciaciones de expertos del área matemática y etnográfica, con el objetivo de enriquecer, mejorar y adaptar los recursos propuestos, a fin de que sea factible una posible implementación.

El proceso de validación consiste en un cuestionario online de escala tipo Likert de 4 niveles (1: "Totalmente en desacuerdo", 2: "En desacuerdo", 4: "De acuerdo", 5: "Totalmente de acuerdo"), respecto a diferentes indicadores (evaluando una coherencia entre los objetivos de la propuesta en general, los objetivos de aprendizaje y las actividades diseñadas, como también la adecuación del material para un curso de octavo año básico), y donde puedan además registrar comentarios que consideren pertinentes a fin de enriquecer la propuesta didáctica.

Se solicitó a seis profesionales del área educacional evaluar la calidad y viabilidad de los materiales didácticos diseñados para docentes y estudiantes, siendo cinco docentes de matemática, con distintos años de experiencia en aula (desde iniciantes con dos años, a más de

30 años de experiencia, con el fin de tener mayor diversidad de visiones), y que incluyen experiencia en octavo básico y con el contenido de isometrías, y un profesor de historia, con experiencia en aula en Wallmapu (Región de la Araucanía) y que cuenta con una riqueza de conocimientos de la etnia mapuche.

3.4.1. EQUIPO DE EXPERTOS Y EXPERTAS

Se describe a continuación un breve perfil académico y profesional de quienes componen el equipo de validación.

Experto 1: Cristian Muñoz Jeldres

Profesor de educación media en Matemáticas, y actualmente estudiante de Magíster en Didáctica de la Matemática, con tres años y medio de experiencia en establecimientos de dependencia particular subvencionada, actualmente trabajando como profesor de Geometría en el Colegio Monte de Asís (Puente Alto).

Experto 2: Pablo González López

Licenciado en Matemáticas, estudiante de Magíster en Matemáticas y actualmente docente de educación superior en la Universidad Adolfo Ibañez, con experiencia de dos años como profesor de matemática en establecimientos de dependencia particular subvencionada.

Experto 3: Tomás Gaete Crespo

Profesor en Matemática y Estadística, con 39 años de experiencia en establecimientos de dependencia particular y particular subvencionado. Actualmente se desarrolla como profesor en el Colegio Carmen teresiano de la Reina.

Experto 4: Bryan Morales Prado

Licenciado en Ciencias Exactas y Profesor de educación media en Física y Matemática, con dos años de experiencia como docente de matemáticas en liceo de varones municipal (siendo jefe de dicho departamento), actualmente profesor de matemática del establecimiento de niñas Colegio Divina Pastora (Ñuñoa).

Experta 5: Soledad Cisternas Chocano

Profesora de Estado en Matemática y Estadística, con más de 43 años de experiencia pedagógica en aula, además de cuenta con un Postítulo de Orientadora Vocacional. Actualmente desempeña como profesora de matemáticas en Colegio Carmen Teresiano de la Reina, profesora jefe, y orientadora vocacional enseñanza media.

Experto 6: Pedro Canales Tapia

Profesor de Historia y Geografía con 21 años de experiencia pedagógica en aula. Desde el año 1997 hasta el 2005 se desempeñó como profesor en escuelas de Nueva Imperial, Carahue y Temuco, en contacto directo con estudiantes y comunidades Mapuche. Actualmente es profesor universitario, siendo parte del plantel de la Universidad de Santiago de Chile.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS

En este capítulo se presenta el resumen y análisis de los resultados del proceso de evaluación de la propuesta didáctica realizada por los expertos y expertas del ámbito educacional presentados en el apartado anterior, a través de una encuesta en escala Likert del 1 al 4, donde 1 representa “Totalmente en desacuerdo”, y 4 “Totalmente de acuerdo”.

Los resultados se presentarán a modo de síntesis sobre las 3 dimensiones consultadas (relación de la propuesta con el enfoque etnomatemático, relación con las habilidades y logros esperados, y finalmente respecto a la redacción de los materiales y la factibilidad de implementación) con sus respectivos indicadores, así como también los comentarios expresados por expertos y expertas que participaron del proceso de validación y que permitieron perfeccionar el material confeccionado para la propuesta.

El detalle de las encuestas puede ser consultado en el Apéndice 6.

4.1. RELACIÓN DE LA PROPUESTA CON EL ENFOQUE ETNOMATEMÁTICO

El objetivo de este apartado es evaluar la concordancia y respaldo del enfoque utilizado en la propuesta didáctica.

Se presenta a continuación una tabla con el valor en escala Likert asociado a cada indicador por parte del equipo de expertos y expertas.

Indicador	Experto/a						Promedio
	1	2	3	4	5	6	
Las actividades propuestas están alineadas con el enfoque etnomatemático.	4	4	4	4	4	4	4
El rol del docente cumple con el enfoque de etnomatemática.	4	4	4	4	4	4	4
El material didáctico es coherente con el enfoque de etnomatemática.	4	4	4	4	4	4	4
Las evaluaciones están orientadas bajo un enfoque etnomatemático.	4	4	4	4	4	4	4
La propuesta permite ser abordada interdisciplinariamente	4	4	3	4	4	4	3,8

Tabla 4.1: “Resultados respecto a la relación entre la propuesta con el enfoque etnomatemático”
Elaboración propia a partir de los resultados de la encuesta de validación.

En base a los resultados expuestos, es posible apreciar que para el equipo de validadores, la propuesta (las actividades, materiales y evaluaciones diseñadas, así como el rol esperado del docente) está alineada y es coherente con el enfoque etnomatemático.

Los comentarios emitidos, apelan a lo interesante e innovador de la propuesta, así como el hecho de que pueda ser “fácilmente abordable de manera interdisciplinar”, agradeciendo y valorando el hecho de presentar algunos objetivos de aprendizaje de diferentes asignaturas en las indicaciones al docente para ejemplificar en qué contenidos podría realizarse. Experto 1, destaca el manejo de la cosmovisión y la iconografía mapuche con un consecuente buen uso

de estas, bajo los conceptos de transformaciones isométricas. Se destaca además que la propuesta pueda ser adaptada para otros cursos (abordando otros objetos geométricos), como también para actividades de difusión matemática (como ferias matemáticas) realizadas por los establecimientos.

4.2. RELACIÓN DE LAS ACTIVIDADES CON LAS HABILIDADES Y LOGROS ESPERADOS

Esta dimensión pretende evaluar la relación de las actividades diseñadas con las habilidades del siglo XXI que se esperan desarrollar, junto a los logros propuestos en el diagrama presente el capítulo 3. Se presentan a continuación los resultados expuestos en una tabla igual que en inciso anterior:

Indicador	Experto/a						Promedio
	1	2	3	4	5	6	
Las actividades permiten:							
Fomentar el dialogo crítico-reflexivo en base a la argumentación de las ideas.	3	4	4	4	4	4	3,8
Valorar y respetar la diversidad.	3	4	4	4	4	4	3,8
Fomentar la valoración por el conocimiento de diferentes culturas y por el patrimonio cultural intangible que ellas representan.	4	3	4	4	4	4	3,8
Contextualizar el conocimiento con visión sociocultural.	4	4	4	4	4	4	4
Generar interacciones reflexivas entre los y las estudiantes y el o la docente	4	4	3	4	4	4	3,8

Tabla 4.2: "Resultados respecto a la relación entre las actividades con las habilidades y logros esperados" Elaboración propia a partir de los resultados de la encuesta de validación.

Los resultados indican una evidente relación entre las actividades diseñadas con las habilidades y logros propuestos. Respecto a los comentarios, el Experto 1 aprecia un "gran énfasis en los procesos de argumentación y comunicación matemática, los cuales se fundan en el desarrollo de análisis y reflexión crítica por parte de los estudiantes" a partir de los materiales diseñados, expresando que los indicadores que están evaluados en "3" (y no "4") es por aspectos técnicos de las guías (como la diagramación) y la redacción de algunos documentos (lo que detalla en la dimensión siguiente).

Por otro lado, el Experto 2 plantea la sugerencia de incluir en las instancias de reflexión, opiniones respecto al por qué la cultura mapuche no es abordada a menudo en el aula; en el marco teórico se detalla el distanciamiento entre una cultura y nuestro currículo monocultural, donde se evidencia un desconocimiento de la diversidad de culturas del territorio nacional, existiendo un currículum escolar limitado para abordar este tema, dando pie a la viabilidad de expandir la propuesta hacia una práctica interdisciplinaria, enriqueciendo el proceso educativo.

4.3. RELACIÓN DEL MATERIAL DISEÑADO CON LA REDACCIÓN Y LA FACTIBILIDAD DE IMPLEMENTACIÓN

Se presentan a continuación los resultados obtenidos en la última dimensión, donde se relacionan los materiales diseñados con la redacción de los documentos y la factibilidad de implementación:

Indicador	Experto/a						Promedio
	1	2	3	4	5	6	
Las actividades permiten:							
La redacción de los documentos es la adecuada y permiten una lectura fluida.	2	3	3	4	3	3	3
Las indicaciones al docente permiten orientar y secuenciar el trabajo del docente en el aula.	4	4	3	4	4	4	3,8
Las sesiones pueden realizarse en una clase (2 horas pedagógicas).	3	3	4	4	3	3	3,3
El nivel de dificultad de las actividades es adecuado para 8vo año básico.	4	4	4	4	4	4	4

Tabla 4.3: "Resultados respecto al material con la redacción y la factibilidad de implementación"
Elaboración propia a partir de los resultados de la encuesta de validación.

De los resultados obtenidos se aprecia que en esta dimensión los indicadores tienen un promedio menor respecto a las otras dos dimensiones anteriores, siendo el indicador 1: "La redacción de los documentos es la adecuada y permiten una lectura fluida" y el indicador 3: "Las sesiones pueden realizarse en una clase (2 horas pedagógicas)" los de menor puntaje asociado, resultando necesario, en comentarios del Experto 1, mejorar la diagramación de la guía de la clase 2 "Compartiendo Kimün" y cambiar el vocabulario de las instrucciones de las guías para facilitar la comprensión en los y las estudiantes. También, realiza un comentario respecto a dos de los tres videos elegidos para la clase 1, sugiriendo que la elección del video de Traslación podría confundir a los y las estudiantes al realizar rotaciones en sentido horario para ángulos positivos, pues en geometría analítica las rotaciones para esos ángulos son en sentido antihorario. También, comenta que en el video de traslación "no se habla en ningún momento de vector de traslación sino de directriz, la que (según el video) tampoco cumple las funciones del vector de traslación tal como se pide en el currículum chileno". Respecto al tiempo destinado a las clases, a modo general se comentó que es posible que cada clase deba ser abordada en más de una sesión, lo que dependerá únicamente de las características de cada curso y de la gestión docente.

Por otro lado, los otros dos indicadores (2. Las indicaciones al docente permiten orientar y secuenciar el trabajo del docente en el aula, 4.El nivel de dificultad de las actividades es adecuado para 8vo año básico) promedian un puntaje alto, destacando (en palabras del Experto 4) la significancia y presentación de las actividades, las que resultan ser atractivas y viables para el trabajo en aula, como también, en comentarios del Experto 1, la coherencia entre la iconografía mapuche y los contenidos mínimos de simetrías del currículum nacional,

permitiendo proyectarla y ampliarla para ser trabajada con otros objetos matemáticos, como teselaciones, simetría central y homotecia. Respecto al documento “Indicaciones al docente”, el experto 1 comenta sobre el aprendizaje que significó para él la lectura del documento, tanto de iconografía mapuche como de etnomatemática. Por último, el experto 4, tras las felicitaciones, propone una serie de preguntas que permiten reflexionar respecto al diseño de la propuesta y sus objetivos: “¿Esta implementación permite alcanzar o superar la fase práctica de resolución de problemas con (o sin) contexto que nos tiene acostumbrado la presentación del contenido de forma "tradicional"? ¿Cómo varía el tiempo de respuesta de un estudiante ante una situación problema de este tipo? ¿Qué tan permanente es la retención de ideas clave y procedimientos respecto a este contenido?”. Estas preguntas guían en parte, las reflexiones y conclusiones del trabajo realizado. Destaca además, en uno de sus comentarios finales, que *“lo más valioso de este trabajo es la puesta en escena que tiene la matemática en cada sociedad y en su papel transversal en la historia de la humanidad; mostrarla como necesaria, desnudarla como una actividad humana, que tiene fines y propósitos con raíces espacio-temporales. Darle a los estudiantes esa cercanía que tiene esta disciplina que en muchos momentos les es ajena”* evidenciando el cumplimiento de algunos logros propuestos, así como el desarrollo del análisis crítico y las interacciones reflexivas, muchas veces ausentes en las aulas.

4.4. MEJORAMIENTO DE LA PROPUESTA

Considerando los comentarios del equipo de expertos y expertas en el proceso de validación, quienes alentaron el diseño de la propuesta, las mejoras corresponden a ámbitos técnicos como la reformulación de las instrucciones de las guías, redacción, elección de otros videos que no presenten los errores comentados por el experto 1 y la diagramación adecuada de las guías que por términos de formato parecían desfiguradas.

Se detalla a continuación las modificaciones realizadas a raíz de las sugerencias e inquietudes emitidas por el equipo de expertos y expertas:

Comentario de expertos y expertas	Modificación realizada
Plantea la inquietud de cómo será escogida la toma de opiniones en los momentos de plenario, para que no se repitan los mismos estudiantes y motivar a aquellos que se mantienen aislados en este tipo de instancias.	Se añade en Indicaciones al docente, una sugerencia de actividad que permita la participación aleatoria de los y las estudiantes. Al formar los grupos, se solicita dibujar un elemento sencillo pero significativo, y guardarlos en bolsas o sacos (uno para cada grupo). Así, al momento de solicitar la participación de los y las estudiantes, se elige al azar un dibujo de cada saco, el estudiante comparte el significado del dibujo, y procede a comunicar la conclusión grupal. El dibujo puede dejarse fuera del saco, y así, en las próximas sesiones, será otro estudiante quien saldrá al azar.
Sugerencia de reflexionar respecto al rol de la matemática; si cumple un rol sociocultural o es una herramienta que se encuentra en función de las necesidades individuales y sociales.	Siendo estas reflexiones parte de los logros que la propuesta espera alcanzar, se añaden preguntas que guían esa discusión para la Clase 1, en el apéndice 2.1. de Curiosidades Matemáticas.

Reflexionar sobre por qué la cultura mapuche no es abordada a menudo en las escuelas.	Temática que puede ser abordada bajo diferentes aristas de manera interdisciplinar en diversas asignaturas. Se añade en las indicaciones al docente, en las sugerencias para la práctica interdisciplinar, y para ser discutido en la última clase: Nüttram.
Utilizar un vocabulario sencillo y sintetizar ideas en las guías, tanto en la redacción de las instrucciones como en la descripción de los íconos mapuche.	Se redactan nuevamente las instrucciones en las guías y se realiza modificación a la descripción de los íconos mapuche en ellas.
Errores de tipeo y diagramación en las guías de las clases 2 y 3 (Apéndice 2.2 y 2.3)	Modificados y solucionados ambos errores técnicos.
En 2 de los 3 videos que se solicita a los y las estudiantes ver en sus casas (en Indicaciones al docente y Planificación Clase 1), se aprecian objetos matemáticos que son estudiados de manera diferente según el curriculum nacional (así como rotar en ángulos positivos en sentido horario, o la definición de directriz en vez de vector de traslación).	Se cambian ambos videos por otros, de duración y características similares, que no cuentan con aquellos elementos que se menciona en el comentario, que pueden confundir a los y las estudiantes.

Tabla 4.4: Modificaciones tras la validación de la propuesta
Elaboración propia

CONCLUSIONES

En este capítulo se desarrollan las conclusiones a partir del análisis entre el objetivo general y los objetivos específicos, con los resultados del proceso de validación, evidenciando las fortalezas, limitaciones y proyecciones de la propuesta, incluyendo los aprendizajes de este enriquecedor proceso de construcción ante una propuesta innovadora, adquirido por los autores del seminario de grado.

Este análisis se basa en el cumplimiento tanto de los objetivos específicos como el general, dando hincapié a cada uno de los pasos que se llevaron a cabo en la propuesta para que esto resulte posible. Para que la relación entre la propuesta didáctica y los objetivos planteados en un inicio exista, se debe tener en miras el enfoque etnomatemático con que se resolverá el aprendizaje de isometrías en estudiantes de octavo año básico utilizando la iconografía textil mapuche

Respecto al cumplimiento de los objetivos específicos, se considera que el primero y el segundo se cumplieron de manera exitosa, ya que se diseñaron cinco clases y su respectivo material para trabajar diferentes actividades para que sean implementadas de manera continua. Cada dinámica fue pensada y creada bajo un diálogo entre los aspectos del conocimiento mapuche (trascendencia del conocimiento, contextualización del conocimiento, oralidad y complementariedad con el medio) y las habilidades para el siglo XXI, descritas en la Tabla 2.11, que guardan relación con dichos elementos. Se concluye que el material diseñado cumple con los aspectos de Trascendencia y Contextualización del conocimiento, mientras que las interacciones en aula (guiadas tanto por las el material como por el o la docente) fomentan los aspectos de Oralidad y Complementariedad con el medio. Los aspectos de Trascendencia y Contextualización con el medio, pueden relacionarse con las habilidades como el Pensamiento crítico y la Creatividad, mientras que la Oralidad y la Complementariedad con el medio guarda relación con las habilidades comunicativas, de colaboración y de responsabilidad social y personal.

El Apéndice 2.1, Curiosidades matemáticas, que permite evidencia la trascendencia del conocimiento y su contextualización al posicionar al estudiante sobre una matemática entendida en función de las necesidades surgidas en un tiempo histórico particular, dando énfasis en la utilización práctica de lo que hoy se plantea de manera abstracta. Otra actividad es presentar ejemplos de isometrías contextuales, visibles en el diario vivir, como lo es la apertura de las puertas del metro, el abrir un cajón, mirarse al espejo, etc., terminando con los manipulativos a fin de visualizar las isometrías en iconografía textil mapuche. En las clases siguientes, guiadas por el Apéndice 2.2 y Apéndice 2.3 (Construyendo Kimün y Compartiendo Kimün, respectivamente), se posiciona el contenido de isometría en un ámbito propio de la cultura mapuche, obteniendo reflexiones prácticas y experiencias vivas de lo que es armar un

ícono sin tener el conocimiento matemático que hoy poseemos, y una vez adquirido este conocimiento matemático, poder utilizarlo para crear aquellos iconos de importancia para un pueblo en particular, y posteriormente, para la evaluación final, un ícono propio. Así, los Apéndice 2.4 y 2.5, guían la evaluación final como una actividad que contribuirá al sentido de pertenencia que posean los y las estudiantes, anclando el conocimiento matemático que hayan adquirido hasta ese momento y utilizarlo en beneficio de esta construcción identitaria. Cada una de estas actividades fue contextualizando el saber mapuche plasmado en su iconografía y las vivencias propias de cada estudiante con el contenido de isometrías.

La secuencia didáctica diseñada, requiere, necesariamente incorporar el constante trabajo de reflexión y análisis crítico propuesto, pues sin ellas sólo se perpetúa la instrucción tradicional, utilizando la iconografía como un mero recurso que sirve de ejemplo para ser replicado, ausentando la riqueza de las interacciones que permiten valorar la diversidad de apreciaciones, desarrollar la empatía y habilidades comunicativas y argumentativas a fin de articular y comunicar sus ideas de manera efectiva, ya sea opinando sobre sus apreciaciones de los íconos mapuche o de las preguntas que guían cada clase, realizando conclusiones de la discusión en su grupo de trabajo, comunicando los procedimientos matemáticos en el trabajo o emitiendo opiniones personales respecto a los temas estudiados. Para ello, se diseñan también material destinado al docente respecto orientaciones para la implementación (Apéndice 1: Indicaciones al docente y Planificaciones, Apéndice 4). A lo largo de toda la propuesta didáctica se hace visible este lenguaje que se establece entre los saberes de la cultura originaria mapuche con la geometría occidental, dando cada una de las directrices al docente para que pueda, de manera óptima, tomar la dirección correcta para cada una de las 5 clases planificadas en el ámbito de las isometrías. Es por ello que desde un principio de los documentos mencionados y hasta el final, se crea en el profesor el rol guía que debe tomar en cada clase, instruyendo con preguntas que guiarán las clases, el fin de cada una de ella y el orden en que se debe disponer cada clase.

Se estudian elementos aparentemente abstractos (objetos matemáticos), en íconos reales, de gran carga simbólica, que se plasman en elementos tangibles como la textilería mapuche, donde además, la manera de trabajar en la sala de clases (en grupos), fomenta la colaboración entre pares, competencia que también es abordada en cada clase reflexivamente al discutir respecto a que el conocimiento es una construcción social, reconociendo los roles individuales de cada miembro que permiten finalmente relacionarnos socialmente.

El tercer objetivo también se considera cumplido pues se diseñó Rúbricas de Evaluación (Apéndice 3), que permiten comunicar al docente el cumplimiento de los logros esperados, donde cada indicador fue diseñado para corresponderse con alguna de las habilidades por cumplir, y que además, fueron coherentes con el enfoque utilizado, a raíz de los resultados

obtenidos en el proceso de validación, cumpliéndose así el último objetivo específico, que guarda relación con la validación de la propuesta; proceso realizado a través de cuestionario tipo Likert de cuatro niveles, respondido por un equipo de cinco expertos y expertas que han enseñado con anterioridad isometrías en octavo básico y un profesor de historia con experiencia en aula en la zona de Wallmapu. Los comentarios generales de la validación motivan enormemente la finalización de este proceso. Las sugerencias fueron consideradas, realizando las mejores correspondientes en los materiales diseñados, contribuyendo a enriquecer la propuesta final.

Finalmente, el objetivo general de este seminario se da por cumplido. Se desarrolla una propuesta didáctica para enseñar y estudiar geometría en octavo básico, específicamente isometrías, mediante iconos extraídos desde la Textilería Mapuche. Lo esencial fue abordarla desde el enfoque de etnomatemática, pues de lo contrario los íconos pierden sentido y contexto, y serían trabajados meramente como figuras geométricas, perpetuando la descontextualización. Cada icono utilizado tiene un significado propio de la cosmovisión Mapuche (detallado en la tabla 2.3). Así también, cada una de las clases tiene un título en mapuzungun, o contiene palabras en mapuzungun, englobando las ideas y el motivo de cada clase. Por otro lado, la forma de trabajar grupalmente es inspirada en la vida en comunidad, idealmente en círculo, como una ruka en torno al fogón, culminando con un nüttram que hace explícito este elemento cultural Mapuche. La propuesta busca tomar elementos de la cultura Mapuche y de su forma de aprendizaje o “Lógicas del conocimiento mapuche”, detalladas en el apartado 2.3.2.

Luego de la validación por parte de los expertos y expertas, se pueden extraer algunas conclusiones en la línea de las fortalezas que presenta la propuesta. A saber:

Propuesta innovadora: los expertos y las expertas resaltan como fortaleza lo innovadora de la propuesta. Respecto al enfoque de etnomatemática, las actividades y la temática de la propuesta inspirada en la iconografía textil mapuche y su cosmovisión. También resaltaron el aporte para ellos mismos por lo detallada de las indicaciones al docente.

Abordable de manera interdisciplinar: desde un comienzo la propuesta buscaba ser trabajada de manera interdisciplinar en las asignaturas de Artes y principalmente, Historia. Poniendo énfasis en la rigurosidad del conocimiento y la información histórica, social y cultural trabajada en la propuesta. Además, uno de los expertos resaltó el potencial de la propuesta para ser trabajada en clases de Orientación.

La flexibilidad: la propuesta puede ser extendida para el estudio de otros contenidos de matemática, tales como el estudio de teselaciones e incluso para el estudio de homotecias en primero medio. La propuesta se basa en iconografía textil mapuche pero las instancias de

reunión, de discusión, de reflexión y de compartir pueden llevarse a cabo en otras áreas de matemática.

Pensamiento crítico: la propuesta ofrece gran énfasis en estimular los procesos de argumentación, reflexión y comunicación matemática. Así como también el desarrollo de habilidades de comunicación escrita y oral. La propuesta se sustenta en que los y las docentes guíen los análisis y reflexiones de los estudiantes.

Se destaca dentro de las fortalezas las palabras de uno de los expertos (Experto 4) que señala:

“(…) lo más valioso de este trabajo es la puesta en escena que tiene la matemática en cada sociedad y en su papel transversal en la historia de la humanidad; mostrarla como necesaria, desnudarla como una actividad humana, que tiene fines y propósitos con raíces espacio-temporales. Darle a los estudiantes esa cercanía que tiene esta disciplina que en muchos momentos les es ajena.” (disponible en Apéndice 6)

Por otra parte, las limitaciones de la propuesta son:

Literatura: se menciona como limitación por la escasez bibliográfica de experiencias en el aula con etnomatemática en el contexto nacional.

Duración: se extraen dos limitaciones desde la perspectiva de los validadores. La primera tiene que ver con que las actividades se cumplan en los tiempos estimados, dependiendo del curso y el establecimiento en que se trabaje. Y la segunda, sugiriendo la extensión de la propuesta para trabajar en profundidad las diversas temáticas que se tocan en las sesiones.

La no implementación de la propuesta en establecimiento.

Carencia formativa: la escasa literatura, acompañada de una nula preparación respecto al enfoque de etnomatemática fue una limitación importante. Esto implica detallar cada apartado, extender ideas y reorganizar la información debido a lo desconocido del tema tanto dentro de la carrera, donde el único acercamiento ha sido la incorporación de un complementario de Etnociencia hace tres años, como en la formación inicial docente en general.

5.1. Proyecciones del seminario

Primeramente, el **implementar en un establecimiento** la propuesta resulta ser uno de los puntos importantes. El implementarla daría la maduración de las ideas, identificar lo que se puede sintetizar o profundizar, además de observar si la propuesta resulta estimulante tanto por las actividades como la forma de trabajar en general, ayudando a superar la limitación respecto a la duración necesaria y real que requiere la propuesta.

Luego de la implementación las proyecciones de la propuesta serían identificar claramente las limitaciones y poder depurarlas, y por otra parte, las fortalezas llevarlas a cabo sin perder el enfoque etnomatemático y el conocimiento adquirido en el trabajo realizado.

Así, una proyección, sería tomar una de las fortalezas mencionadas por los expertos, en cuanto a la **flexibilidad** de la propuesta y poder utilizar el conocimiento de la cosmovisión Mapuche y el enfoque etnomatemático y aplicarlos a diferentes áreas de estudio de las matemáticas, tales como teselaciones u homotecias.

Se resaltó el potencial interdisciplinario, el cual también es una proyección como propuesta. Poder desarrollarla en conjunto con docentes del área de Historia, Artes e incluso como orientador, utilizar la riqueza de culturas que conviven en el territorio chileno, así como también la llegada de estudiantes de diferentes nacionalidades, para guiar reflexiones en torno a las diferentes cosmovisiones que puedan estar en la sala de clases y como socialmente construyen el conocimiento. Así mismo, la propuesta propone un quinto punto dentro de las “Lógicas de pensamiento Mapuche” referente a la relación directa con el medio (medio natural), el cual no es abordado en la propuesta pero sí podría ser un punto clave a la hora de trabajar en otras áreas de ciencias, tales como la física, la química o la biología, y además, poder complementarlo con las palabras de Elisa Loncón, quien se refiere a la problemática del cambio climático y cómo la cosmovisión mapuche podría ser un referente en el futuro cercano sobre cómo relacionarse con la naturaleza.

Finalmente, la propuesta es uno de los primeros intentos por relacionar la matemática con el Pueblo Mapuche en la carrera y una primera aproximación al enfoque de Etnomatemática. Cabe mencionar que es el primer seminario que aborda la etnomatemática, y también el primero en considerar la cosmovisión Mapuche. A pesar de las limitantes bibliográficas y la poca experiencia en esta área, la propuesta es un intento por aportar al estudio de la etnomatemática en la carrera y por qué no, en la preparación inicial docente. Es un camino de errores y tropiezos, pero que, según los expertos, logra cumplir con los objetivos planteados, y en este atrevimiento de tratar nuevas temáticas se saca un saldo más positivo que negativo.

Se espera que las futuras generaciones puedan tomar como referencia los errores y virtudes de esta propuesta didáctica.

5.2. Aprendizajes de los autores

Desde el punto de vista académico, el aprendizaje que genera un trabajo de investigación tan arduo, fue desde sintetizar o profundizar en ideas hasta el hecho de identificar fuentes que pudieran aportar verdaderamente al trabajo. El trabajo en equipo fue fundamental, poder entenderse, apoyarse y seguir adelante, además de reflexionar, criticar, discutir y crear juntos, resultando una experiencia muy significativa. La propuesta espera, a raíz de las conversaciones e interacciones en aula, generar instancias de aprendizaje similares a las

realizadas por los autores en este proceso creativo que permite el seminario, donde se consideraron, validaron y valoraron las apreciaciones tanto del equipo de trabajo, como las de las profesoras guías, el equipo de validación y profesores correctores.

En cada palabra, actividad, pregunta, idea y material de la propuesta hay largas horas de discusión, de sacrificio, de silencios, de vivencias pero por sobre todo hay un gran anhelo de darle sentido a nuestro trabajo, no solo personal y grupal, sino profesional. Darle sentido al proceso de enseñanza-aprendizaje.

El trabajar con la cultura Mapuche es un desafío, ya que es un pesar y un placer a la vez. Lo que es señal inequívoca de que la propuesta involucra también al corazón. El respeto para con el pueblo Mapuche se demuestra siendo objetivos y rigurosos a la hora de realizar una propuesta inspirado en un elemento cultural. Es recibir, aprender, reflexionar, conversar y utilizar. Aunque la omisión de cierto contenido también demuestra respeto.

La apropiación de nuevas estrategias, metodologías y enfoques de enseñanza siempre enriquecerá la práctica pedagógica; los aprendizajes al término de este proceso se concentran tanto en competencias investigativas desarrolladas, como también a la interiorización de un enfoque que nos era ajeno, el que se espera sea aún más desarrollado en Latinoamérica, junto a nuevas metodologías y estrategias que guíen la educación hacia una pedagogía crítica y reflexiva, que facilite el desarrollo integral de los seres humanos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agencia de calidad de la educación. (2015). Reporte de Calidad. Santiago.
- Albanese, V., Santillán, A., & Oliveras, M. L. (2014). Etnomatemática y formación docente: el contexto argentino. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 198-220.
- Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 49-92.
- Aravena, M.; Caamaño, C.; González, J.; Cabezas, C.; Córdova, F. (2011). Resolución de problemas en contextos de aplicación. *Propuesta Metodológica en la Formación Inicial de Profesores de Matemática*. Talca.
- Araújo, A. A. (2008). Una propuesta metodológica en etnomatemáticas. *Revista UDCA Actualidad y Divulgación Científica*, 67-76.
- Aravena Díaz, M., & Caamaño Espinoza, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule: Talca, Chile. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 179-211.
- Ausubel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. Fascículos de CEIF, 1-10.
- Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics*, 201-233.
- Bengoa, J. (2011). Los Mapuches: historia, cultura y conflicto. *Cahiers des Amériques latines*, 89-107.
- Bengoa, J. (2000). *Historia del pueblo mapuche (siglo XIX y XX)*. Santiago.
- Biblioteca Nacional de Chile. (s.f.). Historiador de los grandes procesos históricos: Sergio Villalobos. Obtenido de Memoria Chilena: <http://www.memoriachilena.cl/602/w3-article-803.html>
- Blanco-Alvarez, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratán D'Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 21-25.
- Blanco-Álvarez, H. (2008). La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas. *Boletín de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa*, 4-6.
- Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 10-21.

- Bruner, J. (2011). Aprendizaje por descubrimiento. Iberia.
- Carbonell, B. (2003). Cosmología y chamanismo en Patagonia. Granada.
- Cavalcante, A., Boavista, A., Rossaro, J., Fialho, F. y Perassi, R. (2013). A Iconografia em comunidades indígenas. *Projetica*, 9-28.
- Cayuqueo, P. (2012). Solo por ser indios y otras crónicas mapuches. Santiago: Editorial Catalonia.
- Centro de Estudios Mineduc (2013), Implementación del currículo educación media en Chile. Santiago.
- Cheuquepán, D., y Barbé, J. (2012). Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 131-154.
- Chihuailaf, Millamán, Devalpo, Massardo y Ruiz, (2008). Historia y luchas del pueblo mapuche. Ediciones de Le Monde Diplomatique, Santiago, pp. 59-64.
- D'Ambrosio, U. (2008). Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad. México.
- De Jesús, M., Mendez, R., Andrade, R., Martínez, R. (2007). Didáctica: Docencia y método. Una visión comparada. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*. Mérida, 9-29.
- De Torres, M. (2005). Telar mapuche: de pie sobre la tierra. Argentina.
- Díaz, D., y Bazán, K. (2011). Enseñanza de las transformaciones isométricas en el primer nivel de educación media de adultos: resultados de una experiencia. *Horizontes Educativos*, 17-29.
- Dillehay, T. D., Catrileo, M., y Gálvez, M. (2011). Monumentos, imperios y resistencia en los Andes: el sistema de gobierno mapuche y las narrativas rituales. Atacama.
- Fabres, R. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atinente a los contenidos. *Estudios pedagógicos*, 87-105.
- Fundación Chile (2016). Habilidades para el siglo XXI. Santiago.
- Freire, P. (1996). Pedagogia da autonomia. São Paulo: Paz e Terra.
- Freire, P. (2005). Pedagogía del oprimido.
- Gálvez, E. (2013). Metodologías activas favoreciendo los aprendizajes. Santiago: Santillana

- Gaspar, M. (2003). Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores. São Paulo.
- Gavarrete, M. (2013). La Etnomatemática como campo de investigación y acción didáctica: su evolución y recursos para la formación de profesores desde la equidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 127-149.
- Geertz, C. (2003). La interpretación de las culturas. Descripción densa: hacia una teoría interpretativa de la cultura.
- Hevia, R., Hirmas, C., Treviño, E., y Marambio, P. (2005). Políticas educativas de atención a la diversidad cultural. Brasil, Chile, Colombia, México y Perú. Santiago.
- Instituto Nacional de Estadísticas (2018) Síntesis de resultados. CENSO 2017. Santiago.
- Jaramillo, J. A. (1996). Vygotsky's sociocultural theory and contributions to the development of constructivist curricula. *Education*, 133-141.
- Jiménez, D. A. (2017). Estructura, coherencia, rigurosidad, análisis y escritura de propuesta didáctica. Bogotá.
- Lastra, S. (2005). Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas. Santiago.
- Lipka, J., & Andrew-Ihrke, D. (2009). Ethnomathematics applied to classrooms in Alaska: Math in a cultural context. *NASGEM Newsletter*, 8-10.
- Loyola, Manuel. (2015). Matilde Painemil. Textilería Mapuche. Programa "Kuyfi Kimun" Cap. 2. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=EpaM-T0gRLQ>
- Mallart, J. (2001) Didáctica: Concepto, objeto y finalidades. *Didáctica general para psicopedagogos*, 25-60.
- Martel, E. y Tenorio, A. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas matemáticas*, 159-190.
- Massarwe, K., Verner, I., Bshouty, D., & Verner, I. (2010). An ethnomathematics exercise in analyzing and constructing ornaments in a geometry class. *Journal of Mathematics and Culture*, 1-20.
- Mege, P. (1990). Arte textil mapuche. Santiago.
- Mendoza, A. (2016). Avances en matemática educativa. *Tecnología y Matemática*. México.
- Micelli, M., y Crespo, C. (2011). La Geometría Entretejida. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 4-20.

- MINEDUC (2009). Programa de Estudio Octavo Básico. Santiago.
- MINEDUC (2011). Objetivos transversales, Bases Curriculares. Santiago.
- MINEDUC (2015). Bases Curriculares, 7°Básico a 2°Medio, Santiago.
- MINEDUC (2016). Programa de Estudio Octavo Básico. Santiago.
- Ministerio de Desarrollo Social (2015). Situación de la pobreza en Chile. Encuesta de caracterización socioeconómica nacional (CASEN). Santiago.
- Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo, 19, 44.
- Muhtadi, D., Sukirwan, Warsito, y Prahmana, R. (2017). Sundanese Ethnomathematics: Mathematical Activities in Estimating, Measuring, and Making Patterns. *Journal on Mathematics Education*, 185-198.
- Münzenmayer, A. (2012) Historiografía y transposición didáctica en los textos escolares de Historia de Chile. Santiago.
- Muñoz, J. (2011). Historias de Matemáticas Las Escuelas Jónica y Pitagórica. Madrid.
- OCDE. (2010). Habilidades y competencias del siglo XXI para los aprendices del milenio en los países de la OCDE. París.
- OCDE (2016), *Low-Performing Students: Why They Fall Behind and How to Help Them Succeed*. Paris.
- Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática: la matemática en la antigüedad.
- Oteiza, F., Miranda, H. (2002). El modelo interactivo para el aprendizaje matemático. Santiago.
- Quintriqueo, S. y Torres, H. (2012). Distancia entre el conocimiento mapuche y el conocimiento escolar en contexto mapuche. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16-33.
- Riveros, M. (1998). Religión e identidad en el pueblo mapuche. Santiago.
- Rubio, J. (2008). Matemáticas y astronomía en Mesopotamia. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 49-61. ·
- Ruiz, C. (2013). Síntesis histórica del pueblo mapuche (siglos XVI XX). *Rebelión en Wallmapu, Resistencia del pueblo-nación mapuche*, 49-58.
- Sánchez, A. (2003). Acercamiento a la etnomatemática. Bogotá.
- Salvo, J. (2015). El origen africano del Kultrún mapuche. *Trans. Revista Transcultural de Música*, 1-22.

Stewart, I. (1996). Simetría Quebrada. Os Números e a Natureza, 61-73.

Urbina, José (2012). La metodología activa y su influencia en la enseñanza de las matemáticas de los niños (as) del quinto, sexto y séptimo grados de la escuela particular Carlos María de la Condamine. Ecuador.

Villalobos, S. (1995). Vida fronteriza en la Araucanía: el mito de la Guerra de Arauco. Santiago: Andrés Bello.

Villella, J. (2001). Uno, dos, tres... Geometría Otra Vez. Buenos Aires: Aique

Wilson, A. (1992). Textilería mapuche, arte de mujeres. Santiago: Cedem.

APÉNDICES

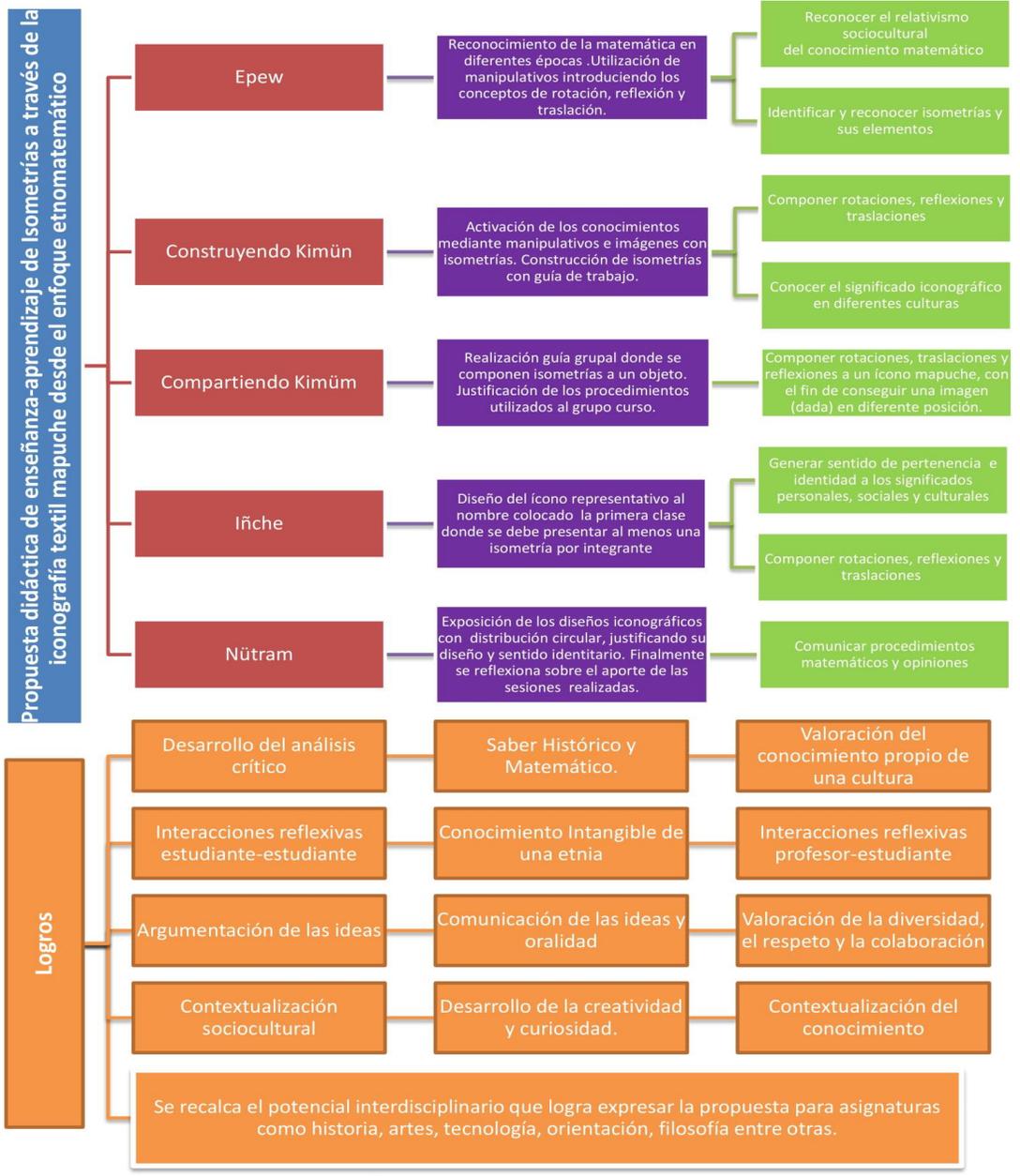
Apéndice 1: Indicaciones al docente.

En este apartado se presentan las indicaciones de cada clase con su respectivo respaldo teórico, facilitando la labor del y de la docente al momento de implementar cada una de las clases.

Se señalan en este apéndice las orientaciones para llevar a cabo la secuencia didáctica diseñada, donde, primeramente, se presenta el concepto de “etnomatemática”, que es el enfoque que guía esta propuesta, utilizándolo como una herramienta que enriquezca nuestra práctica pedagógica. Se describen también los aspectos del conocimiento mapuche que se pretenden incorporar, y finalmente, las orientaciones para las diferentes clases diseñadas, expuestas en tablas según “Inicio, desarrollo y cierre”.

Bajo el enfoque de etnomatemática, se espera conseguir ciertos logros, expresados en el esquema resumen que se presenta a continuación, los cuales se relacionan con el saber histórico del conocimiento matemático, contextualización del mismo, la diversidad y las interacciones (argumentativas y comunicacionales) entre estudiantes y docentes, como también, al potencial interdisciplinario que expresa la propuesta para asignaturas como historia, arte, tecnología, orientación, entre otros. Pues, en la asignatura de historia, en la Unidad 1: Reforma y el choque de dos mundos, está presente el OA 5: “Argumentar por qué la llegada de los europeos a América implicó un enfrentamiento entre culturas, considerando aspectos como la profundidad de las diferencias culturales, la magnitud del escenario natural americano, y la desarticulación de la cosmovisión de las sociedades indígenas”. En la Unidad 2, está presente el OA 12: “Analizar y evaluar las formas de convivencia y los tipos de conflicto que surgen entre españoles, mestizos y mapuches como resultado del fracaso de la conquista de Arauco, y relacionar con el consiguiente desarrollo de una sociedad de frontera durante la Colonia en Chile”. En Orientación, para la Unidad 3, está el OA5: “Analizar sus relaciones, presenciales o virtuales a través de las redes sociales, y las de su entorno inmediato atendiendo a los derechos de las personas involucradas considerando los principios de igualdad, dignidad, inclusión y no discriminación, identificando circunstancias en las que no se ha actuado conforme a estos derechos, y reconociendo el impacto en el bienestar de quienes se vean involucrados”, y en la Unidad 4: OA7 “Reconocer intereses, inquietudes, problemas o necesidades compartidas con su grupo de pertenencia, ya sea dentro del curso u otros espacios de participación, y colaborar para alcanzar metas comunes valorando el trabajo en equipo y los aportes de cada uno de sus miembros”. Por otra parte, en artes visuales, en la Unidad 1, está el OA1 “Crear trabajos visuales basados en la apreciación y el análisis de manifestaciones estéticas referidas a la relación entre personas, naturaleza y medioambiente, en diferentes contextos “.

Con esto, es posible visualizar que los logros esperados en esta propuesta pueden ser abordados también en diferentes asignaturas, bajo una perspectiva crítica y reflexiva respecto a la diversidad, al trabajo colaborativo y a la identidad de diferentes culturas como el pueblo mapuche.



Simbología	
	Logros Obtenidos
	Actividad Genérica
	Objetivos de aprendizaje
	Clase Impartida

Al momento de implementar la propuesta didáctica se aconseja a el o la docente que realice las clases de manera secuenciada, es decir, una tras otra a fin de seguir un hilo conductor en cada una de las temáticas a tratar. Se recalca la conexión entre las cinco clases de la propuesta, ya que orientará al estudiante por medio de este proceso relativista al conocimiento matemático, y la significancia de la iconografía textil mapuche. Además se debe tener en cuenta que cada clase contará con dos horas pedagógicas para ser implementadas.

Como orientación general, y en concordancia con el enfoque utilizado, se recomienda que la distribución de la sala de clases sea de manera que los y las estudiantes trabajen en grupo (con los bancos distribuidos de esa manera) a lo largo de toda la unidad, y por sobre todo propiciar un ambiente de discusión y de compartir ideas en comunidad, fomentando la oralidad y el trabajo colaborativo, pues los objetivos de esta propuesta, si bien son el cumplimiento de los aprendizajes esperados propuestos por el programa de estudio, también incluye el desarrollo de habilidades comunicativas y sociales propias para el siglo XXI, como es el hecho de analizar, razonar y comunicar efectivamente al resolver e interpretar problemas y distintas situaciones. Estas habilidades pretenden desarrollarse a través de generar espacios de reflexión en el aula donde se valore el conocimiento de diversas culturas, incorporando elementos de la lógica del conocimiento mapuche que se fundamenta en la oralidad y el conocimiento contextual, este último íntimamente relacionado al enfoque utilizado: la etnomatemática, atribuyendo sentido y significado a la relación de las personas con diversos elementos, en este caso, a íconos de la textilería mapuche y la geometría.

Respecto a las evaluaciones, se realizará una evaluación formativa cada clase, mediante una rúbrica (Apéndice 3.1) para evaluar el desempeño y la participación del grupo. Este es un instrumento necesario para el o la docente que impartirá las clases, pues permite detectar y reflexionar respecto a si la dinámica y la forma de trabajar está siendo efectiva con su grupo en particular y así tomar las decisiones pertinentes. Por otro lado, se obtiene un promedio de nota al trabajo clase a clase, que influirá en la evaluación sumativa final (Apéndice 3.2), a raíz de la presentación que debe hacer cada grupo en la última clase, donde cada grupo diseña un ícono, a través de isometrías, que represente la esencia del grupo de trabajo, permitiendo desarrollar un sentido de pertenencia y valoración con y hacia los y las integrantes del grupo. Ambas rúbricas, consisten en evaluar tanto el desempeño de habilidades para el siglo XXI como los procedimientos y razonamientos matemáticos realizados; de esta manera, cada indicador presenta relación con alguno de estos elementos.

Como descripción general, las 5 clases diseñadas (consideradas de 2 horas pedagógicas cada una) abordan:

CLASE 1: INTRODUCCIÓN A ISOMETRÍAS Y EL RELATIVISMO SOCIOCULTURAL: “EPEW” (CUENTOS O RELATOS MAPUCHE).

Esta clase resulta crucial para conversar con los y las estudiantes el enfoque a utilizar. Se dan las instrucciones, contenidos y objetivos de la clase y las posteriores, se forman los grupos (los que se mantendrán durante las clases siguientes), acuerdan un nombre que los represente (necesario para la evaluación final del contenido) y discuten sobre diversas "Curiosidades matemáticas" (Apéndice 2.1) y el dinamismo del conocimiento. Luego, se utiliza un manipulativo para evidenciar las isometrías presentes en la iconografía mapuche y se aborda formalmente el contenido de isometría, dejando unos videos, con preguntas, para que los y las estudiantes los vean y respondan en sus casas.

CLASE 2: "CONSTRUYENDO KIMÜN" (CONSTRUYENDO CONOCIMIENTO).

Con apoyo del Apéndice 2.2, Guía "Construyendo kimün", donde cada grupo tendrá una diferente para trabajar, estudiantes realizan individualmente cada una de las isometrías utilizando lenguaje y procedimientos matemáticos para formar iconos del pueblo mapuche, formalizando el contenido de isometrías al introducir los conceptos de vector de traslación, eje de simetría y centro de rotación, además de generar instancias de reflexión sobre la representación de cada ícono para diferentes culturas, la propia y uno mismo.

CLASE 3: "COMPARTIENDO KIMÜN" (COMPARTIENDO CONOCIMIENTO).

Nuevamente con el objetivo de ejercitar construcción de isometrías, de manera grupal, y con apoyo del apéndice 2.3, "Guía: "Compartiendo Kimün, donde cada grupo tendrá una diferente para trabajar, estudiantes deben realizar diferentes transformaciones a un objeto (ícono mapuche) con el fin de conseguir la orientación de la imagen plasmada en la guía. Cada grupo deberá enunciar al resto del curso qué procedimientos utilizaron para conseguir el objetivo. Igual que en la clase anterior, se le atribuye importancia a la comunicación por parte de los y las estudiantes al momento de dar a conocer sus ideas.

CLASE 4: "IÑCHE" (YO SOY)

Se realiza la actividad previa a la evaluación final, consistente en que cada grupo debe representar de manera gráfica y pictórica el nombre de su equipo, diseñando un ícono en 2 dimensiones, reafirmando el sentido de pertenencia. Cada integrante deberá aportar con 1 transformación isométrica como mínimo para complementar la representación diseñada. En esta clase se da el espacio y tiempo de diseño.

CLASE 5: "NÜTRAM" (ESPACIO DE CONVERSACIÓN).

Nütram es un espacio de conversación, en el pueblo mapuche, donde una persona mayor habla de su vida, su cultura y la historia de su pueblo, según afirma Elicura Chihuailaf, reconocido poeta mapuche; el arte de una conversación profunda que apela a la memoria.

Con el propósito de generar un espacio reflexivo, la disposición de la sala es un círculo, simulando a la comunidad mapuche que se reúne en la ruka en torno al fogón, y cada grupo expone el icono diseñado con sus respectivas justificaciones (tanto geométricas-matemáticas como también motivaciones personales), además de enunciar las diferentes apreciaciones de las sesiones realizadas.

Como se aprecia en la descripción de las clases, constantemente los y las estudiantes deben comunicar su opinión y apreciaciones respecto a las diferentes temáticas a discutir. Con el objetivo de promover la participación de todos y todas, e incitar a participar incluso a quienes no se motivan en matemática, se sugiere realizar alguna dinámica que permita una elección de un estudiante al azar, de manera que cada integrante tenga igual probabilidad de exponer las conclusiones tanto grupales como individuales, motivándose incluso a participar por decisión propia. La dinámica sugerida consiste en que cada estudiante realice un dibujo sencillo de algún elemento que sea significativo para ellos, firmándolo con su nombre o apodo, guardando todos los dibujos en un saco. Así, al momento de solicitar la participación, se puede recurrir a sacar al azar algún dibujo, y luego es retirado para que no se vuelva a repetir en la misma clase. Al finalizar, vuelve a ser colocado en el saco para tener la posibilidad de salir en una clase siguiente. Si se trabajará en grupos (como se señala en estas actividades), se puede contar con diferentes sacos, uno para cada grupo. Cuando le toque a un grupo exponer sus conclusiones, se elige al azar un dibujo de cada saco. Se recomienda además que el estudiante justifique su dibujo antes de comunicar la conclusión u opinión, pues se reitera la importancia que generan ciertos elementos para un individuo o grupo social.

Se presentan a continuación las orientaciones y descripciones de las evaluaciones y las rúbricas diseñadas (Apéndice 3):

- **EVALUACIÓN CLASE A CLASE**

La evaluación clase a clase permite que el o la docente identifique si la dinámica propuesta e implementada está siendo efectiva con el grupo curso. Si bien cada docente debe estar constantemente evaluando de manera sumativa su desempeño individual y el del grupo curso, resulta imperante se realice al trabajar una dinámica diferente, que considera, como esta, estar constantemente trabajando en grupo, con la sala, sillas y mesas distribuidas de aquella manera.

Por otro lado, coherente al enfoque utilizado, también se debe evaluar si los logros esperados y el objetivo de la propuesta están siendo cumplidos, es decir, evaluar si la implementación permite el desarrollo de las habilidades comunicativas, reflexivas y

creativas propias del siglo XXI, que se esperan desarrollar, como también la comprensión de los conceptos matemáticos a trabajar.

Sin afán de añadir agobiantes responsabilidades adicionales a los y las docentes, la evaluación clase a clase consiste en evaluar qué fracción del total del curso participa activa y responsablemente de las actividades, permitiendo reflexionar respecto a si la dinámica motiva, incluso de manera progresiva, la participación de los y las estudiantes, evidenciando algún cambio con las clases anteriores y las siguientes. Por otro lado, al ser una evaluación común para todo el curso, todos y todas deben hacerse responsables, autoregulándose y esperando contar con una actitud empática, además de involucrar directamente a cada estudiante con su evaluación y la del resto.

Como promedio de la calificación obtenida clase a clase, se obtiene una nota final, la cual será promediada con la evaluación realizada en la última clase, detallada a continuación.

- **EVALUACIÓN FINAL**

La evaluación final, realizada en la última clase, Nüttram, da por terminada las clases orientadas al estudio de las isometrías. Consiste en la presentación del ícono trabajado y diseñado en la Clase 4, pretendiendo fomentar el sentido de pertenencia a un grupo, evidenciando la formación de vínculos y valoración del trabajo realizado a lo largo de las clases anteriores.

Así, tal como se detalla en la Clase 5: Nüttram, el grupo curso forma un círculo, permitiendo que todos y todas observen sus rostros, mientras cada grupo expone el ícono diseñado, justificando matemática y emocionalmente su creación.

La rúbrica contiene un apartado para una auto evaluación (donde cada integrante evalúa individualmente su desempeño para cada indicador), y uno para la evaluación realizada por el o la docente al observar la presentación. El puntaje total obtenido otorgará una calificación, la cual deberá ser promediada con la nota obtenida en la Evaluación clase a clase (Apéndice 3.1.), obteniendo así una calificación sumativa. Recordar que la evaluación clase a clase es una nota común para todo el grupo curso.

Finalizando, se reitera que el objetivo de estas evaluaciones es, por un lado, evaluar el desempeño de los y las estudiantes y su relación con el desarrollo de las habilidades para el siglo XXI que se espera desarrollar, relacionadas a habilidades comunicativas, críticas y reflexivas, como la creatividad y el trabajo en grupo, pues son las relacionadas a los aspectos que caracterizan al conocimiento Mapuche planteadas por Torres y Quintriqueo, 2012, como también evidenciar el aprendizaje de los elementos geométrico-matemáticos estudiados, por lo que cada indicador presenta relación con alguno de estos elementos. Por otro lado, también es una herramienta para que docentes reflexionen respecto a su práctica pedagógica,

permitiéndoles detectar qué aspectos presentan como bajos (particularmente, su grupo), facilitando la toma de decisiones y ejecutando las prácticas necesarias para resolverlo de manera contextual, pues una solución para un grupo en particular no podría afirmarse como exitosa para otro grupo, bajo otro contexto.

A continuación, se presentan aquellos conceptos que guiarán a el o la docente a comprender y apropiarse de la propuesta didáctica, obteniendo un mejor rendimiento y resultado al momento de implementarla.

- **ETNOMATEMÁTICA: UNA HERRAMIENTA PEDAGÓGICA**

La etnomatemática surge como planteamiento global de investigación en el Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME5) en 1984 bajo la sesión plenaria del profesor brasilero Ubiratán D'Ambrosio, titulada Socio-Cultural Bases for Mathematical Education. (Gavarrete, 2013), situándose como un área de estudio de las matemáticas desde un enfoque etnográfico y antropológico, considera que la manera de hacer, y estudiar la matemática varía de cultura en cultura, existiendo un *relativismo matemático sociocultural*. En diferentes cosmovisiones se encuentra una amplia diversidad de pensamiento y aspectos culturales innatos a su contexto, ubicación espacial y temporal, posicionando al ser humano como alguien inseparable de su estructura social, donde su conocimiento emerge en un contexto sociocultural, pues un objeto es conocido y comprendido en función de este grupo, atribuyéndole socialmente una significación propia a dicho contexto (Oliveras et al., 2014), extendiéndose también hasta al conocimiento matemático.

D'Ambrosio en su entrevista a Blanco Alvarez (2008), establece que el principal significado conceptual de la etnomatemática es “una manera de hacer Educación Matemática, con ojos que miran distintos ambientes culturales”. Así, el fin de la etnomatemática no consiste en pasar al estudiante las teorías matemáticas existentes, que están congeladas en los libros para que las repitan como se plantea en un enfoque tradicional de enseñanza, sino que debe ser una práctica (una cosa viva); hacer matemática dentro de las necesidades ambientales, sociales, culturales, etc.

Así, se realiza una invitación hacia quienes se dedican a la enseñanza de las matemáticas, a tener una visión mucho más amplia de estas, entendiendo que son parte misma del entorno en donde se vive y desenvuelve el ser humano de manera cotidiana y natural, donde la separación entre el conocimiento y la experiencia humana no existe, encontrando la implicancia de una sobre la otra. Es por ello que se entiende a las matemáticas como un constructo social, cultural y humano, que responde a las necesidades particulares de una sociedad en espacios y tiempos diferentes (D'Ambrosio, 2008).

- **ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN EL CONOCIMIENTO MAPUCHE**

Respecto a la investigación de “Categoría Lógica del conocimiento mapuche”, realizada por Torres y Quintriqueo en 2012, se considera que hay elementos epistemológicos que son vitales para comprender las características del conocimiento mapuche:

- La relación directa con el medio natural.
- La trascendencia del conocimiento.
- El contexto del conocimiento.
- La oralidad.
- La complementariedad con el medio.

Por nuestro lado, consideramos que la incorporación de estos elementos a las escuelas chilenas se complementa con el enfoque etnomatemático para desarrollar habilidades para el siglo XXI en los y las estudiantes, desarrollando clases contextualizadas que enriquezcan el pensamiento crítico y reflexivo, muchas veces ausente en las clases de matemáticas. Es por esto, que se realiza a continuación una breve descripción de cada uno de estos elementos, con el fin de empapar al lector de los enfoques que guían la secuencia; por un lado, la etnomatemática, por otro, la cosmovisión mapuche:

- **Relación directa con el medio natural:** Cada uno de los elementos de la naturaleza representan fuentes de conocimiento que son utilizadas cotidianamente por el mapuche. Un kimche, por ejemplo, considera que los mapuche deben conocer la importancia medicinal que tiene una planta, solo así será capaz de entender lo malo que es cortar plantas y árboles. Los kimche proponen un equilibrio constante con el medio natural para favorecer un buen desarrollo de vida.
- **Trascendencia del conocimiento:** Referente a que en el medio familiar mapuche la lógica de pensamiento se sustenta en un cuerpo de conocimientos que ha mostrado ser eficaz y se mantiene vigente en la memoria individual y social. Hay una importancia en la memoria, en la valoración de los abuelos de las comunidades. En entrevistas se menciona la importancia de la “gente antigua” que conoce la Tierra desde antes que ellos y por tanto se valoran sus saberes.
- **Conocimiento contextual:** Referente a que el conocimiento se construye de acuerdo con las necesidades del entorno y situación en el que viven las personas, como también lo señaló Elisa Loncón, diciendo que ella aprendió matemáticas para poder dedicarse a vender cuando niña y muchos de sus compañeros también. A partir de esto, Quintriqueo y Torres señalan que “se reconoce que el contexto de vida es un aspecto clave en la configuración del conocimiento, aportando elementos sociales, culturales y espirituales que orientan las prácticas cotidianas de los sujetos”, relacionándose íntimamente con la etnomatemática.

- **Oralidad:** Apreciado en el contexto de la familia mapuche, donde el aprendizaje se fundamenta en el diálogo y la interacción que se genera entre el sujeto que da un consejo y quien es formado. Así, la oralidad permite que el saber enseñado en el pasado se mantenga vigente en la memoria social de la familia, permitiendo la construcción y enseñanza de los saberes y conocimientos.
- Por último, **la complementariedad con el medio**, señala que las personas no establecen sus relaciones con el medio desde una posición de intereses, debido a que mantienen un vínculo basado en el respeto que orienta el actuar de los sujetos. Por ello es por lo que la ausencia del respeto se asocia con el desconocimiento, lo que provoca un quiebre en el equilibrio de la vida.

Todos estos elementos guardan una íntima relación con el desarrollo de habilidades para el siglo XXI, es decir, relacionadas con abordar necesidades de los modelos emergentes de desarrollo económico y social, más que con aquellas del siglo pasado, que se encuentran al servicio del modo industrial de producción, pues en un mundo dinámico donde los contenidos quedan rápidamente obsoletos, se deben establecer como objetivos de aprendizaje el resolver problemas, y el trabajar y vivir con otros, para hacerlo en el futuro de una manera más efectiva. Para una óptima ejecución de la propuesta, se presenta a continuación el objetivo de cada clase con su respectivo inicio, desarrollo y cierre.

- **CLASE 1: INTRODUCCIÓN A ISOMETRÍAS Y EL RELATIVISMO SOCIOCULTURAL: “EPEW” (CUENTOS O RELATOS MAPUCHE).**

El propósito de esta clase es, por un lado, que los y las estudiantes reconozcan la contribución de diversas culturas, y personas, en la construcción del conocimiento, comprendiendo así que el conocimiento es dinámico, y una construcción colectiva, erradicando nociones propias de un enfoque tradicional como que el conocimiento esté acabado, discutiendo grupalmente diversas "curiosidades matemáticas" (detalladas en la tabla de abajo). Por otro lado, se pretende también introducir el concepto de isometrías, a través de unos manipulativos 5.2 y 5.3), diseñando además un manual para su construcción (Apéndice 5.4), validando el conocimiento geométrico existente en la cultura y presentes en nuestra cotidianidad.

Considerando aquello, se detallan a continuación las indicaciones a docentes según las diferentes etapas de la clase:

INICIO

Para generar las condiciones adecuadas de la clase, se recomienda enfatizar que en ésta, y en las clases posteriores, se trabajará con la sala distribuida en grupos, a pesar de contar con trabajos individuales, donde deberán recurrir a sus propios compañeros y compañeras para satisfacer sus dudas; además de tener su base en el respeto, se enfatiza en la colaboración y participación de los y las estudiantes, pues uno de los objetivos de la propuesta es desarrollar la

oralidad y el trabajo colectivo.

Se recomienda que la manera de trabajar sea realizando evaluaciones clase a clase, con el fin de que el/la docente pueda evaluar las relaciones y las actitudes de los y las estudiantes al estar sentados en grupo. Para ello, se elaboró una rúbrica; explicar esta evaluación al grupo curso, pues si se obtiene una evaluación positiva, esta manera de trabajar podría replicarse para otros contenidos e incluso, otras asignaturas, contribuyendo en fomentar el trabajo colaborativo.

Tras dar todas las instrucciones para ésta y las siguientes clases, explicando las evaluaciones y demás, se enuncian los objetivos de la clase.

DESARROLLO

Considerando este enfoque, se solicita a los y las estudiantes formar grupos. Si es un curso donde no se conoce aún las relaciones existentes entre estudiantes, se puede solicitar que se junten por afinidad, pues será el grupo con el que trabajarán durante las próximas clases y no se busca generar discusiones obligadas ni incómodas. Por el contrario, si ya se sabe que el grupo posee una convivencia amena, se pueden agrupar con alguna dinámica (sacar un número o un color al azar). Tras formar los grupos, se les solicita darle un nombre. Este no podrá ser cambiado, y se relaciona con la actividad final. Luego, dirigir una discusión respecto a los aportes de diferentes culturas y/o personas sobre el conocimiento matemático; para ello, se entrega a cada grupo una "Curiosidad matemática" (APÉNDICE 2.1), donde la breve tarea a realizar por cada grupo sea comentar la curiosidad otorgada realizando una reflexión guiada por el/la docente respecto a si lo sabían, se lo imaginaban, y sobre si es de su agrado saber de esas experiencias (pues el ideal es evaluar la percepción de los y las estudiantes sobre las dinámicas realizadas), y el elegir a una persona por grupo que enunciará lo comentado a todo el grupo curso para generar una discusión grupal.

Cada curiosidad cuenta con una serie de preguntas que guían la discusión, proponiendo que el profesor supervise que efectivamente cada grupo realice esas reflexiones, u otras que puedan surgir, para finalmente realizar una síntesis a nivel de curso.

Se agregan a continuación las orientaciones a tener en cuenta para cada curiosidad:

Curiosidad 1: Guiar la discusión hacia el utilitarismo del conocimiento, así como lo hacían antiguas civilizaciones (babilonios y egipcios), y a lo limitante que puede ser para desarrollar nuevo conocimiento por el arte de aprender (la evolución del conocimiento egipcio fue mínimo según afirma Francisco Lopez, 2002). Respecto a los aportes de la geometría, también se puede recurrir al desarrollo de habilidades tales como como la visualización, las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008; Aravena, Caamaño, González, Cabezas y Córdova, 2011). También es posible realizar una discusión respecto a los métodos de enseñanza actuales, comparándolo a la repetición y comprobación de diferentes métodos para resolver problemas, como se hacía antiguamente, y que se evidencia en la educación actual, y cuál es la opinión que tienen respecto a eso.

Curiosidad 2: Se pretende que los y las estudiantes puedan entender el significado histórico del uso de letras en matemáticas, del cual se pueden modelar o resolver problemas de tal manera que una misma expresión sirva para una gran cantidad de casos distintos, simplificando los cálculos. Para guiar esta conversación el docente deberá darle real importancia al beneficio que se obtuvo por parte de Francia el hecho de utilizar este lenguaje matemático para identificar los símbolos de mensajes codificados. Anclado a ello se deberá comparar este hecho con la realidad actual de tal modo que pueda darse a conocer esta incoherencia entre lo enseñado y su importancia en la cotidianidad. Por último, se pretende realzar el valor del lenguaje algebraico tomando en cuenta la diversidad de situaciones que se pueden resolver por medio de una sola ecuación, con el solo hecho de tomar diferentes valores en base a las incógnitas utilizadas. Todo esto guiado con las tres preguntas expuestas en las curiosidades.

Curiosidad 3: Esta curiosidad apunta a la representación de situaciones reales a través de las matemáticas, como la noción de deuda o de temperaturas bajo cero. El artículo de donde fue extraída esta curiosidad (Vélez Botero, D., y Varela Machado, O. (2014). *EL DESCUBRIMIENTO DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS*), afirma que los números, tanto naturales, negativos, el cero y los imaginarios, fueron descubiertos, no inventados: “En resumen, los números positivos y negativos no engendran el comercio y los sistemas financieros de los pueblos de la antigüedad; sino que, por el contrario, el comercio -con sus categorías de «contar» y «deuda»- genera y origina los números. Por eso las categorías antes mencionadas son intrínsecamente autónomas e independientes de la mente humana. Claro está que el hombre se ocupa de la parte operativa, pero dentro de un proceso de descubrimiento y no de invención (asignación de símbolos, elección de las bases, etc.)”.

Curiosidad 4: En este apartado se remonta al hecho de que los orígenes del conocimiento matemático surgen para dar solución a problemas cotidianos. Se busca que él y la estudiante pueden apreciar esta problematización de alguna situación en particular y mediante las matemáticas se pueda hallar alguna solución. Para ello el docente deberá prestar atención a la disociación del conocimiento matemático en función de su origen y utilización, tomando siempre como base la solución a un problema presentado. Las preguntas van justamente dirigidas a encontrar las conexiones entre los saberes y poder otorgarle el sentido perteneciente al metro en este caso, para poder generalizarlo a otros saberes.

Curiosidad 5: Esta curiosidad apunta a visualizar la diversidad de sistemas de numeración posicional. Más que en explicar en qué consiste cada sistema, es guiar la discusión hacia la multiplicidad y transcendencia del conocimiento, extendiendo la limitada noción de que el conocimiento es único, pues cada civilización ha ido construyendo el suyo propio, sentando las bases para construir uno nuevo, siendo este una actividad social.

Curiosidad 6: Al retomar el sentido de las matemáticas y el quehacer cotidiano, se plantea al estudiantado si realmente las matemáticas ayudan o son de utilidad a las personas, en otras palabras si las matemáticas se encuentran al servicio de las personas. De esta proposición se intenta dilucidar el foco servicial que tienen las matemáticas con su origen ya definido, donde no queda más que utilizarlas para el bien común o el propio en función de las necesidades que se obtengan en un determinado contexto. De acuerdo a esto el o la docente deberá guiar la conversación en el sentido ya dicho para que la abstracción e inutilidad de las matemáticas pueda quedar en duda, y así brindar una mirada más concreta de lo que podría ser un servicio o ayuda diaria en el ser humano.

Curiosidad 7: En este caso se retoma lo dicho con anterioridad en la curiosidad 6. Para este apartado se consideran las ecuaciones de primer grado como un tipo de ejemplo de una herramienta utilizada para el servicio de las personas. Es decir, de todos los conocimientos matemáticos que existen, las ecuaciones de primer grado son una de los tantos saberes que se pueden utilizar como herramientas. De ello se puede dar un ejemplo de balanzas con pesos en ambas partes, donde se intenta buscar una igualdad a fin de que quede equilibrada.

Curiosidad 8: Continuando la línea de las curiosidades anteriores, con esta curiosidad de pretende introducir la importancia a la representación simbólica, pues un símbolo iconográfico representa una noción, muchas veces, extensa de verbalizar. Los símbolos iconográficos representan en gran parte, la base de esta propuesta didáctica, pues estas representaciones visuales están cargadas de información y conocimiento, traspasadas de generación en generación. Se recomienda enfatizar que los elementos iconográficos son la base de las siguientes clases, para lo cual resulta interesante pensar sobre los diferentes símbolos e íconos que conocemos, y sobre los que utilizamos en nuestra cultura.

Curiosidad 9: Esta curiosidad es una breve anécdota respecto a la demostración del último teorema de Fermat, el cual no pudo demostrar mientras vivías, pues la demostración se consiguió en 1995, con una matemática mucho más moderna que la existente hace casi 400 años atrás (cuando Fermat planteó su teorema). El énfasis está en que, durante casi 4 siglos,

se consiguió un gran avance científico - matemático simplemente intentando demostrar este teorema, lo que culminó en una amplia construcción de conocimiento debido al aporte de diferentes matemáticos (y quizás desconocidas matemáticas) que sigue vigente hasta nuestros días. La discusión apunta a que se reflexione sobre la propia experiencia, y de cómo aprendemos de ella (ya sea la propia, o la ajena) a pesar de no conseguir nuestro objetivo, pues como seres humanos, tenemos una gran carga de vivencias que guían nuestro sentir y actuar, de la misma manera en que, gracias a las aportaciones de diferentes personas, es posible resolver problemas matemáticos complejos como el último teorema de Fermat, y por qué no, que gracias a las aportaciones de diferentes personas en nuestra vida, podemos resolver nuestros propios conflictos.

Curiosidad 10: Ya en esta curiosidad se estima que los y las estudiantes hayan relativizado el origen y evolución de las matemáticas, como también su significado e importancia. Las preguntas van dirigidas al fin de las matemáticas de tal manera que el docente puede verse involucrado en la construcción social e histórica que estas han ido sufriendo. Se destaca el hecho de que para cada época se fueron dando distintos conocimientos y cada una tenía su utilización próxima, donde cada persona podría aprovechar el material ya escrito para construir nuevos saberes. Lo que hoy se conoce como matemáticas en los colegios no es más que un conjunto de saberes que en muchas ocasiones no se contextualiza ni se les da un significado, ya sea de aprovechamiento en alguna situación dada o para fines espirituales o culturales en general, de esto se desprenden los conocimientos precolombinos de las matemáticas así también de la cultura mapuche y sus tejidos.

El objetivo de esta actividad es desarrollar la noción de que el conocimiento es construido en comunidad, donde cualquier ciencia (por ejemplo, la matemática) es una construcción desde prácticamente los inicios de la humanidad, destacando además el conocimiento matemático no institucional que existía, o que incluso sigue vigente, en otras culturas (se proponen 45 minutos para esta reflexión)

Con el fin de contextualizar respecto al conocimiento matemático existente en la cultura de un pueblo que se ubica en territorio chileno, se menciona la iconografía presente en los textiles Mapuches, enfatizando en la importancia que adquiere el significado y la representación en su diario vivir, pues cada elección de las prendas, y del ícono utilizado, posee un significado (siendo un elemento en común con diferentes culturas precolombinas).

Luego se hace entrega a los y las estudiantes de los manipulativos elaborados para que circulen por todos los grupos. Una vez que cada grupo haya manipulado el material, se realiza una lluvia de ideas respecto a qué conocimiento matemático se evidencia en él, guiando hacia el concepto de isometrías, y explicitando como cada una de ellas está presente en los manipulativos en colaboración de los y las estudiantes. Esta actividad exploratoria dará alusiones al estudiante de lo que significa la rotación, reflexión y traslación de manera general, de tal forma que la próxima clase se formalice el conocimiento.

CIERRE

Finalmente, se les dan las instrucciones a los y las estudiantes para que en sus hogares vean los siguientes videos de isometrías (rotación: <https://www.youtube.com/watch?v=ON1vmae39rQ>, traslación: <https://www.youtube.com/watch?v=QW602kH52Ec>, reflexión: <https://www.youtube.com/watch?v=Z8FWFvfNcsY> , en este caso solo se tomará en cuenta la simetría axial) antes de la próxima clase. Esto se realiza con el fin de prepararlos para el siguiente encuentro, donde se verá de manera concreta cada uno de los tipos de isometrías ya mencionados. Para ello se dejan las siguientes preguntas planteadas: ¿Qué es una rotación, traslación y reflexión?, ¿En qué se diferencia cada una de ellas? (rotación, reflexión y traslación), ¿Qué elementos tiene cada una de ellas?. Se les deja entendido a los y las estudiantes que la próxima clase se partirá preguntando al azar por estas cosas. Posteriormente se otorgan 3 minutos (aprox.) para que cada grupo comente la clase respecto a lo que les haya llamado la atención, gustado/disgustado y den una definición de isometrías. Se solicita la palabra a un integrante de cada grupo y se sintetiza mencionando que en las próximas clases el

aprendizaje está orientado a realizar diferentes isometrías para culminar en un trabajo final, donde deberán realizar un ícono significativo en base a isometrías. Se agradece la participación de todos y todas.

- **CLASE 2: "COMPARTIENDO KIMÜN" (COMPARTIENDO CONOCIMIENTO).**

INICIO

Activar los conocimientos con los manipulativos y con apoyo visual de algunas imágenes que evidencien isometrías (<https://bit.ly/2sUSUkH>, <https://bit.ly/2Mfgcuz>, <https://bit.ly/2MbwiFy>), y consultando sobre la tarea entregada la clase anterior.

DESARROLLO

Luego de la activación del conocimiento anclando las ideas mencionadas con anterioridad, se retoma lo que visualizaron en los videos a fin de formalizar el contenido de Isometrías, definiendo las 3 isometrías a estudiar: Rotación, traslación y reflexión, y sus respectivos elementos característicos: vector de traslación, centro de rotación y eje de simetría respectivamente (recurrir al manipulativo), siendo éstas anotadas por los y las estudiantes. Como orientación, se recomienda dar ejemplos cotidianos para cada isometría (solicitando la participación de los y las estudiantes) como, por ejemplo:

Traslación: Abrir un cajón, la apertura de puertas de un ascensor o del metro, el movimiento de una cinta transportadora.

Rotación: Movimiento de las articulaciones, abrir una puerta o ventana con bisagra, levantar mancuernas con un brazo, rotación de planetas en torno a su eje.

Reflexión: Reflejo en el espejo plano, una posible simetría de la cara o del cuerpo humano.

Luego se hace alusión al plano cartesiano y como cada una de ellas se puede realizar sobre un plano, en este sentido el profesor da ejemplos de rotaciones, traslaciones y reflexiones simples en el plano de tal manera que se asemeje a las actividades que posteriormente vendrán.

Contando de apoyo de la guía del Apéndice 2.2: Compartiendo Kimün, se indica a los y las estudiantes que deberán realizar individualmente (pero contando con el apoyo de todos y todas, pudiendo así satisfacer sus dudas) la guía de trabajo. Esta apunta a construir, utilizando una misma isometría, un ícono significativo para el pueblo mapuche, permitiendo ejercitar cada una de las isometrías a estudiar. El material creado consiste en 3 guías, una para cada isometría a estudiar. Se recomienda que cada grupo realice sólo una guía, y que expongan los procedimientos realizados y los comparen con el de otro grupo que también haya trabajado esa guía.

Una guía, la que aborda Traslaciones, señala que se deben realizar un máximo de 7 traslaciones indicando el vector de traslación (si bien pueden realizarse con menos considerando un vector diagonal, se desconoce si el curso ya abordó el "Teorema de Pitágoras", por eso se acordó que puedan realizar dos traslaciones a cada figura, pero sí deben identificar al menos un vector de traslación diagonal). Es importante que se generen los espacios de confianza para que puedan resolver sus dudas como grupo, o recurrir a otro. El ícono formado en esta actividad es la chakana (o cruz del sur), que si bien no es exclusivo de la cultura mapuche, representa el puente o escalera que permitía al hombre andino mantener latente su unión al cosmos.

A saber:

Chakana: palabra compuesta del quechua, *chakana* viene del verbo *chakay* que significa "cruzar", "trancar la puerta o entrada", más el sufijo obligatorio *-na* que le convierte, añadido a un radical verbal, en sustantivo. Chakana entonces es el "cruce", la "transición" entre dos puntos, el "puente" como nexo entre dos regiones¹¹. También se interpretan como las zonas de transición entre un estrato a otro, entre un período a otro, entre una entidad a otra Son de vital importancia para la génesis, el fomento y conservación de la vida. Estas zonas de transición, "chakanas" o

¹¹ Tone, M., & Edward, F. (2009). Identidad latinoamericana como chakana en el marco de la filosofía intercultural desde Josef Estermann.

“puentes cósmicos”, se constituyen en relaciones **pachasóficas** indispensables para el equilibrio y la armonía de todo el universo. La gran mayoría de los rituales andinos se “ubican” en estas zonas y tienen que ver con los fenómenos que tienen característica de *chakana*. La Cruz Andina es la *Chakana* por excelencia, porque articula el estrato de arriba (*hanaq/alax pacha*) con el estrato de la cotidianeidad del aquí y ahora (*kay/aka pacha*), pero también la esfera izquierda asociada con lo femenino, con la esfera derecha de asociación masculina. O, en otras palabras: la Cruz Andina articula las relaciones de correspondencia con las de complementariedad, y se convierte, por tanto, en *chakana* de las *chakanas*. El cuidado y la conservación de estas *chakanas* son de vital importancia para salvaguardar el equilibrio social, económico, religioso y **ecosófico**. Estermann, J. (2016). Ecosofía andina. *Revista FAIA*, 2(9-10).

Estermann (1998, 111) sostiene que los pueblos andinos indígenas tienen no solo su propia historia, sino también su filosofía, “pacha-sofía” es decir su forma de entender el mundo. La racionalidad andina se expresa en una serie de principios que son la base para la pacha-sofía, estos principios son: la relacionalidad, la correspondencia, la complementariedad y la reciprocidad.

Por otro lado, Ecosofía, engloba e integra tanto el aspecto económico como ecológico. No se trata de una “ley” ni de una “razón” humanas que diseñan esta “casa” cósmica (oikos), sino una sabiduría que sepa acompañar los ciclos vitales de producción, reproducción, conservación y cuidado, y vigilar sobre el equilibrio muy precario que mantiene las relaciones vitales. (Estermann, J. (2013). Ecosofía andina: un paradigma alternativo de convivencia cósmica y de Vivir Bien. *Revista FAIA*, 2(9), 2-21.

La otra guía, para abordar Rotaciones, consiste en el ícono Wüñelfe (“portador del amanecer” o “lucero del alba”), una estrella de ocho puntas, que puede formarse con la rotación de un patrón. Fue utilizada en el logo de la Copa América 2015 (<https://bit.ly/2LCD3PG>).

Wuñelfe, del mapudungun “lucero del alba”, en la cultura Mapuche representa uno de los dioses mayores el cual ayuda a la machi al amanecer para realizar rituales terapéuticos, brindando el conocimiento de éste por medio de los sueños (Grebe, M. E. (1973). *El kultrún mapuche: un microcosmo simbólico*. Revista musical chilena, 27(123-1), 3-42).

Por último, la guía de Reflexión, está diseñada para que reflejen un ícono que representa una araña. En la cultura mapuche, las mujeres que tejen fueron instruidas por otra maestra tejedora o *düwekafe*, y según Matilde Painemil (*düwekafe*) “nacían las niñas y las llevaban donde hubiera más tela de araña, y esa tela de araña se la pasaban por las manos para que así fuera una buena hilandera, una buena tejedora”. Afirma que una gran tejedora adopta a una alumna, le enseña todo y después, al final de su proceso de aprendizaje general, le enseña a tejer. (Loyola, 2015).

Tras dejar un tiempo considerable para que terminen la actividad (1 hora), se realizan para todo el grupo (pudiendo diferentes grupos explicar el procedimiento mientras el profesor guía y formaliza los procedimientos matemáticos también, fomentando nuevamente las habilidades oratorias de los y las estudiantes). Se propone que también, el/la docente genere un diálogo respecto a la significancia de cada ícono, a través de preguntas del tipo “¿han visto este ícono? ¿dónde? ¿pensarían que significa lo que representa para el pueblo mapuche?” Y las preguntas que salen también en su guía: “¿tenemos en nuestra cultura algún ícono que tenga una significancia similar?” guiando el ejemplificar con otros íconos que puedan ser significativos para nosotros (como las decoraciones navideñas, donde el ícono del pino es una representación plana de un árbol de pino, o los íconos utilizados en fiestas patrias, como el copihue), o el actual uso de emojis, atribuyéndole importancia a las representaciones simbólicas, y el entendimiento de que éstas representan también parte de la identidad y del conocimiento de una cultura.

CIERRE

Tras formalizar y finalizar el espacio de conversación del significado de los íconos, resulta

importante evaluar la participación y el desempeño del grupo con la rúbrica. Además, solicitar para la próxima clase el traer, por grupo, una hoja de block N°99¼ cuadrículada (deben cuadrificarla a mano, o pegando hojas con alguna cuadrícula encima) **de celdas de 2cmx2cm**. Como cada clase es evaluada y con una calificación acumulativa, el traer el material influye positiva, o negativamente, en la calificación (idealmente, guiar a que cada grupo consiga organizar quién o cómo distribuirán el trabajo para traer el block cuadrículado).

- **CLASE 3: "COMPARTIENDO KIMÜN" (COMPARTIENDO CONOCIMIENTO).**

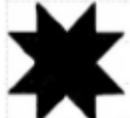
INICIO

Como ya se ha dicho, se espera que los y las estudiantes ya cuenten con la sala distribuida en grupos de trabajo; en caso contrario, es en el inicio donde deben hacerlo. Se propone activar los conocimientos de los y las estudiantes mediante los íconos vistos la clase anterior, realizando un recuento de las isometrías estudiadas y el significado de cada ícono. Luego de eso, se propone enunciar las instrucciones de las actividades a realizar, la que consiste en trabajar de manera grupal realizando una secuencia de isometrías hasta conseguir la orientación esperada de un ícono mapuche (diferente a los vistos anteriormente). Tras conseguirlo, deberán plasmarlo en el block cuadrículado solicitado la clase anterior, con el fin de comunicar y explicar al grupo curso el trabajo realizado, reflexionando también sobre la representación simbólica.

DESARROLLO

Luego de hacer entrega de las guías, se recomienda leer las instrucciones en conjunto, y recorrer la sala buscando apoyar y resolver dudas de los y las estudiantes mientras la realizan. El objetivo de la guía es componer rotaciones, reflexiones y/o traslaciones a un objeto (ícono mapuche) para conseguir una imagen deseada (el ícono en diferente posición y orientación). Deberán justificar cada procedimiento realizados en términos de vector de traslación, eje de simetría y centro y ángulo de rotación en el espacio designado en la guía. Se han diseñado 5 guías con diferentes íconos e imágenes a obtener, así, se recomienda que cada dos grupos cuenten con la misma guía, para facilitar la presentación final (donde solo sería necesario que uno de ellos presente sus procedimientos, y se compare brevemente con los realizados por el otro grupo). La guía cuenta con el ícono "recortable", con el fin de que no se dificulte el dibujo del icono una y otra vez. Así, tras desear hacer una isometría, dibujarán el ícono que han cortado siguiendo los bordes, y justificando la isometría en el espacio designado. Al realizar otra, se repite el proceso, hasta conseguir la imagen deseada. Si bien cada integrante cuenta con su guía individual para intentar realizar las isometrías, la presentación debe realizarse en el block cuadrículado, pues es de mayor tamaño y permite visualizar mejor al resto del grupo los pasos realizados. Como cada guía cuenta con una descripción del ícono asignado, también se desea que en la presentación aborden una breve descripción de este. El rol del/a profesor/a resulta esencial para guiar el formalismo matemático y para enriquecer el diálogo respecto a los significados. Los íconos presentes en la guía son:

ÍCONO	SIGNIFICADO
<p>Chakana</p> 	<p>Es una representación iconográfica diferente a la anterior, pero chakana igualmente. Representa un nexo, o puente, entre dos regiones.</p>
<p>Mauñimin</p>	<p>Diseño de cadenilla que representa la unión de todas las comunidades Mapuche.</p>

	
<p data-bbox="402 363 548 394">Wenumapu</p> 	<p data-bbox="662 363 1437 426">Símbolo del cosmos y del cielo. También representa aspectos de la vida no terrenal.</p>
<p data-bbox="418 583 532 615">Wuñelfe</p> 	<p data-bbox="662 583 1437 730">Del mapuzungun "lucero del alba" o "portador del amanecer", es una estrella de ocho puntas que representa uno de los dioses mayores, quien ayuda a la machi al amanecer para realizar rituales terapéuticos, brindando el conocimiento de éste por medio de los sueños.</p>

CIERRE

Luego de que los grupos expongan, justificando geoméricamente los pasos para la elaboración del ícono, parte de la evaluación consiste en realizarles preguntas del tipo: "¿Cuál creen ustedes que es la importancia de los íconos para una sociedad, comunidad o grupo?", Se realiza una síntesis y la apreciación de los y las estudiantes respecto a la actividad realizada, como también, generar una discusión respecto a la necesidad de elaborar íconos en diferentes culturas: "¿Cuál es el origen de los iconos?", guiando la discusión a que los íconos son corresponsales de las culturas, y una forma de representar la identidad de cada una. Se debe anunciar también que la próxima clase consistirá en la evaluación final del contenido.

- **CLASE 4: "IÑCHE" (YO SOY).**

Resulta necesario mencionar que, en esta penúltima clase, se pretende trabajar el sentido de pertenencia, atribuido a la importancia de los significados para un grupo social, y donde el nombre elegido para cada grupo en la primera clase adquiere una mayor importancia, pues deberán diseñar un ícono que represente el nombre escogido, la cual será la evaluación final.

Esta clase no cuenta con guía de trabajo, ya que se pretende, por medio de estas indicaciones, que se pueda realizar la actividad esperada, destinando el tiempo para el diseño y elaboración de su ícono representativo. Este icono deberá plasmar los valores y características que destacarían los estudiantes del grupo en colaboración con el docente a cargo.

INICIO

Como en cada clase se ha abordado el tema de la importancia de los íconos y su significado, se enuncia que en esta clase cada grupo deberá crear un ícono que los represente como grupo, relacionado al nombre que se otorgaron. La idea es dar cuenta sobre cómo las tejedoras mapuche (según indica diferente bibliografía) diseñaban un ícono para ser plasmado en su textilería, pues intentan muchas veces representar un objeto en tres dimensiones, en un diseño textil de dos. Se recomienda mencionar ejemplos de esto en nuestra cultura, tal como se mencionó en una clase anterior el copihue, un ícono típico de fiestas patrias, que representa en dos dimensiones un objeto que en realidad es en tres dimensiones. Las orientaciones a tener en cuenta, es que intenten representar en un objeto el nombre de su grupo. Idealmente, que algún aspecto característico pueda ser representado con figuras geométricas, para que así esas características puedan ser apreciables en una representación plana (por ejemplo, una nariz

puede ser un triángulo, y si es algo que resalta, puede hacerse un triángulo de mayor tamaño). Otro ejemplo es el dibujo animado Peppa Pig (<https://bit.ly/2JLfYgB>), donde, a pesar de ser en dos dimensiones, es posible apreciar todos los rasgos característicos (dos ojos y el hocico, al mismo tiempo, a pesar de estar de perfil).

DESARROLLO

Tras esos ejemplos, y enfatizar sobre el sentido de pertenencia, se dan las instrucciones para la evaluación final:

- Cada grupo deberá diseñar un ícono para representar el nombre elegido en la primera clase (de ahí la importancia de que el nombre haya sido elegido con anterioridad, para fomentar las habilidades creativas de los y las estudiantes, pues si en ese mismo instante eligieran el nombre, puede ocurrir que elijan uno “fácil de diseñar”, o quizás, explícito).
- Como ayuda, pueden guiarse con lo expuesto al inicio. Es decir, escoger un elemento de 3D (puede ser algún integrante del grupo, o algún objeto de pertenencia) y realizarlo en 2D (por ejemplo, marcando los bordes) y añadiendo elementos característicos (una nariz grande, por ejemplo, representada con un triángulo grande).
- Teniendo la base del diseño, cada integrante deberá adicionar una isometría (mínimo) para complementar o decorar el diseño.

Los y las estudiantes contarán con toda la hora para la realización del diseño, siendo el trabajo evaluado con la rúbrica de las otras clases para finalmente, presentar su diseño, y las justificaciones emocionales y matemáticas correspondientes, en la clase siguiente y final del contenido.

CIERRE

Motivar a los y las estudiantes en su diseño, y que debe ser traído finalizado la próxima clase.

• CLASE 5: NÜTRAM

Nütram no posee una definición textual, más tiene su origen en la lengua mapuzungun y hace referencia a un espacio de conversación formando un círculo con los integrantes. Por aquella razón se decide titular así a esta última sesión, pues se espera que, formando un círculo, simulando una comunidad en torno a una ruka de algún lof, cada grupo exponga su diseño, y se puedan compartir experiencias y apreciaciones de las clases realizadas.

INICIO

La distribución de esta clase será en un círculo, siendo importante explicar al grupo el por qué, pues como se diría en mapuzungun, se realizará un nütram.

Idealmente, también agradecer la participación de todas y todos por la disposición a presentar sus diseños, generando las condiciones para la clase.

DESARROLLO

Los grupos exponen sus trabajos, mostrando el diseño como también comunicando los procedimientos matemáticos realizados y las justificaciones del diseño, es decir, el cómo éste los representa.

Es importante que también en esta sesión pueda realizarse una retroalimentación de las clases, retomando la discusión que se dio al inicio de la propuesta, en la primera clase:

¿Qué significa para ustedes la matemática, la geometría?

¿Es un conocimiento que esté acabado?

¿Cómo se ha desarrollado el conocimiento?

¿Qué importancia tienen las relaciones humanas y sociales en el desarrollo del conocimiento?

¿Qué importancia tienen los símbolos e íconos en las diferentes culturas?

¿Han obtenido nuevo conocimiento sobre la cosmovisión Mapuche?

¿Por qué creen que, a pesar de la cercanía, conocen poco sobre el pueblo Mapuche?

Se espera que desarrollando la secuencia, estas preguntas puedan ser abordadas de manera reflexiva y bajo una perspectiva etnomatemática, es decir, con la noción de que el conocimiento, incluso el matemático, es contextual y no es aislado de las actividades humanas. Así, estas preguntas pueden ser realizadas a los grupos al momento de exponer, y también solicitar una breve apreciación de qué les han parecido las clases, para tener como docente, la retroalimentación de los y las estudiantes y enriquecer nuestra práctica pedagógica.

CIERRE

Se realiza una síntesis de lo expuesto, recogiendo las ideas centrales de cada grupo, realizando una invitación a no dejar de cuestionar las diferentes situaciones que se presentan en nuestro día a día.

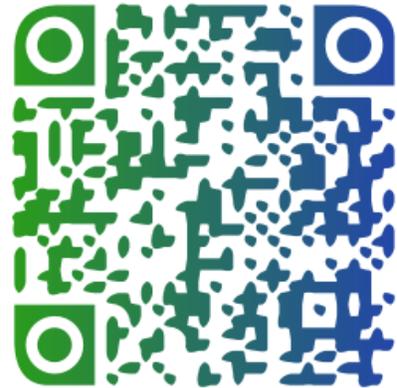
Apéndice 2: Guías Propuesta Didáctica

Apéndice 2.1, “Epew”, Clase 1.

Curiosidades Matemáticas.

El siguiente material está destinado a que el o la docente distribuya una y sólo una “Curiosidad matemática” a cada grupo.

Se expone al lado un Código QR mediante el cual se puede tener acceso a la totalidad de las Curiosidades.



Curiosidad 1.

La geometría (medición de tierra) se inició, en el antiguo Egipto y en Babilonia, estando íntimamente ligada a las mediciones prácticas, como la necesidad de realizar mediciones terrestres para sus cultivos y repartir terrenos. La geometría no era sino una cosa más entre las muchas de la vida diaria, a las cuales era posible aplicarles los métodos aritméticos.

Conseguían calcular el área de un círculo, de un triángulo, un trapecio. Volúmenes de prismas rectos, de cilindros, y pirámides cuadrangulares. Los egipcios se acercaron al número π , al dividir muchas veces un círculo en cuadrados pequeños, traspasando su conocimiento a través de íconos en las paredes, o en papiros.

Si hay algo que caracteriza la ciencia del Antiguo Egipto es que se enseñaba lo mismo durante siglos, considerándose que la evolución del conocimiento entre los 2mil o 3mil años de existencia, fue mínima. Los papiros representan métodos de resolución de problemas, la comprobación de las fórmulas, más no una demostración formal.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

¿Cuál era el objetivo de hacer y enseñar geometría, en el antiguo Egipto y en Babilonia?

¿Para qué nos sirve la geometría?

¿Qué similitudes y/o diferencias pueden mencionar entre el desarrollo del conocimiento egipcio y su enseñanza, con la manera de hacerlo hoy en la sociedad actual?

Curiosidad 2

A finales del siglo XVI, un gran matemático francés, François Viète , descifraba con toda facilidad los mensajes secretos de los ejércitos españoles de Felipe II . Los españoles no lo dudaron ni un instante y acusaron a Viète, ante el Papa, de estar aliado con el diablo.

El rey francés Enrique IV, ordenó a uno de sus mejores matemáticos a su servicio que analizara el mensaje y lo descifrara. Tardó unos seis meses, pero al fin, **Francois Viète**, que así se llamaba, consiguió descifrar el código español.

En 1591 el matemático francés François Viète desarrolló una notación algebraica muy cómoda, representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes. Gracias al trabajo de Viète, Enrique IV pudo anticiparse a las decisiones de Felipe II en Francia. Resultado de lo anterior, fue una gran victoria para los franceses: la Santa Liga perdió su influencia en Francia y Enrique IV se hizo con el trono de Francia.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

¿Cuál será el fin hoy en día, de utilizar letras en vez de números?

¿Crees que es necesario seguir utilizando las letras?

Se pretende que los y las estudiantes puedan entender el significado histórico del uso de letras en matemáticas, del cuál se puede modelar o resolver problemas de tal manera que una misma expresión sirva para una gran cantidad de casos distintos, simplificando los cálculos.

Curiosidad 3

El origen de los números negativos se sitúa en la India, donde los matemáticos del siglo VII **los usaban para indicar deudas**. Con el desarrollo del comercio, se introdujo la noción de créditos y deudas, determinando gradualmente la introducción de nuevos números: los negativos, que sin el amparo de la categoría «deuda», probablemente no habrían sido comprendidos. De hecho, en diferentes civilizaciones posteriores al avance hindú, muchos ilustrados rechazaron, por mucho tiempo los números negativos, pues no los comprendían. En Europa los números negativos fueron introducidos por Leonardo de Pisa en el siglo XIII y hasta muy entrado el siglo XVIII no habían sido aceptados por muchos matemáticos destacados.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

¿Los números negativos se inventaron, o se descubrieron?

¿Qué otras situaciones se pueden representar con números negativos?.



Curiosidad 4.

En la antigüedad al momento de comerciar entre distintas civilizaciones ocurrieron grandes inconvenientes ya que la variedad de unidades de medidas o de peso era bastante grande. Hay que tener en cuenta que desde el 5000 a.C las civilizaciones ya tenían distintas maneras de medir objetos, por lo que transcurridos los años estas unidades serían cada vez más entre los pueblos. Es por ello que en 1795 se crea por primera vez el metro como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el polo de la línea del ecuador terrestre.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

El metro se crea a partir de un problema existente en ese entonces, ¿Es de utilidad en el día de hoy? ¿Por qué?

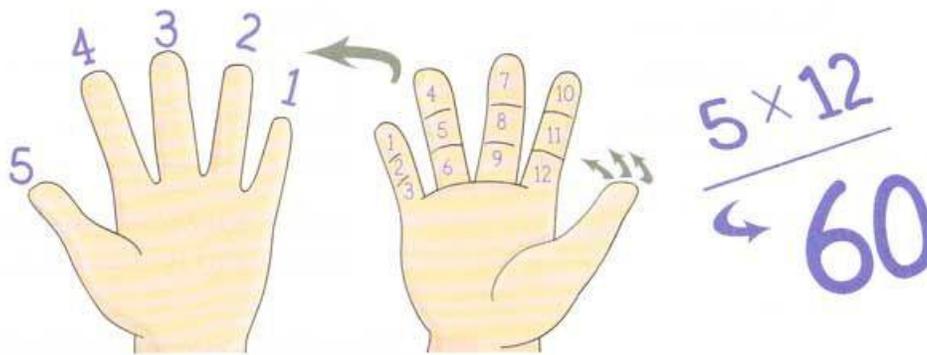
El conocimiento matemático surge por ¿necesidad o aburrimiento? Expliquen su respuesta.

Si consideran que las matemáticas tienen un sentido, ¿cuál es el objetivo de continuar desarrollando conocimiento matemático?

Curiosidad 5

El sistema sexagesimal de numeración que usamos hoy en día para las horas y los minutos tiene su origen **en la antigua Babilonia (2500 a.C)**, lo hicieron dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Esta forma de contar ha sobrevivido hasta nuestros días.

Por otro lado, este sistema se remonta a la manera de contar con los dedos, contando con el dedo pulgar, cada falange del resto de la mano (es decir 3 falanges por cuatro dedos). Al levantar un dedo la otra mano (la que está libre) cada vez que llegamos a 12, obtenemos el número 60.



REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

¿Cuál es el sistema de numeración más utilizado?

¿De qué otras maneras podrías contar con los dedos?

Curiosidad 6

Al-Jbr, del árabe “Restaurar”, es el origen de la palabra Álgebra. Procede del matemático **al-Juarismi**, quien consideraba que el álgebra era un arte para simplificar los desafíos matemáticos de la vida, pues disfrutaba de reducir y simplificar lo complejo, y ponerlo al servicio de las personas. Con ese propósito, para pulir un enunciado, era necesario aislar una variable, y reducirla en su máxima expresión. Sienta así, las bases del álgebra, pues entendía las matemáticas desde una perspectiva de restauración, de volver un objeto matemático, en algo puro, y comprensible. Al-Juarismi está considerado el padre de la numeración arábiga. En resumen, realizar operaciones a ambos lados de la ecuación a fin de obtener lo más resumido.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

De acuerdo con lo leído, ¿En qué situaciones consideran que las matemáticas han estado al servicio de las personas?

¿Son utilizadas las matemáticas con un fin práctico o simplemente nos complican la vida?

¿Conocen algún ejemplo donde el saber matemático ha dado solución a un problema de la vida diaria?



Curiosidad 7

En el siglo III, Diofanto de Alejandría enunció las reglas para resolver ecuaciones de primer y segundo grado, pues ya estaban asentadas las bases del álgebra.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

De acuerdo con lo leído, ¿Consideran que hoy en día están las matemáticas al servicio de las personas?

¿Por qué?

¿Son utilizadas las matemáticas con un fin práctico o simplemente nos complican la vida?.

¿Conocen algún ejemplo donde el saber matemático ha dado solución a un problema de la vida diaria?

Curiosidad 8

A pesar de existir métodos para resolver ecuaciones, reduciendo términos semejantes y balanceando ambos lados de una ecuación desde el siglo III, el símbolo de las dos rayas = (que indican igualdad) fue inventado por el matemático inglés Robert Recorde, recién en el año 1557. Del mismo modo, a pesar de existir métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado, el símbolo de “raíz” **se empezó a usar en 1525.**

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

¿Imaginan alguna manera de representar una igualdad, o una raíz cuadrada, sin la utilización de algún ícono? ¿Cómo pudieron haberlo planteado en la antigüedad?

¿Qué símbolos utilizan ustedes, en la actualidad, para comunicarse?



Curiosidad 9

En el siglo 17, el político y matemático aficionado Pierre de Fermat afirmó que no es posible encontrar 3 números naturales que encajen en el patrón $a^n + b^n = c^n$ cuando se eleva a una potencia superior a 2 (cuando n es mayor a 2).

Muchos matemáticos intentaron demostrarlo (o falsearlo) durante siglos, siendo considerado el problema más difícil de demostrar durante 360 años, hasta que finalmente, en 1995, el matemático inglés Andrew Wiles demostró que Fermat tenía razón, pero para hacerlo tuvo que **usar matemáticas que Fermat nunca conoció.** En la introducción de las 109 páginas de prueba de Wiles **también cita decenas de colegas, vivos y muertos, de los cuales aprovechó su conocimiento.** La búsqueda de su demostración, permitió el avance de la ciencia matemática durante los últimos cuatro siglos y en donde grandes matemáticos como Euler (1707- 1783), Lefschetz (1897-1972), Legendre (1768-1847), Germain (1776-1831), Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857), Lamé (1795-1870), Dirichlet (1805-1859), Liouville (1809-1882), Kummer (1810-1893), Volkmann (1882-1973), Taniyama (1927-1958), Shimura (1930-), Wiles (1953-) y muchísimos otros matemáticos, contribuyeron con el avance de las ciencias exactas y teoría de números.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

Pensando en sus experiencias al resolver un problema... ¿Cuál es la relación entre la manera en que los han resuelto, con la manera en que se construye el conocimiento matemático?

Curiosidad 10

En el año 2000, el Instituto Clay de Matemáticas anunció premios de 1.000.000 dólares para las soluciones a siete desconcertantes “problemas del milenio”, problemas planteados hace muchos siglos atrás por matemáticos que no contaban con el conocimiento para resolverlos. El año 2010, el instituto entregó su primer premio al ruso Grigori Perelman por resolver la conjetura de Poincaré, un problema que se remonta a 1904. Perelman rechazó el millón de dólares porque sentía que otros matemáticos eran igualmente merecedores del mismo.

REFLEXIONEMOS COMPARTIENDO NUESTRAS OPINIONES

En base a la historia leída. ¿Cuál piensan que es el fin de las matemáticas?

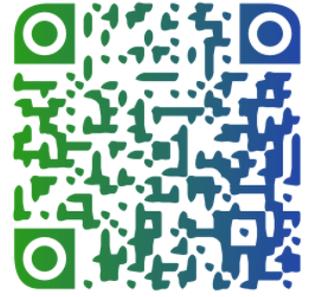
¿Hoy en día se toma en cuenta a las matemáticas como una herramienta de conocimiento o como un fin monetario?

De acuerdo con la pregunta anterior, ¿siempre fue ese el fin de las matemáticas? ¿Por qué?

Tomando en cuenta la frase: “otros matemáticos eran igualmente merecedores del mismo”, el conocimiento que hoy día vemos tanto en las matemáticas como en otras áreas, ¿Siempre fue así, o sufrió cambios en la historia?

BIBLIOGRAFÍA

- Lopez, F. (2002). *Las matemáticas en el antiguo egipto*.
- Gómez, S. (2010). *Análisis de textos cifrados de los siglos XVI y XVI*.
- Vélez, D., y Varela, O. (2014). *El descubrimiento de los números negativos*.
- Estrada, H., Ruiz, J. M., & Triana, J. G. (2011). *El origen del metro y la confianza en la matemática. Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 19(1).
- Cervera, F. (2014). *Historia de los números II. Los sumerios, los babilonios y el sistema sexagesimal*.
- García, J. (2009). *Historia de las matemáticas. Capítulo I: Egipto y Babilonia*.
- [mgvalcontre]. (2016, enero 7). Origen del álgebra: Al-Juarismi [Archivo de video]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=qANaKCzyR_A
- Rouse, W. (1959). *Origen de algunas notaciones matemáticas*.
- Traducción del Artículo "Solution for Fermat's Last Theorem", por Jose William Porras publicada por la Revista Científica "General José María Córdova". Revista colombiana sobre investigación en el campo militar Vol. 14, Número 17, pp 412-418. Enero-junio 2016.
- Actualidad RT. (2010). Rechaza un millón de dólares por "integridad matemática". Recuperado de <https://actualidad.rt.com/actualidad/view/13710-Rechaza-un-mill%C3%B3n-de-d%C3%B3lares-por-integridad-matematica>.



Construyendo Kimün

Nombres: _____

Curso: _____

Fecha: _____

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera individual.
- Lea con atención cada pregunta.

I. Traslación

A lo largo de la historia de la humanidad, se han desarrollado distintos tipos de conocimientos que han dado significado a cada cultura, relativos a su tiempo y ubicación. En este sentido la matemática; la manera de pensarla, crearla y vivirla varía según diferentes grupos sociales y culturales.

A continuación utilizaremos las isometrías para conformar la “*chakana*”, iconografía utilizada en las distintas culturas a lo largo del territorio latinoamericano.



Sabías que...

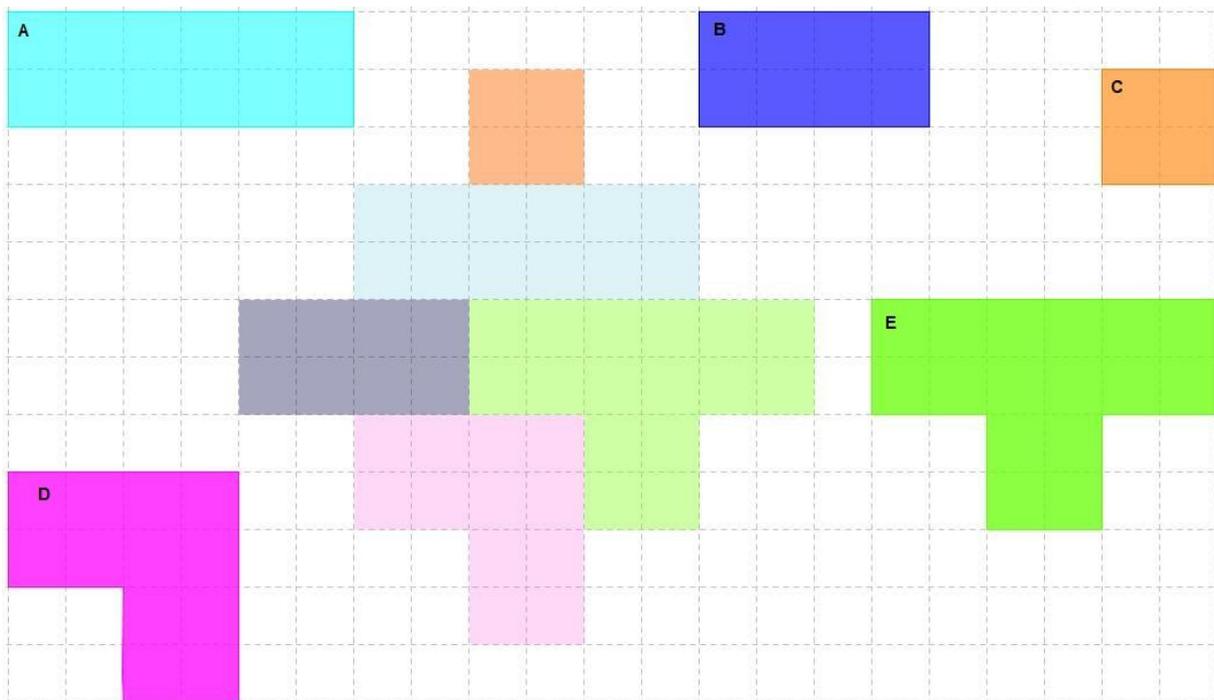
Chakana: palabra compuesta del quechua, *chakana* viene del verbo *chakay* que significa “cruzar”, “trancar la puerta o entrada”, más el sufijo obligatorio *-na* que le convierte, añadido a un radical verbal, en sustantivo. Chakana entonces es el “cruce”, la “transición” entre dos puntos, el “puente” como nexo entre dos regiones.¹ La Cruz Andina es la

Actividad

Con la ayuda del grupo, realice traslaciones según corresponda, con el fin de conseguir la figura esperada.

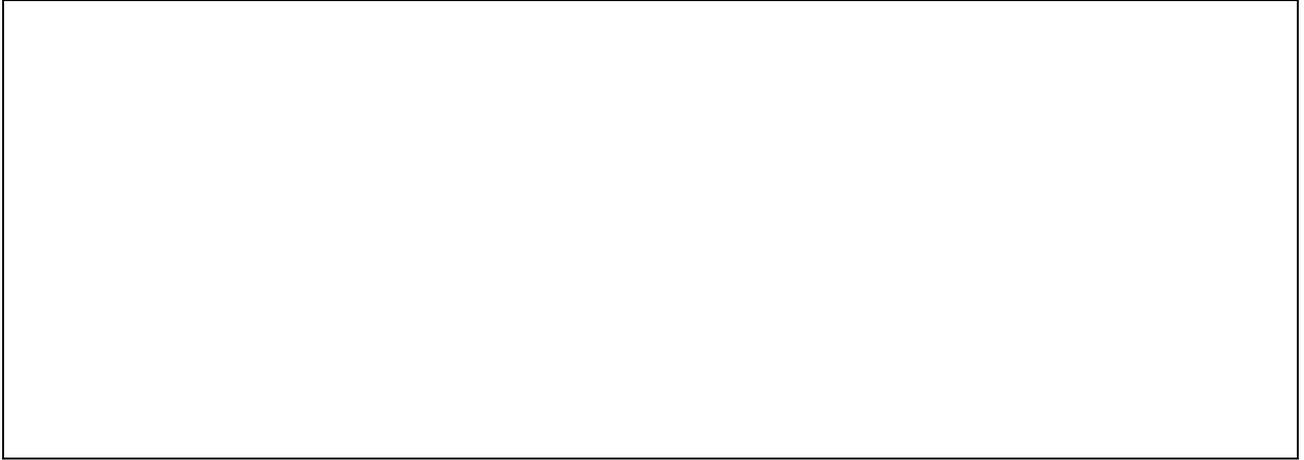
Debes cumplir las siguientes reglas:

- Describir las traslaciones realizadas a cada figura.
- Completar la figura con no más de siete pasos.

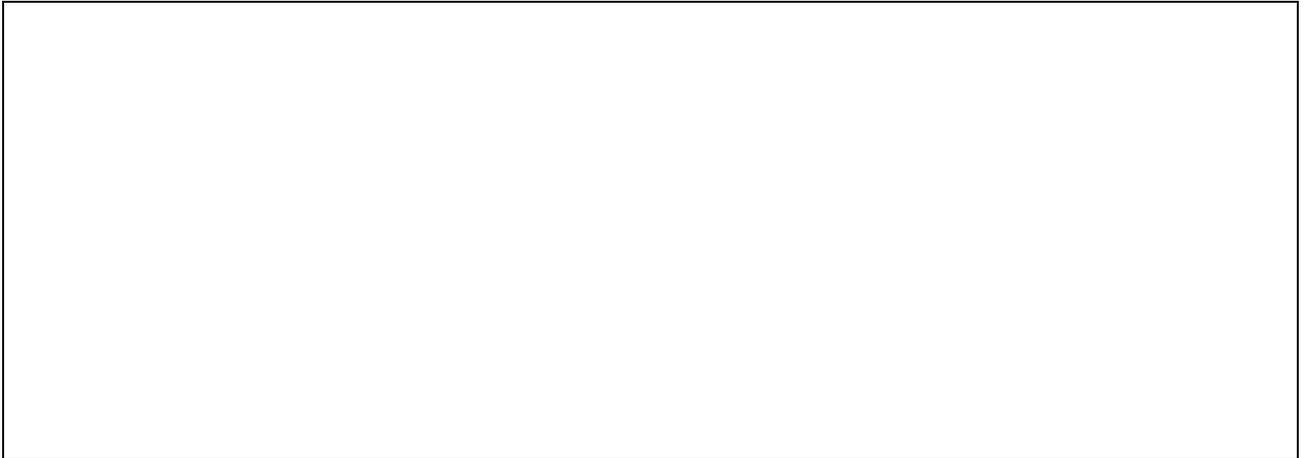


Enumerar y describir cada traslación para la figura A.

Enumerar y describir cada traslación para la figura B.



Enumerar y describir cada traslación para la figura C.



Enumerar y describir cada traslación para la figura D.



Enumerar y describir cada traslación para la figura E.

Para Reflexionar:

- ¿Existe un ícono en su cultura que tenga un significado similar al que se les asignó durante el desarrollo de la guía?
- ¿Por qué piensan que las culturas crean íconos?



Construyendo Kimün

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera individual.
- Lea con atención cada pregunta.

II. Rotación

Al momento de centrar nuestra mirada en las diferentes simbologías dentro las culturas latinoamericanas, africanas, europeas, etc. entendemos que su invención agrupa diferentes significados y sentidos característicos de sus experiencias de vida y comunidad. Uno de estos objetos-símbolos es el kultrún, pequeño microcosmo simbólico que representa al universo mapuche y, asimismo, a la machi 1 y sus poderes.¹²

Para la siguiente actividad utilizaremos el icono *Wuñelfe*, iconografía utilizada por la cultura mapuche dado su fuerte significado cultural y espiritual.



Sabías que...

Wuñelfe: del Mapuzungun lucero del alba, en la cultura Mapuche representa uno de los dioses mayores el cual ayuda a la machi al amanecer para realizar rituales terapéuticos, brindando el conocimiento de éste por medio de los sueños.

¹² Grebe, M. E. (1973). El kultrún mapuche: un microcosmo simbólico. *Revista musical chilena*, 27(123-1), 3-42.

Actividad.

Con la ayuda de su grupo, realice las rotaciones según corresponda, con el fin de conseguir la figura esperada.

Debes cumplir las siguientes reglas:

- Describir las rotaciones para cada figura.
- Completar la figura en cuatro pasos.

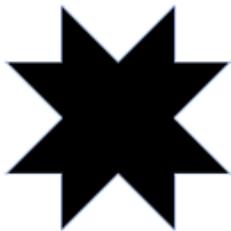
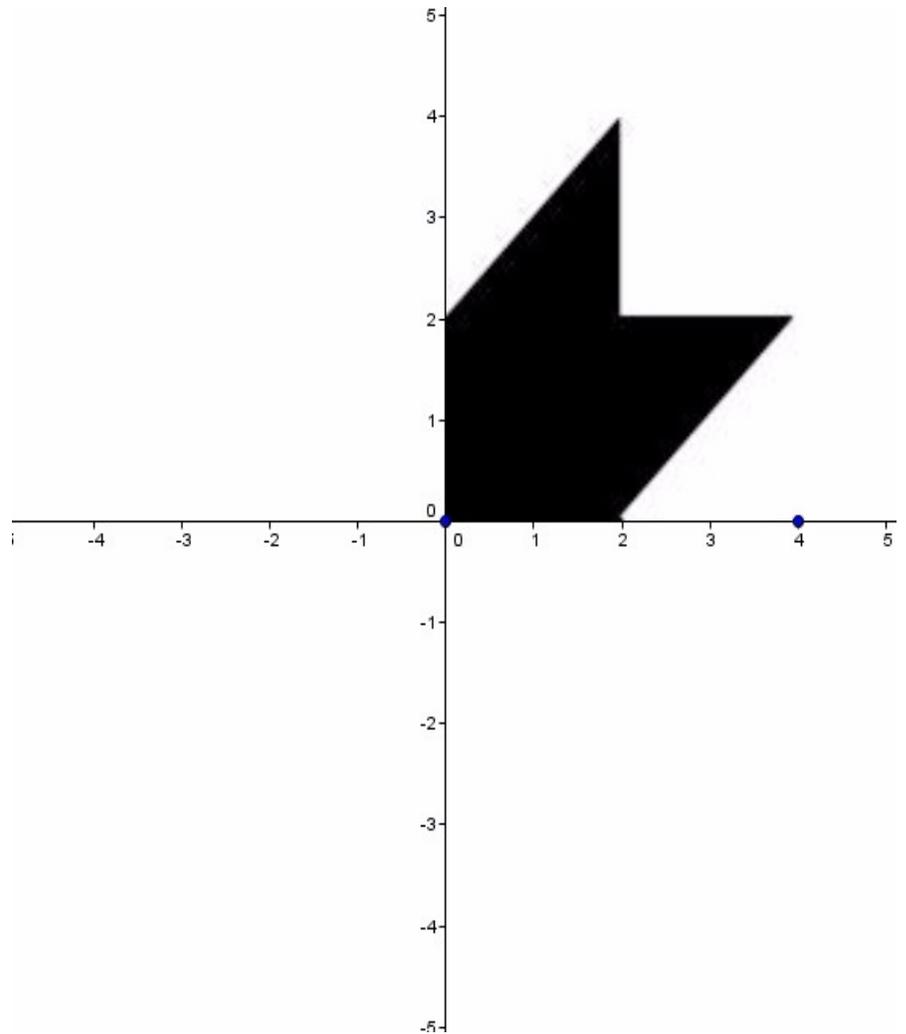


Figura Objetivo (Wuñelfe)



Describe matemáticamente cada uno de los pasos para formar la figura. Recuerda que la rotación se realiza en torno a un punto fijo por medio de ángulos. Debes indicar cada uno de esos elementos para cada rotación realizada.

Rotación 1.-

Rotación 2.-

Rotación 3.-

Rotación 4.-



Para Reflexionar:

- ¿Existe un ícono en su cultura que tenga un significado similar al que se les asignó durante el desarrollo de la guía?
- ¿Por qué piensan que las culturas crean íconos?

Construyendo Kimün

Nombres: _____

Curso: _____

Fecha: _____

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera individual.
- Lea con atención cada pregunta.

III. Reflexión o simetría

El valor y significado que contiene la textilería mapuche es de gran importancia para la comunidad en general. Hasta ahora hemos visto que la iconografía en los diferentes textiles expresa distintos significados, encerrando definiciones, saberes, emociones, creencias, ideales, etc., en su realización con el fin de transmitirlos de generación en generación.



Sabías que...

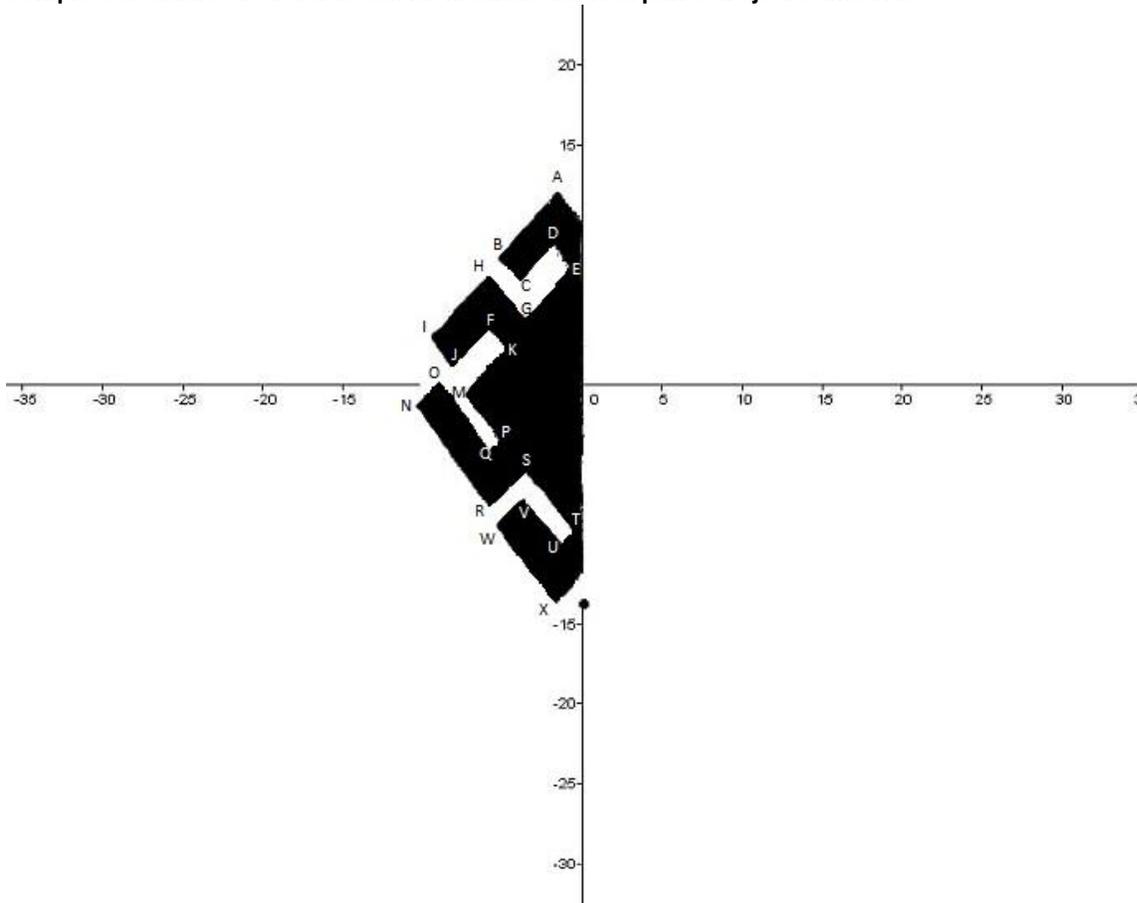
Para el caso de la textilería tenemos un ejemplo ilustrativo que se dispone sobre las futuras tejedoras. Las mujeres que tejen fueron instruidas por otra maestra tejedora o *düwekafe* y según Matilde Paineman (*düwekafe*) "Nacían las niñas y las llevaban donde hubiera más tela de araña, y esa tela de araña se la pasaban por las manos para que así fuera una

Actividad.

Con la ayuda de grupo realice la reflexión respecto al eje y según corresponda, con el fin de conseguir la figura esperada.

Debes cumplir las siguientes reglas:

- Tomar las medidas necesarias para realizar las reflexiones respecto al eje y.
- I. **Complete el cuadro de acuerdo con las medidas desde el punto al eje de simetría.**



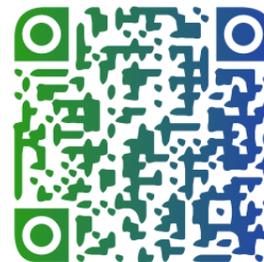
Punto a reflejar	Distancia al eje de simetría (cm)	Punto reflejado	Distancia al eje de simetría (cm)
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			
K			
L			
M			

II. Una vez completado el cuadro del punto I, indique los elementos necesarios para realizar simetría respecto de un eje.

Para Reflexionar:

- ¿Existe un ícono en su cultura que tenga un significado similar al que se les asignó durante el desarrollo de la guía?
- ¿Por qué piensan que las culturas crean íconos?





Compartiendo Kimün

Nombre:

Curso:

Fecha:

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera grupal.
- Lea con atención cada pregunta.
- Al final se realizará una exposición del trabajo realizado.

Materiales

- Una hoja de block por grupo.
- Regla.
- Transportador.
- Lápiz.
- Goma.

Actividad.

1. Dividan toda la hoja block en cuadrados de 1 cm.
2. Realice la misma figura que sigue a continuación en la hoja de block, para esto se recomienda recortar el molde adjuntado en la guía para ser utilizado como molde sobre el block.
3. Mover la figura A de tal manera que quede sobrepuesta a la figura B, utilizando isometrías (traslación, rotación o reflexión).
 - i) Describa cada paso realizado utilizando lenguaje matemático, para ello deberá indicar que isometría utilizó contabilizando cada paso.
 - ii) No puede realizar más de tres pasos en realizar el movimiento de A a B.
4. Se realizará una presentación del trabajo realizado.
5. Cada estudiante deberá presentar esta guía con el desarrollo del paso 3.i.

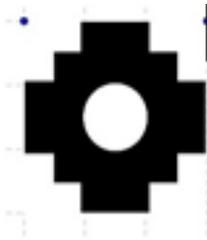
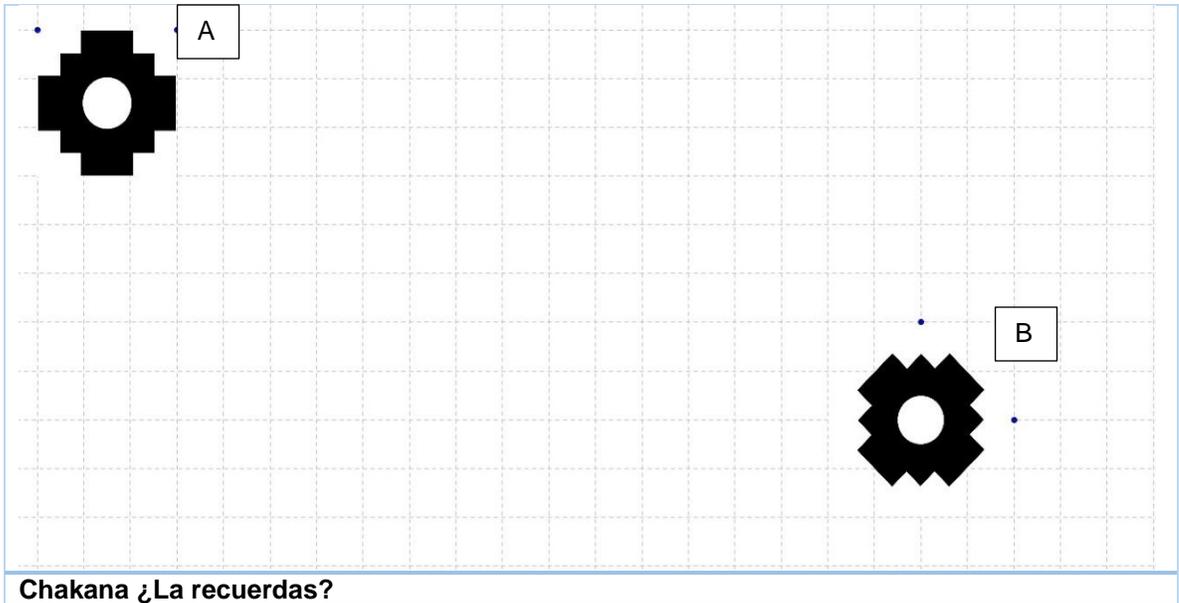


Imagen utilizada como molde sobre el block



Compartiendo Kimün

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera grupal.
- Lea con atención cada pregunta.
- Al final se realizará una presentación del trabajo realizado.

Materiales

- Una hoja de block por grupo.
- Regla.
- Transportador.
- Lápiz.
- Goma.

Actividad

1. Dividan toda la hoja block en cuadrados de 1 cm.
2. Realice la misma figura que sigue a continuación en la hoja de block, para esto se recomienda recortar el molde adjuntado en la guía para ser utilizado como molde sobre el block.
3. Mover la figura A de tal manera que quede sobrepuesta a la figura B, utilizando isometrías (traslación, rotación o reflexión).
 - i) Describa cada paso realizado utilizando lenguaje matemático, para ello deberá indicar que isometría utilizó contabilizando cada paso.
 - ii) No puede realizar más de tres pasos en realizar el movimiento de A a B.
4. Se realizará una presentación del trabajo realizado.
5. Cada estudiante deberá presentar esta guía con el desarrollo del paso 3.i.

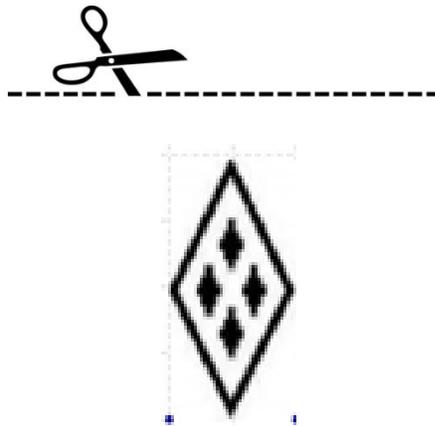


Imagen utilizada como molde sobre el block



Compartiendo Kimün

Nombre:

Curso:

Fecha:

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera grupal.
- Lea con atención cada pregunta.
- Al final se realizará una presentación del trabajo realizado.

Materiales

- Una hoja de block por grupo.
- Regla.
- Transportador.
- Lápiz.
- Goma.

Actividad.

1. Dividan toda la hoja block en cuadrados de 1 cm.
2. Realice la misma figura que sigue a continuación en la hoja de block, para esto se recomienda recortar el molde adjuntado en la guía para ser utilizado como molde sobre el block.
3. Mover la figura A de tal manera que quede sobrepuesta a la figura B, utilizando isometrías (traslación, rotación o reflexión).
 - i) Describa cada paso realizado utilizando lenguaje matemático, para ello deberá indicar que isometría utilizó contabilizando cada paso.
 - ii) No puede realizar más de tres pasos en realizar el movimiento de A a B.
4. Se realizará una presentación del trabajo realizado.
5. Cada estudiante deberá presentar esta guía con el desarrollo del paso 3.i.

Wenumapu: Símbolo del cosmos y del cielo. También representa aspectos de la vida no terrenal.

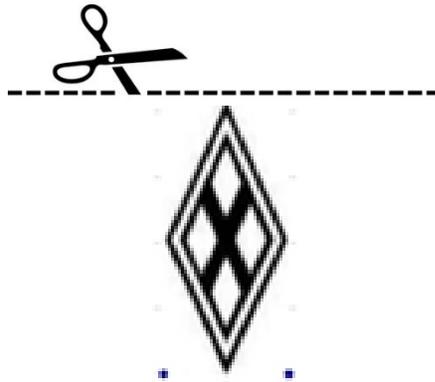


Imagen utilizada como molde sobre el block



Compartiendo Kimün

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

Instrucciones

- La actividad se desarrolla de manera grupal.
- Lea con atención cada pregunta.
- Al final se realizará una presentación del trabajo realizado.

Materiales

- Una hoja de block por grupo.
- Regla.
- Transportador.
- Lápiz.
- Goma.

Actividad.

1. Dividan toda la hoja block en cuadrados de 1 cm.
2. Realice la misma figura que sigue a continuación en la hoja de block, para esto se recomienda recortar el molde adjuntado en la guía para ser utilizado como molde sobre el block.
3. Mover la figura A de tal manera que quede sobrepuesta a la figura B, utilizando isometrías (traslación, rotación o reflexión).
 - i) Describa cada paso realizado utilizando lenguaje matemático, para ello deberá indicar que isometría utilizó contabilizando cada paso.
 - ii) No puede realizar más de tres pasos en realizar el movimiento de A a B.
4. Se realizará una presentación del trabajo realizado.
5. Cada estudiante deberá presentar esta guía con el desarrollo del paso 3.i.



A grid with two star shapes. Star A is in the top right, and Star B is in the bottom left. Both stars are black and have eight points. A small square box with the letter 'A' is to the left of Star A, and a small square box with the letter 'B' is to the right of Star B. There are small blue dots at the top and bottom of each star.

Wuñefe: Lucero del alba ¿La recuerdas?

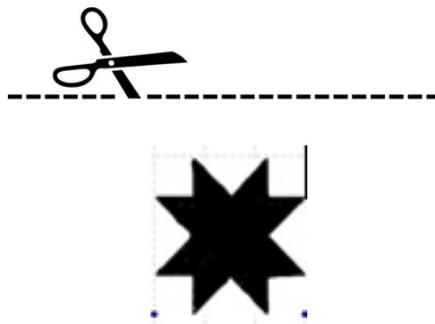


Imagen utilizada como molde sobre el block



Apéndice 3: Rubricas de evaluación.

Para este apartado se presentan las dos rúbricas de evaluación diseñadas. Una de ellas será utilizada clase a clase, dirigida al docente, para evaluar si el curso está cumpliendo con los logros esperados, es decir, compartiendo sus reflexiones tanto con su grupo de trabajo como con el grupo curso, a través del respeto, y otra corresponde a la evaluación final realizada la última clase, para la presentación del ícono diseñado, la cual contempla una autoevaluación de todo el proceso por parte de el o la estudiante, y también un apartado destinado para el o la docente, incluyendo finalmente una rejilla para colocar las 2 calificaciones para promediarlas (una para el promedio clase a clase –misma nota a todo el grupo curso-, y otro para la autoevaluación y evaluación del docente de la presentación final)

Apéndice 3.1, “Rúbrica Clase a Clase”

CLASE I*	Rubrica de evaluación para el/la docente				Puntaje
Comparten opiniones y reflexiones en su grupo de trabajo					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
Comparten opiniones y reflexiones con el grupo curso					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
Desarrollan las actividades solicitadas en escrito					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
Se relacionan respetando la diversidad					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
Resuelven las discrepancias a través del diálogo					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
Argumentan geoméricamente los pasos utilizados					
Totalidad del curso (12 pts)	Solo más de la mitad del curso (8 pts)	Menos de la mitad del curso (6 pts)	Participación deficiente (0 pts)		
				Total	
				Nota	

*Esta rúbrica se utilizará en cada clase por lo que solo irá variando el etiquetado CLASE I. CLASE II, hasta clase IV. En la clase V se utiliza la Rúbrica Sumativa Final.

Apéndice 3.2, “Rúbrica Sumativa Final”, Clase 5.

Rubrica de Evaluación					
Nombre:				Curso:	
Categoría	Desempeño				Puntaje
	Excelente (10 pts.)	Bueno (8 pts.)	Satisfactorio (5 pts.)	Deficiente (3 pts.)	
Autoevaluación	Participa y colabora con el grupo en el proceso creativo.	Participa en clase, con bajo ritmo de trabajo en la preparación del icono grupal	Baja participación durante la clase, se distrae durante la preparación del icono grupal	No participa durante la clase, se presenta desinterés durante la preparación del icono grupal.	
	Colabora con sus compañeros en la toma de decisiones	Colaboración con sus compañeros en determinadas ocasiones	Baja colaboración con sus compañeros en la toma de decisiones.	No Colabora con sus compañeros de grupo en la toma de decisiones	
	Toma pertenencia del grupo correspondiente y se hace parte en la toma de decisiones.	Participa en la toma de decisiones en conjunto al grupo de manera esporádica.	Bajo sentido de pertenencia en torno al icono escogido y al grupo seleccionado, sin hacerse parte en la toma de decisiones	No toma pertenencia en el icono escogido y nula participación en la toma de decisiones.	
Evaluación Docente	Maneja lenguaje geométrico durante la presentación.	Bajo manejo del lenguaje geométrico durante la presentación	Confunde conceptos geométricos utiliza más lenguaje coloquial.	No maneja lenguaje geométrico durante la presentación	
	Comparte de manera adecuada el significado e identidad que posee la iconografía y el porqué de su elección	Comparte de manera deficiente el significado que posee la iconografía y el porqué de su elección	Comparte el significado de la iconografía de manera vaga y no justifica su elección	No presenta significado de la iconografía escogida.	
	Presentan las isometrías de manera correcta, ejecutadas según corresponda	Presentan las isometrías de manera deficiente incluyendo algunos errores en su realización	Presentan las isometrías con errores importantes en su realización	No resuelven las isometrías necesarias para su construcción.	
	Argumenta de manera ordenada cada una de las ideas presentadas siguiendo un orden lógico.	Argumenta las ideas presentadas de manera desordenada y sin orden lógico.	Presenta falencias en la argumentación, sin explicar el fundamento de su respuesta.	No argumenta las ideas presentándolas de manera desordenadas y sin fundamento.	
*60 pts. = nota 70.				Total Puntaje	
				Nota	
60% Presentación Iconografía 40% Participación clase a clase				Nota final	

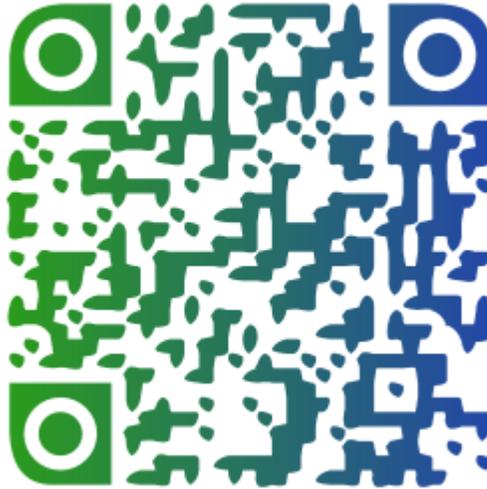
Pauta para presentación quinta clase:

- Cada estudiante del grupo deberá presentar.
- Se realizará la exposición en medio de un círculo hecho por compañeros y profesor.
- Deberán describir a sus compañeros como resolvieron el problema aplicando isometrías y cantidad de pasos.
- Deberán responder a las preguntas planteadas por el profesor.
- Se tendrá en cuenta la participación realizada a lo largo de toda la unidad en conjunto con la presentación.

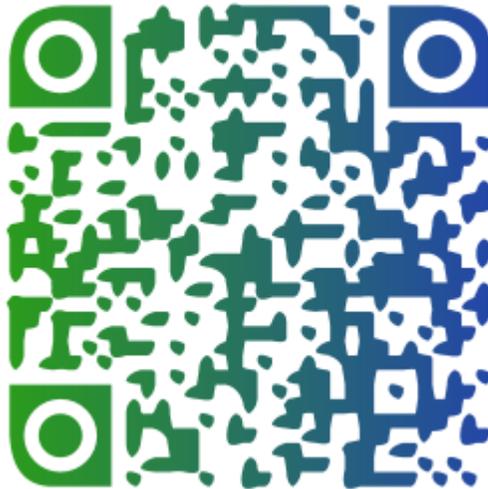
Apéndice 4: Planificaciones.

Para este apartado se adjuntan las 5 planificaciones correspondientes a cada clase.

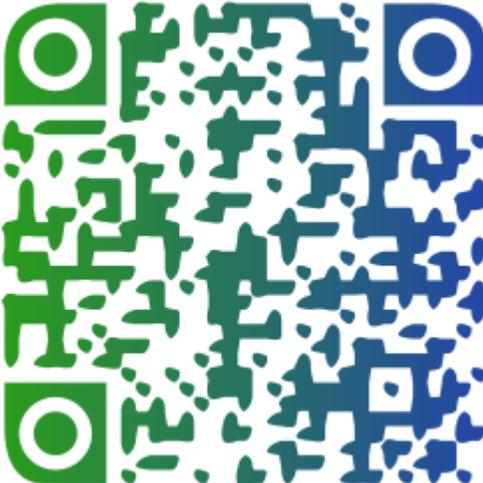
Planificación clase 1: “Epew”



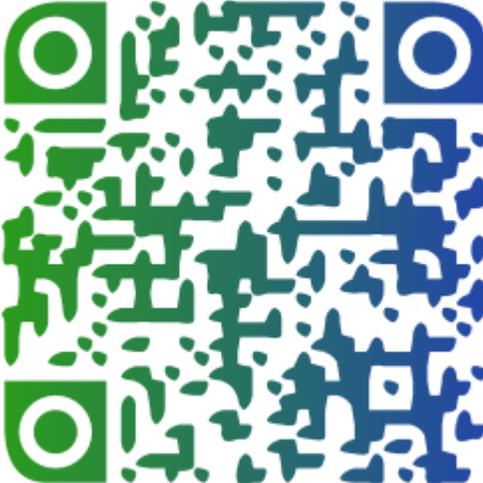
Planificación clase 2: “Construyendo Kimün”



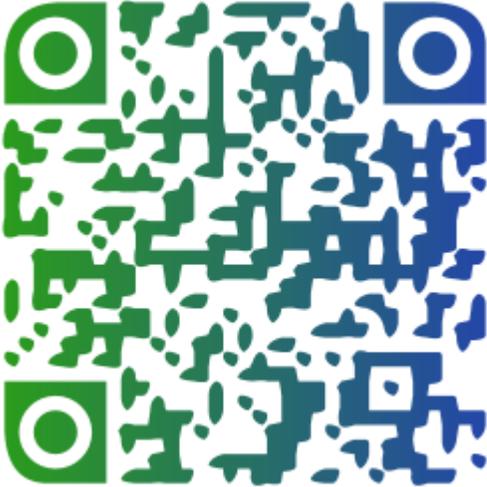
Planificación clase 3: “Compartiendo Kimün”



Planificación clase 4: “Iñche”



Planificación clase 5: “Nütram”



Apéndice 5: Manipulativos

A continuación se presentan los códigos QR que direcciona a tres videos demostrativos de rotación, traslación y reflexión respectivamente.

Apéndice 5.1 “Video Rotación” Clase1



Apéndice 5.2 “Video traslación” Clase1



Apéndice 5.3 “Video Reflexión” Clase1

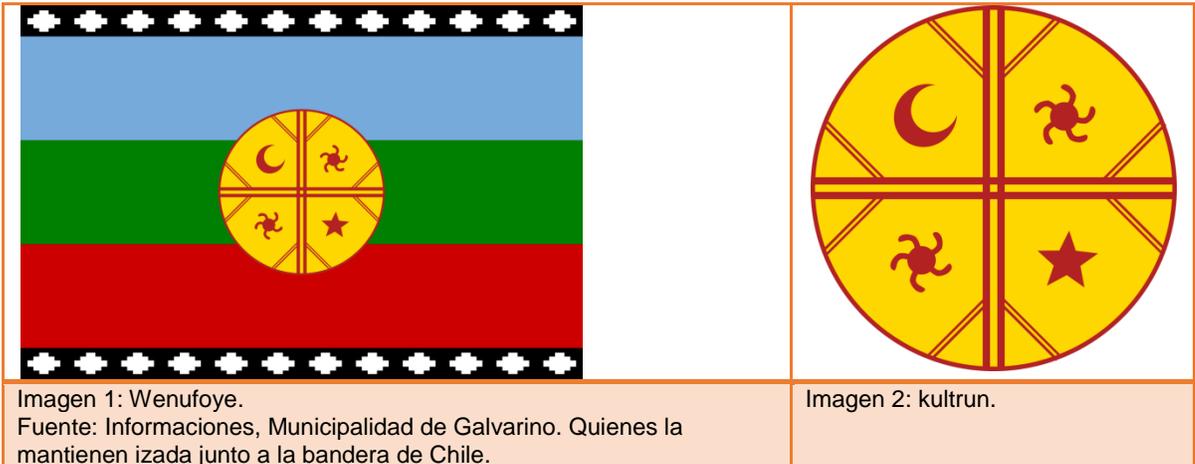


Por último se adjunta una guía para la fabricación de los manipulativos.

Apéndice 5.4 “Manual Fabricación de Manipulativos” Clase1

Manipulativo de Rotación

Para representar patrones isométricos en la iconografía mapuche, específicamente de rotación, se utilizara el diseño de Kultrún de la *wenufoye* (bandera mapuche). Es preciso mencionar que existen más diseños, e incluso, algunos que solamente tienen un cuero sin intervenir.



Materiales:

- Cartón piedra y/o cartón forrado (re utilizado) medio pliego.
- Pegamento en barra.
- 1 Chinche mariposa.
- Tijeras
- Impresión de imagen 2 o alguna imagen para rotar
- Lapices.
- Transportador o la impresión de una planilla graduada (imagen 3)



Instrucciones:

1. Cortar en 4 partes iguales la imagen 2. Se sugiere reforzarlas con cartón forrado para mayor firmeza al manipular y agregarle una "pestaña" que sea de pivote. Una vez realizado esto con las 4 partes, unirlas con el chinche y reservar.



Imagen 4. partes del kultrún unidas con el chinche mariposa.

2. Imprimir la imagen 3 y pegar al cartón piedra, o a mano dibujar una circunferencia de radio mayor al kultrún de la imagen 2 y graduar de 0° a 360°.
3. Con el chinche mariposa unir las 4 partes del kultrún y el círculo de cartón graduado.



Imagen 5.- Kultrún rotado.

Manipulativo de traslación

En el caso de la traslación, se utilizara la cruz del sur o chakana, extraída de la iconografía textil mapuche presente en chamales y trarilongkos.



Imagen 6: Chamal.
Fuente: Exposición Chile Precolombino.



Imagen 7: Chakana.

Materiales:

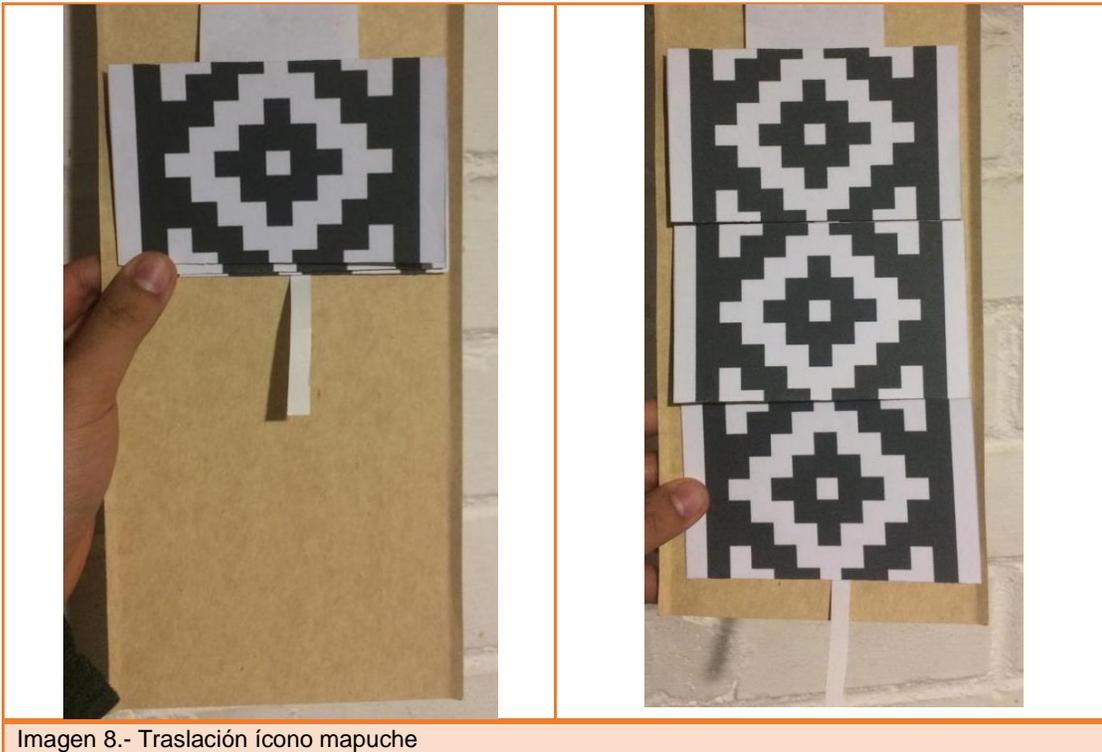
- Medio pliego de cartón forrado
- Pegamento en barra
- Tijeras
- Impresión de imagen 5

Instrucciones:

1. Dividir imagen 3 en tres partes iguales. Luego de ello se pega sobre un cartón forrado para mayor firmeza al manipular.
2. Posteriormente se unen las tres piezas con un cartón en la parte trasera de las imágenes de tal manera que queden unidas entre sí.

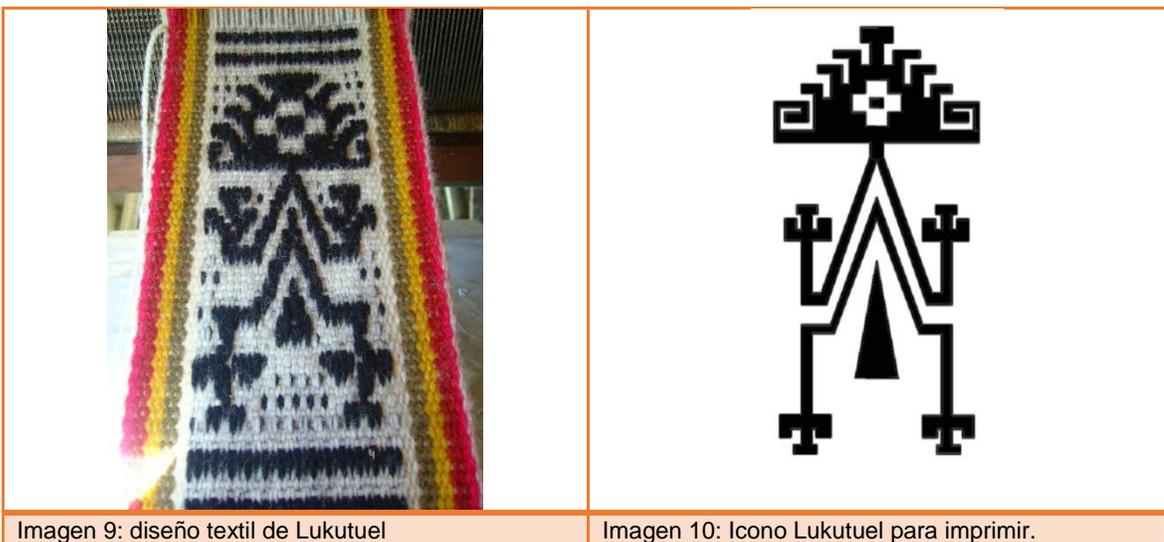


3. Se pegan a un base de cartón para ser expuestas para que se pueda realizar de arriba hacia abajo de manera ordenada.



Manipulativo de reflexión.

Para la reflexión se utiliza la *Lukutuel* (Arrodillado o lugar donde se arrodilla). Este icono es común en la textilería mapuche.



Materiales:

- Plumón permanente
- Pegamento en barra
- Imagen 7 impresa
- 1 lámina de plástico o mica

Instrucciones:

1. Doblar la mica a la mitad.
2. Dividir a la mitad la imagen 7, y pegarla a la mica



3. En la mitad sin imagen dibujar con el plumón permanente la otra mitad de la imagen.





Imagen 11.- Resultado final reflexión.

Apéndice 6: Resultados encuesta de validación.

A continuación se adjunta el código QR que direcciona a los resultados de la encuesta de validación.

