UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

Departamento de Física

# Uso del modelo pedagógico invertido en la planeación de la unidad de trigonometría de segundo medio, según las bases curriculares chilenas.

Matías Vicente Alviña Moraga

Karla Estefany Araya Benito

Profesor Guía:

Claudia Matus Zúñiga

Tesis para optar al Grado de Licenciado en Educación de Física y Matemática.

Santiago – Chile

2017

# USO DEL MODELO PEDAGÓGICO INVERTIDO EN LA PLANEACIÓN DE LA UNIDAD DE TRIGONOMETRÍA DE SEGUNDO MEDIO, SEGÚN LAS BASES CURRICULARES CHILENAS.

**Matías Vicente Alviña Moraga**
**Karla Estefany Araya Benito**

Este trabajo de graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Sra. Claudia Matus Zuñiga del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora, Sra. Silvia Tecpan Flores y Sra. Soledad Saavedra Ulloa.

______________________________

Sra. Claudia Matus Zuñiga
Profesora Guía

______________________________

Sra. Silvia Tecpan Flores
Profesora Correctora

______________________________

Sra. Soledad Saavedra Ulloa
Profesora Correctora

____________________________________

Sr. Enrique Cerda
Director del Departamento de física

# Resumen

Este Seminario de Grado consiste en hacer una propuesta didáctica para el contenido de trigonometría para segundo medio, basado en las Bases Curriculares. Donde los objetivos aprendizaje son enfocados a que el estudiante puede determinar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo y aplicarlas a contexto de composición y descomposición de vectores. En este sentido, los docentes tienden a utilizar clases tradicionales para la enseñanza de este contenido, por lo que los estudiantes no interiorizan la interdisciplinaridad que tiene.

La propuesta didáctica considera el uso de la metodología de clase invertida, que consiste en restructurar los espacios que se dan en una clase tradicional, por lo que el contenido los estudiantes lo verán fuera de la sala de clases por medio de un video o texto, para que en la sala se pueda aplicar, analizar y evaluar por medio de la utilización de una guía o un desafío.

El material didáctico presentado en este Seminario de Grado se orientó al desarrollo de catorce clases, las cuales se dividen en pre clase, durante clase y post clase, lo cual se logra debido al uso de la plataforma educativa Edmodo, que nos brinda una extensión de la sala de clases en la que los estudiantes y el profesor puedan construir el conocimiento. Además, el modelo de clase invertida fomenta el trabajo cooperativo entre los estudiantes y busca que estos puedan desarrollar habilidades para el Siglo XXI por medio del uso de un enfoque constructivista y las TICs.

La propuesta didáctica fue validada por dos profesores de matemática que son expertos en el área de las TICs y que han realizado clases en establecimientos educacionales. Obteniendo como resultado una aprobación al uso de la metodología de clase invertida al contenido de trigonometría.



**Palabras claves:** Trigonometría, clase invertida, plataforma educativa, TICs, trabajo cooperativo, constructivista.

# Abstract

This work is focused on a didactic proposal in Trigonometry, a math content which is taught on the second year of Chilean High School, and it was made considering the secondary education curriculum requirements. The learning objectives were chosen so that the student may determine the trigonometrical ratios in a right triangle, and apply them in a context of composition and decomposition of vectors. In this sense, teachers tend to prepare traditional classes for teaching this content, which is the cause for the students do not understand the multiple connections of it.

The didactic proposal considers the use of the Flipped Classroom approach, which consisting in the restructuration of the learning spaces that take place in a traditional class, so the math content is reviewed outside the class in a way of video or text, what enables students to apply, analyses and evaluate, throughout solving problems or challenges in the classroom.

The didactic material presented covered fourteen classes, and each one is divided in a pre-class, main class and post class sections, that can be accomplish using Edmodo, an educational platform, which gives an extension of the classroom in which both students and teachers can build knowledge. In addition, the Flipped Classroom model encourages the cooperative work among students, and it helps them to develop XXI Century Skills, by the use of a constructivist approach and ICTs.

The didactic proposal was ratified by two mathematics teachers that are experts on the ICTs field and that have taught in educational establishments, approving this way the use of Flipped Classroom methodology to the content of trigonometry.

**Key words:** Trigonometry, flipped classroom, secondary education, educational platform, ICTs, cooperative learning, constructivism.

# Dedicatoria

*A Juan Pablo,*
*mi inspiración para ser docente.*

*A Laila,*
*yo también cierro mis ojos,*
*para saber que estas aquí.*

## Dedicatoria

*A mi hermano*
*por enseñarme la simpleza de ser diligente.*

*A mi madre,*
*por inspirarme cada día a seguir mi pasión.*

*A mi Padre en los cielos,*
*bendíceme más que abundantemente en cada paso que doy.*

# Agradecimientos

Cuando comencé a estudiar en esta carrera, inicié con un objetivo en mente que es ayudar a los demás haciendo lo que a mí me gusta, y esto no lo hubiera logrado sin el apoyo de mi familia y mis parientes. Quiero comenzar agradeciendo a mi hermano, quien vive conmigo y me cuida, y aunque a veces hay días malos entre nosotros dos, siempre al final del día sabemos que podemos contar con el otro. Por otro lado, tengo a mi padre que siempre está preocupado por mí y es quien se levanta temprano cuando necesito tomar el bus para viajar a Santiago. Luego tengo a mi madre, quien le agradezco más que a nadie quien soy, siempre preocupada por mí y por mi hermano, cuidándome, protegiéndome y dándome su apoyo. Por último, tengo a mi abuela, que, aunque no la estoy viendo siempre, sé que está conmigo al igual que todos mis familiares, ella es quien me ayuda cuando más lo necesito.

Quiero agradecerle a mi amiga, mi polola, mi compañera de trabajo y mi confidente, doña Karla, por los momentos que me ha dado, por dejarme compartir experiencias nuevas y enriquecedoras, por quererme como soy y por tener una paciencia enorme. Y aunque tengamos pensamientos, gustos e intereses distintos, buscamos en la diferencia la igualdad, y ante una discrepancia solo reímos y llegamos a un consenso. Quiero que sepas que fue un gusto ser tu compañero de trabajo y ante todo gracias por ser mi amiga.

Quiero agradecer a mis amigos, el Mery, el Seba y el Benja por las conversaciones en el casino, por su apoyo cuando yo lo necesité y sus palabras de aliento. Al Álvaro, porque contigo siempre puedo huir de mis problemas y solo reírme.

Quiero agradecerle a la profesora Soledad Saavedra por su apoyo, las enseñanzas que me ha dado a lo largo de la carrera y por haberme dejado compartir con usted una de mis experiencias más enriquecedoras en mi formación como docente.

Quiero agradecerle a la profesora Silvia Tecpan por su apoyo, por sus retroalimentaciones a nuestro trabajo, por cada vez que íbamos con Karla a su oficina con una inquietud y con preocupaciones, ella estaba ahí con una sonrisa y nos ayudaba con mucho gusto.

Por otro lado, quiero agradecerle al profesor Osvaldo Baeza, ya que desde el primer día que le comentamos lo que íbamos hacer él nos dijo que podíamos contar con todo su apoyo, y así fue.

Quiero finalizar esta etapa pensando que es el inicio de algo que aún no termina, ya que quiero seguir con mis estudios, para seguir aprendiendo y perfeccionándome como profesor de física y matemática.

**Matias Alviña.**

# Agradecimientos

Cada momento dentro de la carrera me ha enseñado la simpleza de disfrutar cada día de lo que uno hace, continuaré mi camino llena de expectativas y deseos hacia un futuro profesional, en el que seré una mezcla de todos los profesores que me han inspirado hasta ahora.

Agradezco a mi familia y a mi familia espiritual, por animarme en los momentos difíciles, reconfortarme con palabras de aliento y exhortación en amor. Ellos me han permitido crecer en el conocimiento genuino a través de su profundo cariño. Agradezco sobre todo a mi madre, quien es mi fuente de inspiración en el trabajar dando cada día un esfuerzo más digno. Gracias a mi hermano Martín, por enseñarme que el sacrificio trae buenos frutos si se trabaja contento. A mi padre, por no desistir de formar parte de mis procesos en la vida.

A mi amigo, pareja y compañero, por su paciencia y agudeza mental. Gracias Matias por no desistir de dar tu mejor esfuerzo en cada momento, gracias por tus buenas intenciones y tu inmenso corazón para conmigo y con los que te rodean. En ti he encontrado un compañero fiel, creativo, esforzado y proactivo que apoya a su gente sin condición.

A mis amigos y compañeros, quienes continuaron y los que tomaron otros caminos. Por siempre estar dispuestos a tener una simple y relajada conversación en los pastos de física. Y, sobre todo, por mostrarme que este mundo es diverso, que ninguno es mejor que otro, solo somos todos distintos, gracias por reforzar la distinción y utilizarla como barrera para quienes no aceptan a los otros por quienes son. Por esos viajes, fiestas, ferias libres y días enteros disfrutando de su compañía. Al tío Miguel en los pastos de la biblioteca, por ofrecerme siempre una grata conversación.

Agradezco a mis profesores, a la profesora Silvia Tecpan, Soledad Saavedra y Osvaldo Baeza, por apoyarnos en nuestro trabajo cuando estábamos perdidos, por darnos luces de cómo continuar en el camino correcto. A la profesora Claudia Matus, por enseñarme a ser más fuerte y consistente con las decisiones que tomo y sopesarlas antes de actuar por la vista. A los docentes que ayudaron desde las sombras, al profesor Alan Muñoz por su interés en valorar nuestro trabajo, al profesor Anselmo Luna, por su pronta respuesta y salida en el momento justo. A nuestro jefe de carrera, el profesor Bernardo Carrasco, por siempre ser una fuente de información sabia y que presenta soluciones.

Finalmente, agradezco todo lo porvenir, lo espero con los brazos abiertos, creyendo por lo mejor y preparada para lo peor.

**Karla Araya.**

# Tabla de contenido

Introducción ..... 1
Capítulo 1: Marco de antecedentes ..... 3
1.1 La realidad chilena en matemática ..... 3
1.2 Los cambios recientes en la educación chilena ..... 4
1.3 La importancia de enseñar trigonometría ..... 5
1.4 La Tecnología de la Información y Comunicación en el proceso de enseñanza ..... 7
1.5 La aparición de Flipped Classroom ..... 9
1.6 Necesidades pedagógicas para el cumplimiento de los requisitos curriculares ..... 10
1.7 Objetivo ..... 11
1.7.1 Objetivo general ..... 11
1.7.2 Objetivos específicos ..... 11
Capítulo 2: Marco teórico ..... 12
2.1 El constructivismo y el aprendizaje activo ..... 12
2.1.1 Enfoque educativo centrado en el estudiante ..... 13
2.2 Las TIC y educación ..... 16
2.3 La Clase Invertida ..... 19
2.3.1 Modelo pedagógico invertido ..... 20
2.3.2 Rol del profesor y del estudiante en la clase invertida ..... 24
2.3.3 Ventajas y desventajas de la clase invertida ..... 25
2.3.4 La evaluación de la metodología de clase invertida ..... 26
2.3.5 Estudios realizados sobre el modelo de clase invertida en matemática ..... 28
2.4 Geometría en el aula ..... 29
2.4.1 Dificultades en el proceso de enseñanza en trigonometría ..... 30
Capítulo 3: Propuesta didáctica para la enseñanza de la trigonometría ..... 32
3.1 Propuesta general de la unidad a desarrollar ..... 36
3.2 Estructura general de las clases a desarrollar ..... 41
3.3 Material diseñado para la propuesta didáctica ..... 42
3.3.1 Guías didácticas ..... 42
3.3.2 Desafíos didácticos ..... 43
3.3.3 Textos de trabajo ..... 44
3.3.4 Ejercicios post clase ..... 44
3.4 Requisitos para la propuesta ..... 45
3.4.1 Perfil del establecimiento educacional ..... 45
3.4.2 Perfil docente para la propuesta didáctica ..... 45
3.4.3 Indicaciones al docente ..... 46
3.5 Secuencia didáctica ..... 48
3.5.1 Clase 1: Recordando el teorema de Pitágoras ..... 48
3.5.2 Clase 2: Recordando el teorema de Euclides ..... 51

3.5.3 Clase 3: Recordando la semejanza de triángulos ... 53
3.5.4 Clase 4: La historia de la trigonometría y las tablas trigonométricas ... 55
3.5.5 Clase 5: Aplicaciones de ángulo de elevación y depresión ... 57
3.5.6 Clase 6: Midiendo altura ... 58
3.5.7 Clase 7: Círculo goniométrico y preparando la prueba formativa ... 60
3.5.8 Clase 8: Evaluación formativa ... 62
3.5.9 Clase 9: Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas ... 63
3.5.10 Clase 10: Identidades trigonométricas ... 65
3.5.11 Clase 11: Aplicaciones del teorema del seno y coseno ... 66
3.5.12 Clase 12: Midiendo distancia ... 68
3.5.13 Clase 13: Preparando la prueba final ... 69
3.5.14 Clase 14: Evaluación final ... 70
3.6 Estrategias de validación ... 70
3.6.1 Criterios de selección para validadores ... 71
3.6.2 Encuesta de validación ... 72
Capítulo 4: Resultados ... 77
4.1 Tabulación de las respuestas por sección ... 77
4.1.1 Validación secuencia de clase ... 77
4.1.2 Validación de diseño y presentación de guías y desafíos ... 78
4.1.3 Validación de textos y ejercicios ... 80
4.1.4 Validación de videos ... 81
4.1.5 Validación de guías ... 83
4.1.6 Validación de desafíos ... 85
4.1.7 Validación de evaluaciones ... 86
4.1.8 Validación del uso de la red educativa EdModo ... 87
4.1.9 Opiniones ... 89
4.2 Cambios del material didáctico ... 91
Conclusiones ... 97
Referencias bibliográficas ... 102
Apéndice ... 108
Apéndice 1: Guías de trabajo ... 109
Apéndice 1.1: Guía 1: Pitágoras ... 109
Apéndice 1.2: Guía 2: Historia y tablas trigonométricas ... 113
Apéndice 1.3: Guía 3: Aplicaciones trigonométricas en contexto ... 118
Apéndice 1.4: Guía 4: Preparando la evaluación ... 124
Apéndice 1.5: Guía 5: Círculo goniométrico ... 129
Apéndice 1.6: Guía 6: Funciones trigonométricas e inversas ... 133
Apéndice 1.7: Guía 7: Identidades trigonométricas ... 138
Apéndice 1.8: Guía 8: Aplicando el teorema del seno y coseno ... 144
Apéndice 1.9: Guía 9: Preparando la evaluación ... 151

Apéndice 2: Desafíos didácticos ........ 156
Apéndice 2.1: Desafío 1: Aplicando a Euclides ........ 156
Apéndice 2.2: Desafío 2: Aplicando semejanza ........ 159
Apéndice 2.3: Desafío 3: Midiendo alturas ........ 163
Apéndice 2.4: Desafío 4: Teorema del seno y coseno ........ 168
Apéndice 3: Textos de trabajo ........ 173
Apéndice 3.1: Texto 1: Medición de ángulos ........ 173
Apéndice 3.2: Texto 2: Ángulo de elevación y depresión ........ 175
Apéndice 3.3: Texto 3: Razones trigonométricas recíprocas ........ 176
Apéndice 3.4: Texto 4: Ejercicios resueltos ........ 179
Apéndice 3.5: Texto 5: Identidades trigonométricas ........ 182
Apéndice 4: Ejercicios post-clase ........ 184
Apéndice 4.1: Ejercicio 1: Pitágoras ........ 184
Apéndice 4.2: Ejercicio 2: Euclides ........ 185
Apéndice 4.3: Ejercicio 3: Semejanza ........ 186
Apéndice 4.4: Ejercicio 4: Razones trigonométricas ........ 187
Apéndice 4.5: Ejercicio 5: Ángulo de elevación y depresión ........ 188
Apéndice 4.6: Ejercicio 6: Funciones trigonométricas e inversas ........ 189
Apéndice 4.7: Ejercicio 7: Identidades trigonométricas y teorema del seno y coseno 190
Apéndice 5: Evaluaciones del modelo ........ 191
Apéndice 5.1: Diagnóstico: Conocimientos previos de trigonometría ........ 191
Apéndice 5.2 Autoevaluación: Clase 1 ........ 194
Apéndice 5.3: Evaluación formativa: Demostrando lo aprendido ........ 195
Apéndice 5.4: Evaluación sumativa: Evaluación final de trigonometría ........ 198
Apéndice 6: Rúbricas de evaluaciones y tablas de especificaciones ........ 201
Apéndice 6.1: Rúbrica de evaluación guía 7 ........ 201
Apéndice 6.2: Distribución de preguntas por contenidos de la evaluación formativa . 202
Apéndice 6.3: Rúbrica de evaluación formativa: parte 2 ........ 203
Apéndice 6.4: Distribución de preguntas por contenidos de la evaluación final: Trigonometría ........ 204
Apéndice 6.5: Rúbrica de evaluación de desafíos ........ 206
Apéndice 6.6: Rúbrica de evaluación de guías ........ 208
Apéndice 7: Material extra ........ 210
Apéndice 7.1: Encuesta : La matemática y la tecnología ........ 210
Apéndice 7.2: Manual de uso de calculadora ........ 213
Apéndice 7.3: Manual de uso de GeoGebra ........ 216
Apéndice 7.4: Material para el docente: Demostración del teorema del coseno y del seno ........ 226
Apéndice 7.5: Material para el docente: Ejercicios extra para las clases ........ 229
Apéndice 7.6: Soluciones del material didáctico ........ 232
Apéndice 8: Encuesta de validación ........ 238

# Índice de tablas

Tabla del capítulo 3


| | | |
|---|---|---|
| **Tabla 3.1** | Resumen de los validadores de la propuesta didáctica | 71 |


Tablas del capítulo 4


| | | |
|---|---|---|
| **Tabla 4.1** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 1 | 77 |
| **Tabla 4.2** | Comentarios de validadores para el ítem 1 | 78 |
| **Tabla 4.3** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 2 | 79 |
| **Tabla 4.4** | Comentarios de validadores para el ítem 2 | 80 |
| **Tabla 4.5** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 3 | 80 |
| **Tabla 4.6** | Comentarios de validadores para el ítem 3 | 81 |
| **Tabla 4.7** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 4 | 82 |
| **Tabla 4.8** | Comentarios de validadores para el ítem 4 | 83 |
| **Tabla 4.9** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 5 | 83 |
| **Tabla 4.10** | Comentarios de validadores para el ítem 5 | 84 |
| **Tabla 4.11** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 6 | 85 |
| **Tabla 4.12** | Comentarios de validadores para el ítem 6 | 86 |
| **Tabla 4.13** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 7 | 86 |
| **Tabla 4.14** | Comentarios de validadores para el ítem 7 | 87 |
| **Tabla 4.15** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 8 | 88 |
| **Tabla 4.16** | Comentarios de validadores para el ítem 8 | 89 |
| **Tabla 4.17** | Resumen respuestas de validadores para el ítem 9 | 89 |
| **Tabla 4.18** | Resumen de adaptaciones al material que harían los validadores a la propuesta | 90 |
| **Tabla 4.19** | Resumen de las apreciaciones finales de los validadores sobre la propuesta didáctica | 90 |
| **Tabla 4.20** | Resumen de los comentarios más relevantes | 91 |

# Índice de ilustraciones

Figuras del capítulo 2


| | | |
|---|---|---|
| **Figura 2.1** | Nivel de rendimiento o desempeño vs Eficacia del grupo | 15 |
| **Figura 2.2** | Integración de ámbitos formativos y modelos de aprendizaje con recursos en línea | 18 |
| **Figura 2.3** | Taxonomía de Bloom y clase invertida | 22 |
| **Figura 2.4** | Esquema de Clase Invertida | 25 |


Figuras del capítulo 3


| | | |
|---|---|---|
| **Figura 3.1** | Formato de la creación de las carpetas en el grupo de trigonometría en el EdModo | 33 |
| **Figura 3.2** | Simbología de los videos | 33 |
| **Figura 3.3** | Video del Teorema coseno, captura minuto 0:35 | 34 |
| **Figura 3.4** | Video del Teorema de Euclides, captura minuto 0:38 | 34 |
| **Figura 3.5** | Captura de asignación de la clase 1: Ejercicios guía 1 | 36 |
| **Figura 3.6** | Mapa de contenido previos de trigonometría | 36 |
| **Figura 3.7** | Mapa de contenido de la unidad de trigonometría | 37 |
| **Figura 3.8** | Mapa de las clases de la unidad de trigonometría | 39 – 40 |
| **Figura 3.9** | Resumen de la estructura general de las clases | 42 |
| **Figura 3.10** | Resumen de la guía 2 | 42 |
| **Figura 3.11** | Hito histórico del desafío 2 | 43 |
| **Figura 3.12** | Ejercicio propuesto en el texto 2 | 44 |
| **Figura 3.13** | Final de la guía de ejercicios | 44 |
| **Figura 3.14** | Desafío 1, sosteniendo el poste | 52 |
| **Figura 3.15** | Determinando si dos triangulo son semejantes | 54 |
| **Figura 3.16** | Desafío 2, cuaderno métrico | 55 |
| **Figura 3.17** | Desafío 2, método del ingeniero | 55 |
| **Figura 3.18** | Guía 2, actividad 1 | 56 |
| **Figura 3.19** | Actividad inicial, comparando los triángulos | 57 |
| **Figura 3.20** | Desafío 3, goniómetro | 59 |
| **Figura 3.21** | Desafío 3, midiendo la altura de un poster | 59 |
| **Figura 3.22** | MD-Circulo goniométrico | 61 |
| **Figura 3.23** | Evaluación formativa, paracaidista perdido | 62 |
| **Figura 3.24** | MD-Grafica de la función tangente | 65 |
| **Figura 3.25** | Desafío 4, parte 1 | 68 |
| **Figura 3.26** | Desafío 4, parte 2 | 68 |

Figuras del capítulo 4


| | | |
|---|---|---|
| **Figura 4.1** | Gráfico respuesta de validadores de la secuencia de clase | 78 |
| **Figura 4.2** | Gráfico respuesta de validadores de diseño y presentación de guías y desafíos | 79 |
| **Figura 4.3** | Gráfico respuesta de validadores de textos y ejercicios | 81 |
| **Figura 4.4** | Gráfico respuesta de validadores de videos | 82 |
| **Figura 4.5** | Gráfico respuesta de validadores de guías | 84 |
| **Figura 4.6** | Gráfico respuesta de validadores de desafíos | 85 |
| **Figura 4.7** | Gráfico respuesta de validadores de evaluaciones | 87 |
| **Figura 4.8** | Gráfico respuesta de validadores de uso de la red educativa Edmodo | 88 |
| **Figura 4.9** | Gráfico respuesta de validadores de sus intereses de la propuesta | 89 |
| **Figura 4.10** | Ejemplo de mejora del lenguaje de la guía 6 | 92 |
| **Figura 4.11** | Ejemplo de mejora de la actividad previa de los desafíos | 94 |
| **Figura 4.12** | Ejemplo de cómo el docente da respuesta a múltiples preguntas en la plataforma | 95 |

# Introducción

En el presente Seminario de Grado se registra la elaboración de una propuesta didáctica para la enseñanza del contenido de trigonometría y su validación por expertos. La propuesta didáctica está hecha con la metodología de clase invertida, con un enfoque constructivista y el uso de Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) con el fin de promover una mejora en el entendimiento del contenido de trigonometría. Para ello, se usó como referencia el informe de Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), las nuevas Bases Curriculares de matemática y los estándares pedagógicos planteados por el Ministerio de Educación. El contenido abordado en esta propuesta se enmarca en el Objetivo de aprendizaje (OA) número 8 y 9, que introduce el contenido de razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, enfocándose en sus aplicaciones a distintas áreas.

En el primer capítulo llamado Marco de antecedentes, se comienza hablando de los resultados obtenidos en las pruebas internacionales (PISA y TIMSS) que participan los estudiantes chilenos. Para luego hablar de los cambios que han habido en el currículo nacional hasta llegar a la Bases Curriculares vigentes, que serán nuestro punto de partida para armar la propuesta didáctica, contando el hecho de que el contenido de trigonometría no estaba incorporando en el Marco Curricular, por lo cual, se prosigue a hacer una reseña histórica de la trigonometría, mostrando la interdisciplinariedad que tiene esta área, como también se hace hincapié en las principales dificultades que tienen los estudiantes para aprender este contenido. A continuación, se procede a describir cómo las TIC pueden favorecer la enseñanza de la trigonometría, hablando del hecho que no se están incorporando las TIC a la sala de clase, por lo cual surge la necesidad de una pedagogía emergente que cumpla las condiciones requeridas. Esta es con la que vamos a trabajar, Flipped Classroom donde contamos su origen y cómo un colegio en Chile ha logrado aplicarla a nivel institucional. Finalmente, se señalan los estándares pedagógicos planteados por el Ministerio de Educación para los docentes que enseñan Trigonometría en la sala de clase.

El marco teórico que sustenta la propuesta didáctica inicia dándonos una mirada del constructivismo como un aprendizaje activo que se centra en el estudiante, por lo cual intentamos de dar luces de que el contenido de trigonometría debe ser centrado en este, que se ve fomentado al momento que estudiante trabaja de forma individual y cooperativa. Luego de ello, vemos cómo podemos incorporar las TIC para fomentar el aprendizaje constructivista tanto dentro como fuera del aula, instaurando un entorno de aprendizaje basado en el B-learning, que nos permite hablar de la metodología Flipped Classroom. En este apartado, definimos el modelo clase invertida diferenciándolo de la clase tradicional y a su vez lo vinculamos con la Taxonomía de Bloom, donde el modelo de clase invertida fomenta las habilidades superiores planteadas en la taxonomía en la sala de clase y las habilidades inferiores se fomentan fue de la sala de clase, para lograr esto el profesor debe asumir un rol de guía y productor de material didáctico, con el fin de que el estudiante logre ser el protagonista en la sala clase. No obstante, este modelo pedagógico presenta varias desventajas como ventajas. Una desventaja es que los estudiantes deben contar con acceso a internet, lo cual no sucede siempre. Una ventaja de su aplicación es que ha mejorado la motivación de los estudiantes hacia el contenido, mejorando en algunos países la tasa de deserción escolar.

Habiendo reunido esta información, pensamos que es relevante el armar una propuesta que pueda mejorar la compresión de los estudiantes al contenido de trigonometría. Es por ello, que la unidad diseñada para este Seminario de Grado consta de 14 clase presenciales, que debido al modelo de clase invertida tienen tres etapas (pre clase, durante clase y post clase), en donde cada una juega un rol crucial para que el estudiante pueda aprender el contenido a tratar, ya que en la pre clase el estudiante revisará el video o texto subido a la plataforma educativa, para luego en el durante clase profundizar este contenido visto con trabajo cooperativo y en el post clase poder evaluarlo de forma individual. Dentro de esto consideramos una encuesta de acceso y uso de tecnología, como también un diagnóstico de conocimientos previos, una evaluación formativa y una sumativa.

Luego de tener lista la propuesta se llevó a cabo un proceso de validación, donde se presentó el material creado a dos expertos en el área de las TIC y matemática. Los cuales nos llevaron a realizar cambios en la propuesta didáctica con el fin de mejorarla, como también nos dieron ideas sobre puntos que agregar para facilitar la comprensión en la aplicación de la unidad para el docente que quiera replicarlo.

Para finalizar, se presentan las conclusiones finales referentes al trabajo ejecutado, desarrollándose las reflexiones finales, los resultados de la evaluación del material y las limitaciones que presentó realizar esta propuesta.

# Capítulo 1: Marco de antecedentes

## 1.1 La realidad chilena en matemática

Los resultados de los escolares en matemática no son buenos en Chile, lo cual se ratifica con los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) del año 2006, donde los jóvenes chilenos de 15 años tienen un rendimiento de 411 puntos, perteneciendo al nivel 1 de competencia según la categoría de PISA, esto significa que los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información y las preguntas están claramente definidas. En cambio, en la prueba PISA 2015 el rendimiento fue de 423 puntos, teniendo una mejora de 12 puntos desde el año 2006, aun así, el resultado obtenido por lo estudiantes en el año 2015 estaba por debajo de la media de 490 puntos obtenido por los países participantes en esta prueba (OCDE, 2016).

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) define la competencia matemática como “la capacidad de los alumnos para analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando plantean, formula, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones” (OCDE, 2006a, p. 72). Por lo cual, la prueba PISA está evaluando en qué medida los estudiantes pueden ser considerados ciudadanos reflexivos e informados y unos consumidores inteligentes pertenecientes a la sociedad, es por ello que los escolares chilenos en el nivel en que se encuentran no son capaces de ser ciudadanos reflexivos, ni tampoco son capaces de interpretar la información entregada por los medios. Además, la OECD (2004) nos señala que el problema central respecto a la implementación del currículo chileno es el nivel promedio de las capacidades docentes, donde la preparación de los docentes no está acorde a las necesidades de nuestro país hoy en día, por lo que se ofrecen pocas oportunidades a los estudiantes para que se desarrollen como resolutores de problemas.

Y no solo en esta prueba se tienen resultados bajos en Chile, ya que según la Agencia de Calidad de Educación (MINEDUC, 2015) en la prueba Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) del año 2015 que se aplica a estudiantes de octavo básico, se obtuvo un promedio de 427 en matemática, que en la subárea de geometría tiene un puntaje de 428, lo que nos dice que los estudiantes muestran un conocimiento matemático inferior al mínimo que permite describir la prueba TIMSS. Estos resultados, no necesariamente están asociados a una falta de preparación del docente, ni tampoco a las dificultades cognitivas que tienen los estudiantes, sino a diversos factores involucrados en el proceso de la enseñanza-aprendizaje que pueden estar generando estos resultados.

En la construcción de las nuevas Bases Curriculares (MINEDUC, 2016) se consideraron los resultados de las evaluaciones internacionales aplicada en Chile, que fueron descritas anteriormente. Estas revisiones permitieron contar con información para toma decisiones en torno a los temas que se iban a tratar en cada curso, como también la secuencia del contenido y habilidades, con el fin de que el currículum chileno cumpla con los requerimientos internacionales en cada área. No obstante, para llegar a las nuevas Bases Curriculares hemos tenido que pasar por varios cambios en la educación.

## 1.2 Los cambios recientes en la educación chilena

En los últimos 10 años la educación chilena ha sufrido diversas transformaciones, comenzando con La Ley General de la Educación (LGE) promulgado por la Presidente de la República el año 2009, en ella se promueve un Marco Curricular obligatorio para todo el sistema escolar. Como señala Valenzuela (2010), los estándares son el centro de los mecanismos de control y administración de la LGE y son de dos tipos: estándares de contenido y estándares de desempeño. Otro documento relevante en el mismo año, corresponde a los planes y programas de estudio, que son propuestas didácticas, secuencias pedagógicas y orientaciones para el docente sugeridas a partir de los contenidos definidos en el Marco Curricular, además contiene ejemplos de actividades y evaluaciones para los estudiantes. En el mismo periodo, el MINEDUC agrega los mapas de progreso, que corresponde a una visión del conjunto de la proyección del aprendizaje, el cual tampoco tiene carácter obligatorio. A pesar de todos los referentes entregados a las instituciones durante dos décadas de implementación, menos de un quinto de los establecimientos del país tienen planes y programas de estudio propios; la inmensa mayoría sigue los del Ministerio de Educación (Cox, 2011).

Por otro lado, las Bases Curriculares son el nuevo documento del currículo nacional, sin embargo, al momento de su publicación no se encuentran disponibles para todas las asignaturas de enseñanza básica, siendo en el año 2013 donde se integran el resto de las asignaturas faltantes a estas. Por esta razón, hasta que el proceso termine, se encontrarán vigentes ambos documentos, para así satisfacer los contenidos que no haya alcanzado la reforma. Mientras que en el Marco Curricular se establecen los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios para la enseñanza escolar, las Bases Curriculares amplían el espectro ofreciendo una base cultural común para todo el país mediante objetivos de aprendizaje establecidos para cada curso o nivel. Esto asegura que todos los estudiantes participen de una experiencia educativa similar, con la libertad necesaria para que los establecimientos educaciones expresen su diversidad mediante la construcción de propuestas propias que responden a sus necesidades y a las características de su proyecto educativo (MINEDUC, 2016). El año 2015, el MINEDUC establece las Bases Curriculares de 7º a 2º medio, cambiando y adaptando contenidos del Marco Curricular a objetivos de aprendizaje específicos, los cuales ya no eran regidos por los contenidos mínimos obligatorios presentes en el Marco.

La reaparición de los contenidos en el área de matemática, se observa desde un estándar en donde el aprendizaje matemático ayuda a comprender la realidad y proporcionar herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana, dividido en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar. Particularmente, en el eje de geometría, se observa la reaparición del contenido trigonometría en segundo medio, donde se espera que los estudiantes sean capaces de apreciar y utilizar de manera adecuada las propiedades geométricas pertinentes, relacionándolas con los números y el álgebra de manera concreta. En este sentido, la reaparición de las razones trigonométricas permite obtener más herramientas para la resolución de problemas no solo de matemática, sino de distintas disciplinas. Es por ello que este contenido tiene como objetivos de aprendizaje:

- Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos:
    - Relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos.
    - Explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo.
    - Aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados.
    - Resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas.
- Aplicar las razones trigonométricas en diversos contextos en la composición y descomposición de vectores y determinar las proyecciones de vectores.

Las Bases Curriculares está hecha bajo una mirada constructivista, para lo cual construir aprendizajes significativos en trigonometría supone crear condiciones en los que los objetivos de aprendizaje mínimos, establecidos por las Bases, puedan ser consolidados y enriquecidos por experiencias con hechos de la vida real, así los estudiantes se motivan a construir y reconstruir modelos que se asemejen cada vez más al contenido observado en el eje temático tratado, así como a su realidad próxima.

## 1.3 La importancia de enseñar trigonometría

Con la reaparición del contenido trigonometría en segundo año de enseñanza media, es preciso referirnos a la importancia histórica del contenido. Aunque ningún historiador se refiere al primer indicio del desarrollo de la trigonometría, se piensa que surgió a través de distintas disciplinas como la astronomía, geometría, geodesia y aritmética (Villuendas en Castañeda, 2015). En todas estas disciplinas la problemática converge en una cuestión en común, que es determinar una distancia que no se podía medir directamente. Esto significa utilizar un pensamiento métrico para perfeccionar unidades de longitud que fueran acordes a las escalas necesarias para trabajar, por lo cual cada región y cultura tenía unidades de medición propias, lo que luego se generalizó gracias a los textos públicos de matemáticos de la época (Castañeda, 2015).

Uno de los exponentes del conocimiento griego que utilizó la trigonometría fue Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.), que planteó conceptos carentes de sistematización matemática para calcular las distancias relativas entre la Tierra, el Sol y la Luna, Aristarco logra aproximar el seno de un ángulo a partir de las razones de los lados de un triángulo rectángulo. Sin embargo, múltiples historiadores consideran a Hiparco de Nicéia (190 – 120 a.C.) el fundador de la trigonometría informal, al utilizarla solo a favor de los conocimientos astronómicos. Hiparco utilizó razones trigonométricas para calcular la distancia a la Luna, descubrir la precesión de equinoccios y el movimiento aparente de las estrellas fijas; y realizó el primer catálogo celeste que hasta el día de hoy se utiliza. Sin embargo, el primer estudio de la trigonometría como ciencia independiente es realizada por los árabes, donde el astrónomo Al–Din Al–Tusì (1207 – 1274) es el creador de la obra Traité du quadrilatère, que se divide en cinco libros que contienen proposiciones de trigonometría plana y esférica. Al llegar las traducciones a Europa, Johann Müller (1436 – 1476) conocido como Regiomontanus, con su obra *De triangulis Omnimodis* transmite y mejora la disciplina, dando métodos de resolución de ejercicios trigonométricos, tanto de triángulos planos como esféricos (Massa, Romero y Casals, 2003).

Por muchos años la trigonometría ha sido considerada una parte central de las matemáticas, especialmente por su conexión con diversos fenómenos y la interconexión con múltiples disciplinas como las ciencias, tecnología, topografía, geodesia, electricidad, electrónica y óptica, entre otras (Brown, 2005; Army, 1991). Por esta misma razón la trigonometría pasa a formar parte, nuevamente, de las matemáticas en la enseñanza (Gelfand y Saul en Fernández 2016). Sin embargo, por esta misma conexión con diversos fenómenos y su interdisciplinariedad, la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes. Como la trigonometría es utilizada en situaciones en las que se necesita realizar mediciones, resultaría conveniente que los profesores propongan actividades en la que los estudiantes puedan utilizar esta como un proceso para medir, produciendo que los conceptos de trigonometría tengan un significado para ellos (Fernández, 2016), sin embargo, el 91% de los docentes suele utilizar las clases tradicionales o magistrales en donde la actividad principal es que los estudiantes copien los temas y ejercicios realizados en clases (Sánchez, 2009).

A pesar de la importancia de la trigonometría en diversas disciplinas y de las dificultades que los estudiantes presentan en el contenido, existe una escasa investigación enfocada a conocer y superar las dificultades de los estudiantes (Brown, 2005; Weber, 2005). Las investigaciones que más se repiten son en las que se utilizan recursos digitales para apoyar la didáctica de la clase, como señala Cacheiro (2000), es imperativo la interacción por medio de los recursos electrónicos para así lograr un aprendizaje de calidad. Por otro lado, el aprovechar los recursos tecnológicos disponibles en el proceso permite la creación de un ambiente educativo en donde los estudiantes se formen como constructores de conocimiento y los profesores como organizaciones de experiencias de aprendizaje (Urribarri en Zabala, 2013).

## 1.4 La Tecnología de la Información y Comunicación en el proceso de enseñanza

El uso de tecnología en los centros educativos chilenos se ha regido bajo la alineación de los objetivos y fundamentos propios de los documentos nacionales, motivo por el cual la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) a la escuela ha sido un proceso lento y paulatino tanto para los centros educacionales como para los docentes de las asignaturas, siendo difícil abordarlo de manera transversal a todo el quehacer educativo (CEPAL, 2012). La Comisión Económica para América Latina y el Caribe destaca políticas exitosas que integran las TIC como apoyo al aprendizaje, de ellas el proyecto chileno ENLACES destacó como un apoyo curricular de integración transversal de las TIC y desarrollo de competencias para el siglo XXI, utilizando proyectos, laboratorios y carros móviles entre otras cosas, este proyecto está guiado bajo los estándares para incorporar las TIC en la formación inicial docente a partir de la creación de modelos de informática educativa. (Jara, 2013). Sin embargo, a pesar de los esfuerzos y proyectos reconocidos, todavía el 63% de los docentes se rehúsa a incorporar recursos digitales a su clase (Light, 2010). Los estudiantes han desarrollado habilidades digitales vinculadas directamente al uso TIC y, en menor medida, a la gestión y comunicación de información en ambientes digitales, pero se mantienen diferencias significativas entre estratos sociales.

Si bien se ha logrado incorporar en alguna medida el uso de las TIC en las prácticas pedagógicas docentes, esto no ha tenido impacto masivo en los logros de aprendizaje de los estudiantes en las materias curriculares tradicionales. Esto puede deberse a que, aunque los docentes chilenos disponen de acceso a las TIC, a conectividad y a la utilización de computadoras, netbooks o laptops con sus alumnos, los usos de estas herramientas no se enfocan a desarrollar las habilidades necesarias para el mundo digital. Las herramientas digitales más utilizadas son los procesadores de textos y el software de presentación o Power Point (Light, 2010). Este es un hallazgo preocupante desde el sentido que las políticas educacionales refieren la incorporación de las TIC de forma transversal a los contenidos de las asignaturas, las Bases Curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2016) estipulan que, para ello, se debe:

- Buscar, acceder y recolectar información de fuentes digitales.
- Procesar y organizar datos.
- Desarrollar y presentar información a través de procesadores de texto.
- Intercambiar información a través de herramientas que ofrece internet.
- Respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de TIC.

Bajo este estándar, la integración de las TIC al currículum ha sido un proceso gradual que, en el mejor de los casos, alcanza un 60% del total de la asignatura, cifra que baja precipitadamente en matemática, alcanzando una media de 26%, correspondiendo a solo la cuarta parte de los docentes, dato preocupante ya que se considera una materia más propensa a aprovechar los potenciales de las TIC para enriquecer la docencia (Jara, 2013). Este aspecto nos hace considerar que el uso de las TIC incorpora nuevos desafíos en la educación como considerar que los nuevos ciudadanos digitales requieren la incorporación de esquemas de aprendizaje autónomo, y aportar herramientas de inclusión y alfabetización digital para la comunidad. Para lograr esto, el docente y la comunidad estudiantil deben ser competentes en la utilización de las TIC, lo que requiere el cumplimiento de una doble función: transmisión y generación de información; no simplemente replicador de información en línea, como suele aplicarse hasta hoy en la mayoría de las instituciones.

Esto no quiere decir que el solo hecho de insertar las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje lo potencialicen *per se*, ya que estos son solo un medio para el aprendizaje en un entorno en donde existe la intervención de múltiples variables. Sin embargo, los documentos nacionales actuales se orientan a que los estudiantes elaboren una representación personal de los objetivos de aprendizaje planteados, para que así construyan su propio significado de los contenidos abordados, permitiendo que el uso del conocimiento sea efectivo para la resolución de problemas y la representación de nuevos conceptos. Al incorporar toda la tecnología disponible en el mundo digital a esta construcción de significados, observamos que existe un espacio más en el cual los estudiantes tendrán que adquirir habilidades y destrezas para enfrentarse a los desafíos del siglo XXI, para ello resulta necesario adquirir nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje para enfrentar las diversas situaciones que conlleva encontrarnos bajo el enfoque constructivista, enfocando estas habilidades no solo a los contenidos propuestos, sino al desarrollo de habilidades propias del mundo digital. Las llamadas pedagogías emergentes contemplan nuevas formas de enseñar al aprovechar el potencial de la tecnología. Una pedagogía emergente que surge de esta búsqueda es la clase invertida (o flipped classroom), que considera un aprendizaje autónomo apoyado por las TIC sin perder el momento de la clase presencial.

## 1.5 La aparición de Flipped Classroom

Flipped Classroom o clase invertida comenzó a recibir este nombre en el año 2012, por los autores Bergmann y Sams, quienes decidieron "invertir" sus clases de química en el nivel de secundaria, para ello grababan los contenidos a impartir en la clase y los distribuían entre sus alumnos para que los visualizaran en casa antes de la clase, el trabajo en el aula consistía en realizar proyectos para poner en práctica los conocimientos adquiridos y resolver dudas. Esto comenzó en el año 2007 en Estados Unidos, pero recién en el año 2012 publicaron su primer libro sobre este nuevo modelo pedagógico. La clase invertida se caracteriza por generar un ambiente flexible para los estudiantes, provocando un espacio de aprendizaje constructivo en el aula como fuera de esta con la utilización de las TIC, con ello se genera una cultura de aprendizaje, donde se valoriza el contenido al hacer que el estudiante sea protagonista de su proceso de aprendizaje. En este sentido, el rol del docente es vital al momento de aplicar esta metodología, ya que no solo debe ser un guía para los estudiantes, sino que debe determinar cuándo y cómo cambiar la instrucción directa del grupo a un espacio individual.

Otro de los países que más implementa el modelo de clase invertida ha sido España, lo cual se debe a que existe una alta tasa de deserción escolar, siendo esta de un 23,6% de los estudiantes que desertan cada año de la escuela. En Estados Unidos, sucede algo similar, ya que un tercio de los estudiantes dejan los estudios cada año, que equivale a un 33% de los estudiantes, y esta es la principal razón por la que en este país se ha implementado (Fornons y Palau,2016). En Chile, 149 mil niños y jóvenes no asisten a la educación formal, que equivale a un 3,9% de los estudiantes (Tapia, 2016). Por otro lado, el modelo de clase invertida mejora la motivación, la participación y el rendimiento de los estudiantes en la asignatura en la cual se está utilizando el modelo (Lage, Platt y Treglia, 2000). Cabe señalar, que nuestra propuesta está enfocada en la mejora de rendimiento académico de los estudiantes en el contenido de trigonometría.

En España, el mayor exponente del modelo de clase invertida es Raúl Santiago, coordinador del II Congreso Europeo sobre Flipped Classroom, realizado en Zaragoza, España en el año 2016. En este congreso, participó el Colegio Mayor de Peñalolén de Santiago de Chile, donde ganó el primer lugar como la Mejor experiencia de Flipped Classroom en la Categoría infantil. Desde el año 2013 hasta hoy en día, los Colegios Mayor de Peñalolén y Tobalaba han implementado a nivel institucional el modelo pedagógico de clase invertida, en todos sus ciclos desde Play Group (Educación Parvularia) hasta cuarto de enseñanza media, abarcando niños de 3 años hasta estudiantes de 17 o 18 años. Es una de las pocas experiencias en el mundo en donde el modelo de clase invertida se ha aplicado a nivel institucional, involucrando a todos los profesores, directivos, estudiantes y familias; desarrollando metodologías propias para elaborar Cápsulas de Conocimiento (videos) para luego hacer el trabajo en el aula y posteriormente una evaluación del modelo (Morales y Baéz, 2016), siendo esta una de las pocas experiencias en Chile que aplican el modelo de clase invertida.

Debido a que la experiencia a nivel institucional se encuentra presente a nivel nacional, establecimos contacto con el director curricular del proyecto clase invertida en los Colegio Mayor, Gabriel Morales nos concedió una entrevista. Sin embargo, luego de varios meses se perdió el contacto, principalmente por las diferencias entre el modelo de clase invertida que aplicaba la institución y el marco teórico que se va a plantear más adelante. El colegio no considera relevante que los estudiantes revisen la Cápsula de Conocimiento antes de la clase, ya que considera que estas no están importantes como la clase. En cambio, nuestra propuesta considera ambos aspectos con la misma importancia.

## 1.6 Necesidades pedagógicas para el cumplimiento de los requisitos curriculares

Los estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media, establecen las competencias básicas de un futuro docente. Dentro de ellos, el estándar pedagógico número 13 es el que más se acomoda al tema que se va a trabajar en este seminario, el cual dice: "*Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos y el uso de la trigonometría".* Esto se manifiesta cuando el docente:

- Conoce aplicaciones de la trigonometría en la ciencia y la tecnología.
- Resuelve ecuaciones trigonométricas distinguiendo soluciones particulares de generales.
- Conoce dificultades que pueden tener los estudiantes al usar una calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas.
- Diseña actividades de indagación que permitan estimar atributos de objetos que no sean posibles de medir directamente.
- Explica rigurosamente, con argumentos apropiados al nivel escolar, complejidades conceptuales involucradas en trigonometría.
- Dispone de estrategias para presentar y justificar las principales identidades
- trigonométricas.
- Analiza actividades de evaluación de aprendizaje referidas al uso de las razones trigonométricas y los teoremas del seno y del coseno para resolver problemas.

El modelo de clase invertida, aplicado al contenido de trigonometría, hace que sea posible el estándar pedagógico número 13, mencionado anteriormente, ya que incorpora las TIC y el aprendizaje centrado en el estudiante. Además, permite generar lo solicitado en las Bases Curriculares, que es la construcción del conocimiento dentro y fuera del aula, siendo favorecida por el trabajo colaborativo e individual que hace que el proceso de enseñanza se centre en el estudiante, para que así involucre más en el contenido y dejar de verlo como un ente abstracto.

Por otro lado, el modelo de clase invertida fomenta la creación de un pensamiento crítico, debido a que permite que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para defender sus ideas ante sus pares. Por lo cual, favorece a que se le dé significado al contenido de trigonometría para la mejora del rendimiento de los estudiantes de segundo medio en este contenido.

## 1.7 Objetivo

Dada la necesidad descrita anterior se desprenden los objetivos generales y específicos de esta propuesta.

### 1.7.1 Objetivo general

Para esta propuesta didáctica nos planteamos el siguiente objetivo general:

Diseñar y evaluar una propuesta didáctica que se orienta bajo la metodología de clase invertida, para estudiantes de segundo año medio, aplicado a contenidos de trigonometría pertenecientes al sector de matemática.

### 1.7.2 Objetivos específicos

En esta propuesta didáctica nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

1. Diseñar estrategias pedagógicas para el desarrollo de los aprendizajes esperados de las nuevas bases curriculares de matemática de Segundo Medio, en la Unidad de Geometría, utilizando el modelo de clase invertida y uso de tecnologías para el tema de trigonometría.
2. Diseñar materiales (concretos y digitales) de soporte para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos y habilidades relacionados con la unidad, así como diseñar las ayudas didácticas para el profesor que orienten el uso de modelo de clase invertida.
3. Validar el diseño pedagógico de clase invertida por medio de un consejo de expertos.
4. Publicar el material diseñado en comunidades docentes a nivel mundial y local, para asegurar un libre acceso a los recursos propuestos.

# Capítulo 2: Marco teórico

## 2.1 El constructivismo y el aprendizaje activo

El constructivismo es una teoría que propone un ambiente de aprendizaje con múltiples perspectivas o interpretaciones de la realidad, provocando una construcción del conocimiento y no una reproducción del contenido, por medio de actividades basadas en experiencia ricas en contexto (Jonassen en Hernández, 2008). En este sentido, el constructivismo pretende que los estudiantes construyan el conocimiento bajo reflexiones, formas de trabajo colaborativo y que tenga una mirada hacia el surgimiento de un pensamiento racional. Como señala Von Glasersfeld "el saber es construido por el organismo viviente para ordenar lo más posible el flujo de la experiencia en hechos repetibles y en relaciones relativamente seguras" (1990, p. 36), lo que implica una construcción interna del aprendizaje en función de experiencias previas, estructuras mentales e ideas que se ocupan para interpretar objetos y eventos, por lo cual el aprendizaje humano se construye a partir de elaboraciones de nuevos conocimientos a partir de la base de enseñanza anteriores. Esto conlleva a que el aprendizaje de los estudiantes debiese ser un aprendizaje activo, participando en actividades en lugar de observar y escuchar lo que se explica (Hernández, 2008). Los beneficios que se desprenden de aplicar una estructura constructivista son: advertir dificultades que tienen los alumnos al momento de aprender, aportar una guía para desarrollar estrategias de enseñanza más eficientes, emplear un proceso de enseñanza en donde el protagonista es el estudiante, esto considera intereses, habilidades y necesidades para aprender.

Cabe mencionar que la aplicación de una propuesta que se realice bajo un enfoque constructivista contempla un desafío que el docente tendrá que considerar, ya que necesitará salir de la mera transmisión de conocimientos para convertirse en un docente organizador, coordinador y guía del proceso de aprendizaje, ya que este proceso es dirigido por el estudiante. Además, el modelo de clase invertida (que abordaremos más adelante) mezcla la instrucción directa con el aprendizaje constructivista, ya que permite que los estudiantes participen en clase dinámicas, creativas y de cooperación para lograr que los estudiantes sean capaces de construir su propio conocimiento (Kim y Bonk en Hernández, 2008). La tarea del profesor será diseñar entornos de aprendizaje que ayuden a sus estudiantes a aprender, según Marcelo (2001) el aprendizaje debe ser:

- Activo: Los estudiantes son los partícipes de la construcción del conocimiento, por lo cual se incentiva el desarrollo de habilidades de búsqueda, análisis y síntesis de la información.
- Autónomo: Se refiere a que deben existir áreas de conocimiento que los estudiantes puedan indagar por sí mismos.

- Adaptado: Bajo la diversidad que existe en las salas de clases, cada interacción debe adaptarse a las posibilidades y necesidades de formación de cada estudiante en particular.
- Colaborativo: El estudiante no solo necesita adquirir conocimientos, sino también desarrollar habilidades sociales para saber relacionarse con los demás y trabajar en conjunto.
- Constructivo: La nueva información se construye sobre la anterior, por lo cual se utilizan etapas de aprendizaje acordes con la construcción de conocimientos.
- Orientado a metas: Se realizan objetivos de aprendizaje explícitos, dándole al estudiante la capacidad de elegir el camino para alcanzar dicha meta.
- Diagnóstico: Analizar la comprobación del progreso de los estudiantes teniendo el diagnóstico como punto de partida.
- Reflexivo: Se promueve la reflexión entre grupos de estudiantes.
- Centrado en problemas y casos: Las nuevas alternativas para transmitir y facilitar el conocimiento, tienen que ver con la utilización de estrategias adecuadas en donde el estudiante se involucre con su proceso de aprendizaje.

En el constructivismo el aprendizaje es activo, no pasivo. La concepción sobre el aprendizaje activo se entiende que es cualquier actividad que involucre a los estudiantes en hacer cosas y pensar en lo que están haciendo (Bonwell y Eison, 1991). Otra manera de entender el aprendizaje activo, como aquel aprendizaje en que los estudiantes analizan ideas, resuelven problemas y aplican lo que aprenden a través de la estimulación de sus sentidos. Este aprendizaje se caracteriza por ser ágil, útil y atractivo, ya que contempla las diferencias individuales de los estudiantes dándoles la posibilidad de desarrollar sus habilidades de maneras más variadas. Bajo este parámetro un aprendizaje activo contempla un proceso cognitivo propio del estudiante, ya que este se convierte en el único protagonista de realizar este proceso.

El constructivismo al ser un aprendizaje activo tiene un enfoque educativo centrado en el estudiante, que se detalla a continuación.

### 2.1.1 Enfoque educativo centrado en el estudiante

La estrategia centrada en el estudiante refleja la necesidad de un enfoque que se centra en el aprendizaje de este (McCombs y Whisler, 1997), en donde se contempla su individualidad, tomando en cuenta que cada alumno tiene rasgos heredados, perspectivas, experiencias previas, talentos, interés, capacidades y necesidades. Para lograr esto el docente debe ser capaz de entender la realidad de cada estudiante, como también atender a sus necesidades básicas en el proceso de aprendizaje. Es por ello, que, durante una clase centrada en el estudiante, el profesor guía al estudiante a articular su propio aprendizaje y demostrar el nuevo contenido asimilado; para debatir, evaluar y pensar críticamente. El foco primordial se transforma en la interacción con el contenido para resolver problemas y la evaluación se basará en el trabajo participativo del estudiante y el profesor. Un ejemplo de esto es el modelo de clase invertida, que propone cambiar del enfoque pedagógico tradicional a uno que aproveche los recursos tecnológicos de nuestra sociedad para maximizar las relaciones profesor-estudiante y estudiante-estudiante.

El enfoque centrado en el estudiante se puede dar por distintos medios de aprendizaje, pero en el caso de nuestra propuesta nos centraremos en dos aprendizajes: el aprendizaje cooperativo y el aprendizaje individual.

#### 2.1.1.1 Aprendizaje cooperativo

La cooperación es la realización de un trabajo en grupos o en equipos que tienen un objetivo en común, en estas situaciones las personas que conforman el grupo se interesan en obtener resultados beneficiosos tanto para ellos mismos como para el resto del grupo y es por esto que el aprendizaje cooperativo se define como el empleo de grupos pequeños en los que se intenta maximizar el aprendizaje de cada miembro del grupo (Johnson, Johnson y Holubec ,1999).

Los autores Johnson, Johnson y Holubec (1999) nos hablan de que existen cuatro tipos de grupos cooperativos, el primero de ellos es el grupo de pseudoaprendizaje en el cual los estudiantes siguen la orden de trabajar juntos, pero no tienen ningún interés en hacerlo. Luego tenemos al grupo de aprendizaje tradicional en el que los estudiantes se les dice que trabajen juntos y ellos lo hacen, pero las tareas que se les asignan están formadas de tal modo que no necesitan que los estudiantes trabajen en conjunto. El tercero es el de aprendizaje cooperativo en donde a los estudiantes se les indica que trabajen en conjunto y ellos lo hacen con mucho gusto, este grupo se caracteriza por que todos trabajan juntos por el mismo fin, cada uno asume responsabilidades para alcanzar el objetivo planteado, trabajan codo a codo con el fin de producir resultados en conjuntos, aprenden de las relaciones interpersonales y el grupo es capaz de analizar con eficacia si están logrando el objetivo. Y el último, es el grupo de aprendizaje cooperativo de alto rendimiento el cual cumple con todos los requisitos de un grupo de aprendizaje cooperativo y obtienen resultados fuera de expectativa razonable. En este sentido un grupo que está bien estructurado va a tener mejor rendimiento y eficacia que trabajar de formar individual (Véase Figura 2.1)

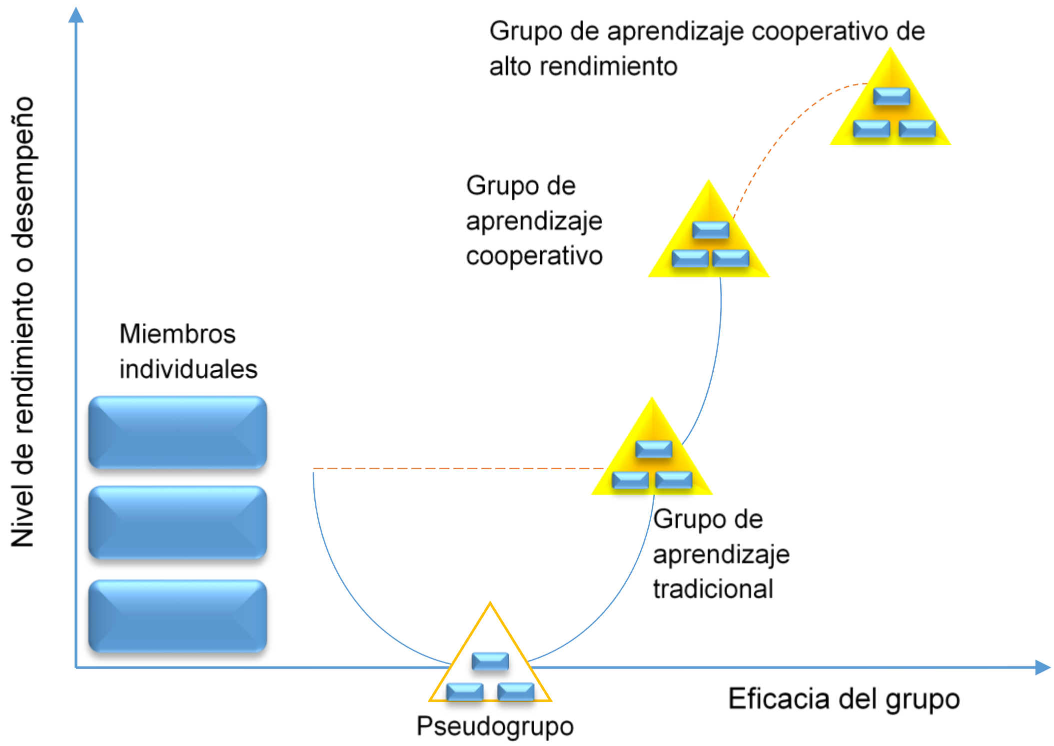



**Figura 2.1** Nivel de rendimiento o desempeño vs Eficacia del grupo. Adaptado de Johnson, et al (1999).

2.1.1.2 Aprendizaje individual

En el aprendizaje individual, cada alumno trabaja para conseguir sus objetivos que están al margen de los objetivos propuestos por los demás integrantes del aula, trabajando de forma independiente para lograr la meta propuesta. Es por ello que el éxito estará relacionado con su esfuerzo, con su motivación, sus cualidades y habilidades propias. Cada alumno tiene la posibilidad de trabajar a su ritmo sin importar los demás integrantes de la clase, ya que la evaluación en este tipo de aprendizaje es a través de una prueba en donde el rendimiento de cada alumno se compara con criterios preestablecidos. Hay momentos en la etapa de los estudiantes que va a ser necesario el aprendizaje en forma individual, como por ejemplo estudiar para una evaluación, la escritura de un informe y reflexiones propias, siendo estas actividades más enriquecedoras si se utiliza el aprendizaje individual (Cadoche, 2009).

En resumen, el constructivismo nos da una mirada de la construcción del conocimiento de los estudiantes que concuerda con el enfoque que tiene el modelo de clase invertida, centrado en un aprendizaje activo que se enfoca en el estudiante, dándose de forma cooperativa y de forma individual. El constructivismo, puede estar integrado en la sala de clase, sin el uso de las TIC, pero las características que poseen éstas las convierten en unas herramientas particularmente útiles para este tipo de aprendizaje (Hernández, 2008), por lo cual el estudiante va a tener la posibilidad de ampliar su experiencia al utilizar las TIC como herramientas para el aprendizaje constructivista.

## 2.2 Las TIC y educación

El avance de las TIC ha provocado cambios globales en todos los aspectos de nuestra sociedad, y la educación no está exenta de esta revolución. Como ya observamos anteriormente, el constructivismo nos ofrece un cambio de enfoque en la educación, por lo cual es necesario obtener nuevas maneras de guiar al estudiante en su propio aprendizaje. Como señala Hernández (2008):

> Las nuevas tecnologías, al ser utilizadas como herramientas constructivistas, crean una experiencia diferente en el proceso de aprendizaje entre los estudiantes, se vinculan con la forma en la que ellos aprenden mejor, y funcionan como elementos importantes para la construcción de su propio conocimiento. Hernández (2008; p. 34).

Bajo este concepto, observamos que el uso de estas tecnologías afecta a las nuevas formas de aprender, conocer y enseñar. Es necesario desarrollar nuevas habilidades como las formas de comunicación y los criterios de selección de la información. También utilizar nuevas metodologías que se adapten a estos entornos tecnológicos.

Según Castells (2000), las TIC favorecen una comunicación continua, en tiempo presencial:

> Internet es el centro, no sólo de la revolución tecnológica, sino el centro del nuevo sistema de organización económica y social. Internet no es una tecnología más, es el equivalente al motor eléctrico en la era industrial, es el instrumento que crea la infraestructura material, en la que, por primera vez en la historia, se puede producir una comunicación entre muchas personas en el tiempo elegido, es decir, en tiempo instantáneo o en tiempo diferido. (Castells, 2000, p.7).

Este cambio favorece la comunicación profesor-estudiante en aulas, centros educativos y entornos virtuales, por lo cual se abre la posibilidad de actividades e interacciones en línea que permite la acción, percepción y comunicación inmediata de ambos actores gracias a los medios tecnológicos. Cabe mencionar que cada estrategia pedagógica que contemple el uso de las TIC requiere el acompañamiento de opciones educativas y perspectivas ideológicas. Durante este siglo, el papel fundamental de la educación será dar a las nuevas generaciones la capacidad de comprender los cambios que se están dando, como también las herramientas necesarias para adaptarse a ellos. Con las tecnologías emergentes, definidas por Adell y Castañeda (2012) como:

> El conjunto de enfoques e ideas pedagógicas, todavía no bien sistematizadas, que surgen alrededor del uso de las TIC en educación y que intentan aprovechar todo su potencial comunicativo, informacional, colaborativo, interactivo, creativo e innovador en el marco de una nueva cultura de aprendizaje (Adell y Castañeda, 2012, p.15).

Debido a ello, el docente deja de ser el único medio de acceso al conocimiento, ya que tanto el docente como el estudiante se encuentran en una red que contempla un amplio abanico de información que les permite la actualización de contenido de manera electrónica. Este exceso de información definido por Cornellá en Cabero y Barroso (2015) como "infoxicación", refiere al hecho de la sobresaturación de información o intoxicación informacional que plantea nuevos retos en términos de: evitar el desbordamiento de información y la distinción de información relevante a través del desarrollo del pensamiento crítico. Por lo cual, el énfasis del docente será enfrentar estos nuevos desafíos por medio de los cambios de estrategias didácticas, sistemas de comunicación y distribución de los materiales de aprendizaje.

Bajo el concepto de las nuevas modalidades educativas surge la aparición de nuevos espacios de comunicación que posibiliten la producción del aprendizaje y la construcción del conocimiento. Estos aprendizajes enfocan la mirada hacia un aprendizaje enriquecido con tecnología, que permita la aparición de una educación formal y no formal. Al hablar de una educación formal nos referimos a un entorno de aprendizaje entregado por una institución escolar, en cambio cuando hablamos de una educación no formal nos referirnos a esas instancias en donde el estudiante aprende fuera de la institución escolar. En ambos casos podemos encontrar una educación cara a cara o una educación a distancia (Véase Figura 2.2). Según la aparición de estos entornos, tendremos E-learning, B-learning y M-learning (Cabero y Barroso, 2015), que se definen:

- E-learning: Es el aprendizaje en el que el Internet desempeña un papel protagónico en la entrega, soporte, administración y evaluación de los procesos, también se puede definir como una educación a distancia enriquecida con tecnología.
- B-learning: conocido como Blended learning, se refiere al modo de aprender que combina la enseñanza presencial con la enseñanza no presencial apoyada por los recursos en línea, también se añade que el b-learning es la combinación de la enseñanza cara a cara con los recursos en línea. Bajo los parámetros del b-learning nos encontramos con dos tipos de modelos: el modelo flexible que se centra en el aprendizaje en línea, y el modelo de rotación en el cual los estudiantes rotan entre las modalidades de aprendizaje. Dentro de la categoría de modelo de rotación, encontramos el llamado The Flipped Classroom.
- M-learning: También llamado Mobile learning, es un aprendizaje basado en la ubicuidad y conexión a la red a través de dispositivos móviles, este tipo de aprendizaje

busca fomentar el que los estudiantes tengan el control de cuándo y dónde quieren aprender, utilizando la tecnología móvil para el aprendizaje formal e informal.

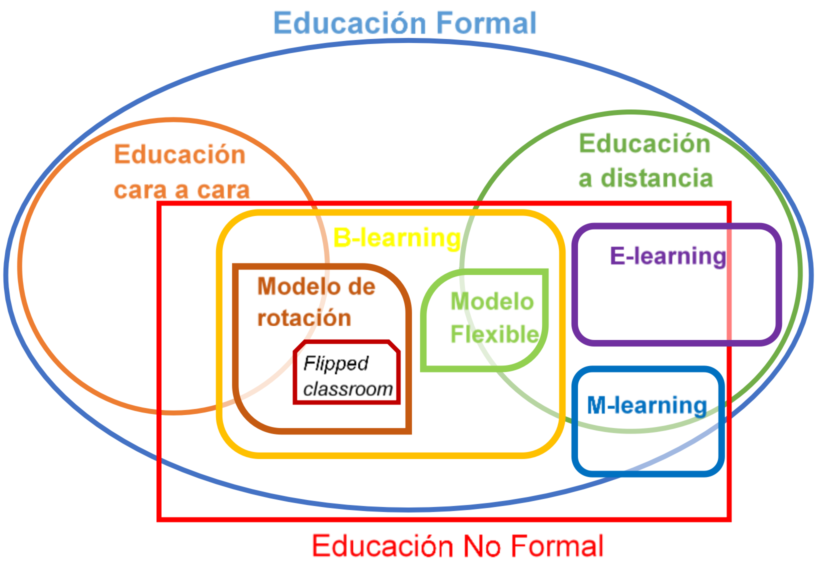



**Figura 2.2** Integración de ámbitos formativos y modelos de aprendizaje con recursos en línea. Adaptada de Cabero y Barroso (2015).

El uso de las tecnologías de la información y comunicación requieren un diseño de nuevos escenarios educativos, para que el estudiante pueda aprender a moverse en el nuevo espacio y dedicar un tiempo de su día al contenido de las clases. El uso de las TIC estimula el uso de nuevas metodologías y una organización de distintos escenarios de aprendizaje que involucren una mayor autonomía del estudiante, contemplando una retroalimentación más amplia con el docente y una mayor comprensión de los conceptos; esto puede traducirse a un aprendizaje más significativo, situado en la realidad y más estimulante (Castillo, 2008).

Particularmente, el uso de las TIC en el área de matemática involucra más que solo el uso de recursos multimedia, requiere incentivar habilidades de acción, percepción y comunicación a través de un entorno virtual. El docente debe estar consciente de que las TIC posibilitan el acceso a recursos que combinan elementos y herramientas que favorecen el aprendizaje, si las estrategias de enseñanza garantizan el uso apropiado de estas tecnologías esto se traduce a un aprendizaje significativo. Estos avances en las TIC ofrecen la facilitación de procedimientos de cálculo mediante el uso de software disponible para un público general. Algunos ejemplos de ello son los recursos en línea, el manejo de audio, los videos, gráficos y plataformas virtuales. Estos recursos apoyan las investigaciones de los alumnos en distintas áreas de la matemática, ya que se espera que, una vez dispongan de ellas, puedan tomar decisiones, razonar y resolver problemas.

Gallardo y González en Castillo (2008), hacen hincapié en que el conocimiento matemático posee una elevada complejidad, lo que desencadena en la necesidad de adaptar los enfoques a un tipo de análisis situacional, es decir el uso de conocimiento matemático que considera una categorización y selección de situaciones propicias para desarrollar dicho enfoque. Además, se necesitan de modelos específicos que integren la tecnología, con principios didácticos, de especialización, cognitivo, empírico, pedagógico y de equidad. Estos principios permiten diseñar actividades, seleccionar herramientas probadas que tengan relación directa con los objetos matemáticos y diseñar actividades de uso de las TIC que promuevan el aprendizaje colaborativo y la interacción estudiante-estudiante y profesor-estudiante. Según Massut (2015), las TIC favorecen el cambio hacia un paradigma educativo más personalizado que se centra en la actividad de los estudiantes.

Un elemento influyente en centrar la actividad en los estudiantes, es utilizar las redes sociales educativas como herramientas constructivistas, funcionando como una continuación del aula escolar, pero de carácter virtual, con ello se amplía el espacio de interacción entre los estudiantes y el profesor (Hernández, 2008). Las redes sociales educativas proporcionan un contacto continuo entre los integrantes de dicha comunidad, accediendo a nuevos materiales que ofrecen estos espacios. El uso de esta tecnología presenta espacios de interacción instantáneos, utilización de imágenes y sonidos, y una manera más simple de trabajar con la diversidad en el aula (Hernández, 2008).

## 2.3 La Clase Invertida

El constructivismo sostiene que el usar actividades interactivas que involucren al estudiante en un papel activo y motivador para el aprendizaje, su aprendizaje será más eficaz que si los alumnos son pasivos. El modelo de clase invertida apoya sus principios al dejar tiempo de la clase para un aprendizaje cooperativo, basado en la indagación, la práctica y la investigación (Brandt en Massut, 2015).

En términos generales, el aprendizaje invertido se define como un enfoque pedagógico en el cual la instrucción directa del modelo pedagógico tradicional se mueve desde el aula, a un espacio de aprendizaje individual mediante el uso de recursos tecnológicos; esto permite que el aula se transforme en un ambiente de aprendizaje activo que incentive la aplicación de conceptos y el uso de elementos creativos que motiven la participación del estudiante (Bergmann y Sams, 2014). Particularmente, el modelo pedagógico de clase invertida se enfoca en el uso del aprendizaje invertido dentro del aula, al cual se le incorpora el uso de TIC para redefinir el espacio de aprendizaje. Echeverría en Ruiz, Callejo, González, Fernández (2004) señala que este enfoque no significa sustituir la enseñanza clásica en aulas presenciales por la enseñanza virtual, sino expandir la escuela al espacio electrónico

Las pioneras en desarrollar este tipo de estrategia fueron las profesoras Bárbara E. Walvoord y Virginia Johnson Anderson, en 1998, las cuales proponen un modelo en que los estudiantes tienen el primer acercamiento con el contenido de la clase fuera del aula, luego es interiorizado en la clase, donde se busca sintetizar, analizar y resolver problemas a través de las estrategias del aprendizaje activo. Así, antes que la clase comience, los estudiantes tendrán una serie de actividades enfocadas al contenido que se verá luego (Olaizola, 2014).

Sin embargo, el origen de la metodología de inversión de clase se remonta a Lage, Platt y Treglia (2000), quienes proponen el uso de la estrategia en una clase de economía de una Universidad Pública de Miami (Miami University). El enfoque aplicado era asegurar mediante guías de lectura que los estudiantes se prepararan antes de la clase con actividades que permitieran analizar y aplicar principios económicos mediante el trabajo colaborativo. La razón de este cambio es considerar que los distintos estilos de aprendizaje de los estudiantes requieren distintas maneras de observar el contenido, por lo cual este debe ser mostrado de diferentes maneras para que el estudiante pueda conocerse y desarrollar habilidades de aprendizaje individual.

En 2007, Bergmann y Sams (2012) denominan el modelo como "Flipped Classroom" o clase invertida. La propuesta iba dirigida a una clase de química en la cual los estudiantes se encontraban con baja asistencia por diversos motivos (competencias deportivas, enfermedad, problemas climáticos); debido a ello, estos profesores comenzaron a realizar grabaciones de sus clases y anotaciones a su material docente. Más tarde, hacían públicos los videos añadiendo el contenido a YouTube, así el estudiante podía acceder al sitio virtual en cualquier instante.

### 2.3.1 Modelo pedagógico invertido

En una clase tradicional, el docente trasmite información, definiciones y explicación a los estudiantes en el aula, los cuales aceptan el contenido escuchando y tomando nota para luego realizar preguntas al docente. Fuera del aula, el estudiante se dedica a memorizar, asimilar y aplicar el contenido a resolución de problemas, con el fin de prepararse para la clase siguiente, en donde el docente responde las dudas sobre el contenido visto en la anterior sección dando una retroalimentación del contenido al estudiante. Esta metodología está centrada en el docente, donde el objetivo es cubrir la mayor cantidad de contenido exigido por el currículum. El diseño actual de clase invertida, cambia los tiempos y los roles de una clase tradicional, utilizando un enfoque pedagógico centrado en el estudiante que se apoya en el uso de recursos tecnológicos y multimedia, así provee un ambiente de aprendizaje para el estudiante, tanto dentro como fuera del aula (New York University, 2015).

En el modelo de clase invertida el docente produce o selecciona el material digital antes de la clase, el material expone contenidos del curso y permite el desarrollo de actividades que verifiquen la comprensión del tema; luego el docente distribuye el material a sus estudiantes. Durante la clase, el profesor desarrollará un ambiente de aprendizaje que contenga los tópicos que se distribuyeron anteriormente gracias al material digital. Así la instrucción directa de la clase tradicional se realiza fuera del aula, con el fin de utilizar el tiempo presencial para desarrollar actividades de aprendizaje significativo, maximizando la interacción uno a uno entre estudiante y docente. Fulton en Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey (2014) señala que la clase invertida da un giro que permite mejorar la experiencia en el aula, enfocándola a experiencias significativas como discusiones, ejercicios, laboratorios y proyectos, además de propiciar el trabajo colaborativo entre los propios estudiantes.

El utilizar recursos TIC fuera del aula abre una ventana para que el estudiante elija cómo y dónde trabajar los contenidos de la clase. Cabe mencionar que el punto clave del modelo no está en las TIC, sino en las actividades que realizan los estudiantes y el profesor dentro del aula. Como señala Coll en Paz, Serna, Ramírez, Valencia y Reinoso (2015) las posibilidades de comunicación, intercambio, acceso y procesamiento de la información que las TIC ofrecen, exigen una búsqueda de las claves para comprender y valorar el alcance de su impacto en la educación escolar, esto incluye el eventual impacto en la mejora de los resultados de aprendizaje.

Otro elemento a considerar al referirnos al modelo de clase invertida es el proceso de planificación de actividades acordes a los objetivos que el docente se plantea cada clase, y en particular, en una clase invertida. La Taxonomía de Bloom ha sido uno de los recursos más utilizados por los establecimientos de educación en Chile, siendo el pilar fundamental en la planificación del proceso de aprendizaje en sus diferentes niveles. La Taxonomía original, así como la revisada por Anderson y Krathwohl, se enfoca en el dominio cognitivo del estudiante, desde la retención básica de los hechos hasta la aplicación de los conocimientos para crear algo nuevo (Bloom y Krathwohl, 1956), el modelo de clase invertida permite que los estudiantes realicen los niveles más bajos de la Taxonomía de Bloom (recordar y comprender) en casa, y las etapas más altas de esta (aplicar, analizar, evaluar y crear) las llevan a cabo en el aula (véase figura 2.3), por medio de un proceso guiado por el docente y en un aprendizaje cooperativo (Brame en Massut, 2015). Por el contrario, en la clase tradicional los estudiantes realizan los niveles más bajo del trabajo cognitivo en la sala de clase con el profesor, comenzando con tareas básicas como recordar datos, para continuar con la compresión de la información y en la casa el estudiante debe realizar los niveles más alto del trabajo cognitivo, como la aplicación de nuevas estrategias o procedimientos, el análisis y evaluación de la información, para llegar a la creación de una nueva información (Massut, 2015).

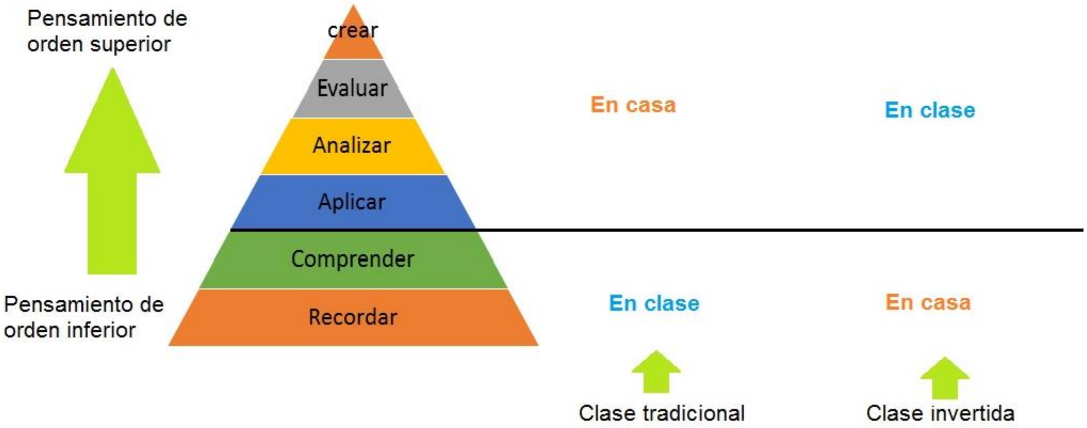



**Figura 2.3** Taxonomía de Bloom y clase invertida. Adaptada de Massut (2015).

La taxonomía de Bloom para entornos digitales expande los elementos cognitivos incorporando herramientas y métodos, por lo cual la calidad del proceso define el nivel cognitivo y no el proceso en sí. Esto no implica que el enfoque está en las herramientas o en las TIC, sino que son el medio para recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear (Churches, 2009).

2.3.1.1 Los cuatro pilares del aprendizaje invertido

El uso de la clase invertida requiere un aprendizaje que se realice de manera tal que el enfoque de la clase sea de manera distinta. Para ello, el docente debe involucrar un aprendizaje invertido en la clase, incorporando los siguientes cuatro pilares (Flipped Learning Network, 2014; Hamdan, McKnight, McKnight y Arfstrom, 2013) a su práctica educativa.

**Ambiente Flexible:** Un ambiente flexible fuera del aula se produce al hacer uso de las TIC ya que el estudiante elige cómo y dónde aprender. Dentro del aula, debido a que el profesor comprende que la clase puede tornarse caótica y ruidosa comparada con una clase tradicional, combina estrategias de aprendizaje activo que permitan que el ambiente sea aprovechado de la mejor manera. En este pilar, el docente:

- Establecerá espacios para permitir que los estudiantes reflexionen sobre su propio aprendizaje.
- Realizará una observación continua de sus estudiantes para realizar ajustes apropiados.
- Proveerá a los estudiantes distintas formas de aprender el contenido.

**Cultura de aprendizaje:** Utilizar el modelo clase invertida supone cambiar de una clase centrada en el profesor, a una centrada en el estudiante. Por ello, el enfoque de la clase es el de explorar, crear oportunidades de aprendizaje enriquecedoras, profundizar temas y maximizar las interacciones cara a cara, tanto profesor-estudiante como estudiante-estudiante. Durante este pilar, el profesor:

- Entregará oportunidades para que los estudiantes sean capaces de estudiar sin el docente.
- Analizará las actividades en casa y entregará una retroalimentación, realizando adaptaciones a la manera de enseñar el contenido según las necesidades del estudiante.

**Contenido intencional:** Los profesores que implementan el modelo de clase invertida evalúan constantemente el contenido necesario para el desarrollo de la unidad. El docente se prepara para invertir su clase seleccionando los recursos según su efectividad a partir de los criterios pedagógicos destinados al curso, con el fin de maximizar el tiempo de clase y lograr la atención del estudiante fuera del aula. En este pilar, el docente:

- Priorizará los conceptos que se aprenderán mediante la instrucción directa, así los estudiantes podrán acceder a ellos por sí mismos.
- Creará y/o seleccionará contenido relevante para sus estudiantes.

**Facilitador Profesional:** En este modelo, el docente especializado es más importante que nunca, ya que determinará cuándo y cómo cambiar la instrucción directa del grupo a un espacio individual de aprendizaje, cómo maximizar los tiempos de interacción cara a cara y cómo organizar grupos de trabajo a favor del aprendizaje colaborativo. Durante la clase y fuera del aula, el profesor observará continuamente a sus estudiantes para proveerles una retroalimentación constante y evaluar el trabajo realizado. Un educador profesional observará a sus alumnos con el fin de intercambiar información relevante, esta información lo hará reflexionar respecto a su práctica educativa. Para el cumplimiento de este pilar, el profesor:

- Tendrá total disposición para todos sus estudiantes, sea de manera individual, con grupos pequeños y con toda la clase, con el fin de entregar la retroalimentación que cada uno necesita.
- Realizará evaluaciones formativas continuamente a través de observación en clases y datos obtenidos de la misma.
- Colaborará y reflexionará con otros docentes para transformar continuamente sus prácticas educativas.

### 2.3.2 Rol del profesor y del estudiante en la clase invertida

Al utilizar el modelo de clase invertida el estudiante, antes de la clase, debe trabajar con el material de aprendizaje que ha preparado el docente previamente (véase figura 2.4). Dicho material, le proporciona al estudiante un aprendizaje guiado para realizar preguntas al inicio de la siguiente clase, y así conseguir una retroalimentación inmediata por parte del docente. Estas preguntas preparadas por el estudiante son planteadas en el inicio de la clase, donde el docente las utiliza para aclarar las dudas que quedaron del contenido (New York University, 2015). De a poco el estudiante se va volviendo protagonista en la sala de clase, desarrollando su proceso de aprendizaje del pensamiento crítico y solucionado problemas complejos distintos (Achútegui, 2014), los cuales son desarrollados en grupos para fomentar el aprendizaje colaborativo.

Por esto, el rol que juega el docente es clave al momento de aplicar el modelo de clase invertida, ya que actúa como tutor y/o productor de contenidos digitales educativos, distribuidor de los mismos materiales y evaluador del aprendizaje de los estudiantes (Olaizola, 2014). El profesor es, para el estudiante, un guía en su proceso de aprendizaje para apoyarlo, responder sus inquietudes, darle retroalimentaciones, identificar obstáculos o dificultades que se van presentando y ayudarlos a superarse a sí mismo. Después de la clase, los estudiantes siguen aplicando los conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo de su proceso de enseñanza a problemas más complejos, pasando desde un aprendizaje individual hasta un aprendizaje colaborativo. Para ello, el docente debe publicar más material para trabajar, estudiar las falencias que quedaron en algunos estudiantes en la adquisición del contenido y abordando de forma más personalizada a los estudiantes que no lograron aprenderlo. Gojak en Olaizola (2014), señala que el docente fomenta un aprendizaje significativo y con sentido en el estudiante al momento de aplicar las potencialidades del modelo de clase invertida.

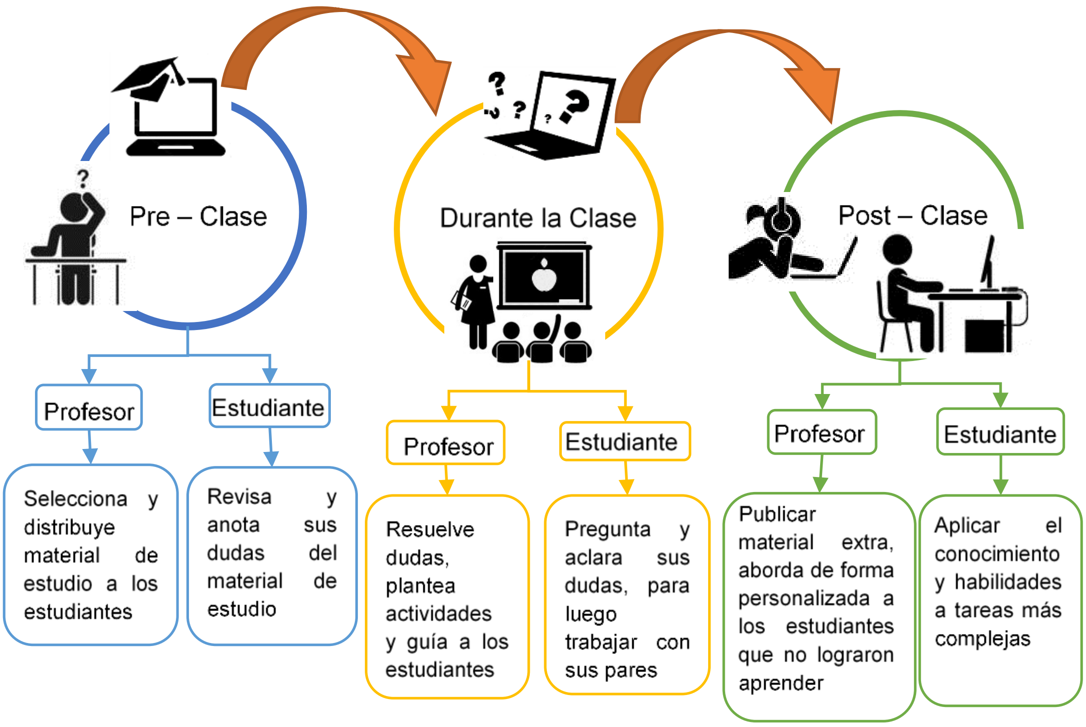



**Figura 2.4** Esquema de Clase Invertida. Adaptada de Paz, et al (2015).

### 2.3.3 Ventajas y desventajas de la clase invertida

Bergman en el Tecnológico de Monterrey (2014) manifiesta que el modelo de clase invertida presenta favorables beneficios para los estudiantes, debido a que la clase invertida facilitaría que el alumno pueda descubrir su propio estilo de aprendizaje, aprovechando el uso de recursos tecnológicos, como los videos que brinda al estudiante la posibilidad de pausar y rebobinar al maestro, en el caso que no entendieran la materia. Además, mejora el ambiente de la clase convirtiéndolo en un entorno en donde se comparten ideas, se platean las inquietudes y se resuelven las dudas, reforzando el trabajo cooperativo y mejorando la interacción entre estudiante y profesor. Permite que los estudiantes sean partícipes en su proceso de enseñanza-aprendizaje, mejorando su pensamiento crítico, analítico y creativo. Igualmente destaca los beneficios que tiene para el docente aplicar este modelo, tales como, tener una atención más personalizada con sus estudiantes, lo cual posibilita que conozca mejor sus realidades y aumentando la motivación de estos, lo que va a contribuir a que exista una retroalimentación sumativa y formativa entre el docente y los estudiantes.

No obstante, el modelo de clase invertida tiene desventajas tanto para el estudiante como para el docente. Tal como señala Pineda (2016) el docente debe dedicar tiempo y conocimientos para mejorar sus planificaciones de clase, su metodología y los recursos que se emplean, lo cual genera que haya un aumento de horas no lectivas para este. En Chile, los docentes que trabajan en escuelas municipales, particulares subvencionadas y de administración delegada, tienen dentro de su contrato un 70% de horas lectivas y un 30% de horas no lectivas, que para el año 2019 se aumentará un 5% las horas no lectivas, quedando una proporción de 65% horas lectivas y 35% de horas no lectiva (Tapia, 2016). Por otro lado, se debe considerar que para llevar a cabo el modelo de clase invertida los estudiantes deben tener acceso a un ordenador y a una conexión a internet en su casa, lo cual se traduce en una desventaja para aquellos estudiantes que no tienen estos elementos. Y esto también puede darse si el establecimiento no tiene los recursos necesarios en tecnología para apoyar a los estudiantes. En la séptima encuesta de acceso y uso de internet que se realizó a 3500 chilenos presenciales en el hogar, se encontró que un 72% de los encuestados cuenta con internet fijo y/o móvil en sus hogares, siendo la banda ancha fija la de mayor utilización con un 71,7%, a continuación de esta se encuentra los Smartphone con un 44,7%, para luego tener la banda ancha móvil con un 14,1% y por último están las Tablet y la conexión satelital con un 4,4%. De la encuesta se observó que la población chilena, de entre 16 y 29 años, utiliza mayoritariamente el internet para comunicación y actividades recreativas (Subtel, 2016).

Sanz (2015) propone una solución a esta desventaja, la cual llama como In-Class Flip que consiste en que aquellos estudiantes que no pudieron realizar la actividad programada para fuera de la clase, la lleven a cabo dentro del aula, en donde se dispone de computadores para que estos estudiantes trabajen, mientras ellos realizan esta actividad, el docente prosigue con la clase planificada para el aula, aunque debe asumir un rol de guía en la actividad programada para esta sección y para el estudiante que no llevó a cabo la actividad fuera del aula, con el fin de que este se pueda integrar de una mejor manera luego de haber acabo la actividad en la cual estaba trabajando.

Otro requisito del modelo de clase invertida es que el docente debe tener un conocimiento alto sobre las TIC, con el fin de generar un material adecuado para que el estudiante sea capaz de trabajar de forma autónoma fuera del aula. Aunque Acedo, en Berenguer (2016), nos señala que no todos los alumnos tienen la capacidad de aprender de forma autónoma viendo videos o leyendo la materia, sin que alguien los ayude o vigile. Por lo cual, el docente al momento de crear el material y de grabar videos, debe considerar que el material que arme, forme un dialogo con el estudiante.

### 2.3.4 La evaluación de la metodología de clase invertida

La evaluación es un proceso sistemático de indagación y compresión de la realidad educativa, debido a que se trata de un proceso racional previamente planificado para el desarrollo de la enseñanza y además es un elemento fundamental para acercarnos a la realidad de la situación que se está evaluando. Pretendiendo con la evaluación emitir un juicio de valor sobre sí misma para tomar decisiones de cualquier tipo, sean de mejora o de rendición de cuentas, en donde el juicio de valor se encuentra basado en criterios objetivos, que nos llevarán a tener una evaluación de calidad si permite identificar el cómo dinamizar el proceso de mejora o innovación (Leyva, 2010).

Existen varias formas de caracterizar la evaluación, sin embargo, la más utilizada es según su funcionalidad. Como señala Leyva (2010) esta dimensión de la evaluación refiere a la función que cumple en el proceso evaluativo, determinando así el uso que se le dará a los resultados. Observaremos tres tipos de evaluaciones:

- Diagnóstica: También llamada evaluación inicial, su función es proporcionar información sobre los conceptos y habilidades previas del estudiante. Es muy importante considerarla, sobre todo en las adaptaciones continuas que el docente realiza del contenido, por lo que se habla de una evaluación reguladora.
- Formativa: También se conoce como evaluación procesual, cumple con una función reguladora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, permitiéndole al docente realizar adaptaciones de forma progresiva, ya que se centra más en los procesos que se realizan para el logro de los resultados de aprendizaje. Este tipo de evaluación requiere: análisis de tareas, observación de dificultades en la mayoría de los estudiantes, métodos y técnicas para obtener información, formas de interpretar la información, estrategias de retroalimentación y formas de adaptación del proceso.
- Sumativa: También nombrada evaluación final, constituye un balance general tanto de los conocimientos involucrados como de las competencias desarrolladas después del proceso. Su finalidad es centrarse en el cumplimiento de objetivos y estándares determinados con anterioridad, con ello se puede realizar juicios de aprobación lo que además permite comparaciones entre grupos y conexión de niveles de aprendizaje alcanzado.

En el modelo de clase invertida, Morales y Báez (2016) nos hacen hincapié en que la evaluación de la metodología de clase invertida, debe ser entendida como un instrumento para el aprendizaje, por lo cual la evaluación debe ser formativa, con el fin de conducir a los estudiantes a la comprensión del proceso de enseñanza. No basta en fijarnos en el proceso de evaluación de la enseñanza, sino que además debemos considerar el clima que se genera en la sala de clase al momento de evaluar, ya que como bien señala Santos *"La evaluación condiciona de tal manera la dinámica del aula que bien podría decirse que la hora de la verdad no es la hora del aprendizaje sino la hora de la evaluación"* (1996, p. 25), por lo cual los estudiantes se ven obligados a replicar lo que el docente enseña para obtener una buena calificación y no los estamos guiando a la comprensión de la materia que se está enseñando.

### 2.3.5 Estudios realizados sobre el modelo de clase invertida en matemática

Desde el año 2000 se ha generado un gran interés en aplicar el modelo de clase invertida a una clase de matemática, comenzando con Shyu (2000), quien investigó los efectos que producían los videos tutoriales en la actitud hacia la matemática y la enseñanza general en alumnos de primaria en Taiwán, siendo sus principales resultados una mejora en la actitud de los estudiantes hacia la matemática y en las habilidades para resolver problemas con la instrucción de videos.

Otro estudioso del tema es Toppo (2011), quien documenta el trabajo de un profesor que aplica el modelo de clase invertida a la materia de cálculo en Michigan, obteniendo como principal resultado una mejora en el aprendizaje de los estudiantes. Un estudio similar sobre el modelo de clase invertida en las matemáticas se llevó a cabo en la secundaria de Byron, Minnesota por Faulkner (Bergmann y Sams, 2013), quien además de ocupar los videos previos a la clase, propuso que en la sala los estudiantes trabajen en forma individual frente a una pregunta para luego formar grupos entorno a esta pregunta y llegar así a una respuesta. Al llevar a cabo una encuesta, obtuvo que el 87% de los padres y el 95% de los estudiantes señalaron que preferían el aprendizaje con el modelo de clase invertida al formato de clase tradicional de las matemáticas.

En 2013, Johnson (2013) realizó un estudio sobre la percepción de los estudiantes de tres aulas de matemática de la escuela secundaria sobre el modelo de clase invertida, los resultados de las encuestas arrojaron que los alumnos disfrutan aprendiendo y que logran mejores resultados.

Fornons y Palau (2016) aplicaron el modelo de clase invertida al tema de estadística y probabilidades, dentro de la asignatura de matemática de tercero de educación secundaria obligatoria (ESO) que se realizó en el instituto de Ermegol IV en dos clases, donde un mismo profesor llevó a cabo una clase tradicional en un curso y al otro le aplicaba el modelo de clase invertida. De su estudio constataron que el grupo que realizó las clases siguiendo el modelo de clase invertida ha aumentado en un 20% los resultados académicos, mejorado el ambiente de trabajo y la actitud de los alumnos frente a la matemática.

En resumen, vemos que el modelo de clase invertida cuenta con mejoras en los resultados de los estudiantes, como también en la actitud de estos frente a la matemática. No obstante, no tenemos escritos que avalen que el modelo de clase invertida mejora el resultado de los estudiantes en el tema de geometría, siendo más específico el contenido de trigonometría. Es por ello, que tenemos que considerar las dificultades de los estudiantes en este tema para luego aplicar el modelo de clase invertida.

## 2.4 Geometría en el aula

En el currículum de Chile, el estudio de la geometría tiene un lugar privilegiado desde la perspectiva del marco curricular, asignándole más contenidos mínimos obligatorios al área de geometría que a otras áreas como números, por ejemplo. Sin embargo, dentro del aula no se refleja la importancia que se le da a este contenido en el marco curricular. En el caso de la enseñanza media en Chile, los docentes le asignan al estudio de la geometría un tiempo menor respecto de otros temas como lo son funciones y álgebra, que equivalen a casi un 21% del tiempo disponible para la asignatura de matemática (Cheuquepán y Barbé, 2012). Algo similar sucede en enseñanza básica, donde además de no dedicar el tiempo necesario según el marco curricular, se les enseña a los estudiantes solo a reconocer figuras y cuerpos geométricos, lo que impide que puedan desarrollar otro tipo de habilidades, desencadenando que al momento de que el estudiante ingrese a enseñanza media no tenga las herramientas necesarias para abordar la matemática formal de un problema geométrico.

Esta es una de las razones por la que en matemáticas el área de geometría presenta mayor dificultad en Chile. Una segunda dificultad puede estar asociada al docente, así como a las dificultades de aprendizaje del estudiante. Y esto se vuelve más alarmante debido a que la geometría es considerada como una competencia básica que deben dominar los estudiantes, ya que forma parte de nuestro vocabulario hablado y escrito (como cuando le damos la ubicación de un lugar a alguien), forma parte de problemas de la vida real (como lo son las medidas de interiores), forma parte de aplicaciones en otros temas de matemáticas básicas (como es la utilización de regiones y formas geométricas), además la geometría nos permite desarrollar la conciencia espacial, como también ofrece a los estudiantes la capacidad de relacionar por sí mismos objetos distintos o iguales, con el fin de resolver problemas y formar parte de elementos que nos rodean teniendo valores culturales y estéticos (Sherard III, 1981).

El docente que crea un espacio para la enseñanza de la geometría permite el desarrollo de habilidades visuales, de construcción, de comunicación, desarrollo del pensamiento y transferencia; posibilitando que los estudiantes interpreten y analicen situaciones del mundo real que están en su entorno, como también situaciones de la misma matemática (Villella, 2001). Según Alsina (1997) en la enseñanza y aprendizaje de la geometría se debe intentar favorecer la interacción de cada uno de los componentes que determinan la construcción del espacio que permita al estudiante resolver dichas situaciones. Esto nos lleva a pensar en un aprendizaje cooperativo que desarrolle las habilidades que se plantearon anteriormente, según Salako, Eze y Adu (2013) este aprendizaje cooperativo en matemáticas se describe como un proceso en que los estudiantes se sientan y trabajan juntos para lograr una meta común bajo la guía de su profesor. Una estrategia que permita desarrollar las habilidades que nos propone el marco curricular, implica que los estudiantes trabajen en equipo en problemas o proyectos bajo condiciones que aseguren dos cosas: la interdependencia positiva y la responsabilidad individual (Felder y Brent, 2001). Un modelo que se ajusta a las habilidades que se busca fomentar, es el modelo de clase invertida.

Según Eze (2007), el ayudar a los estudiantes a hacer por sí mismos en lugar de observar cómo el profesor lo hace y los estudiantes aceptan y reproducen, es uno de los principios fundamentales de la resolución de problemas en matemáticas, ya que la matemática se aprende haciendo y resolviendo problemas. Esto supone el uso de fórmulas y técnicas útiles para facilitar y mejorar la resolución del problema. La geometría no está exenta de estas problemáticas, especialmente aquella que se encuentra asociada a otras disciplinas, como es el caso de la trigonometría.

### 2.4.1 Dificultades en el proceso de enseñanza en trigonometría

La geometría en el aula chilena presenta cierto tipo de dificultades recurrentes, aunque no existen grandes estudios al respecto, Moore (2012) señala la trigonometría como una parte de la matemática que carece de coherencia en su enseñanza debido a las dificultades que presentan estudiantes y profesores en su uso en múltiples contextos. Debido a ello, es crucial conocer qué dificultades específicas presentan los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Montiel (2007, p. 590) cita la investigación realizada por De Kee, Mura y Dionne, donde señalan las dificultades que tienen los estudiantes sobre la noción del seno y coseno en un triángulo rectángulo. Los estudiantes asocian el término trigonometría al cálculo de las razones trigonométricas, siendo que la Real Academia define el concepto trigonometría como el estudio de las relaciones numéricas entre los elementos que forman los triángulos planos y esféricos (RAE, 2014). Además, existe una confusión en las unidades de medida de los lados y ángulos de un triángulo, terminando en la interpretación errónea de la unidad de la relación trigonométrica. Por otro lado, al presentar a los estudiantes dos segmentos que forman un ángulo, no logran utilizar segmentos auxiliares para completar un triángulo rectángulo, por lo cual el docente debe dibujar este segmento. Además, los estudiantes no consideran si el triángulo, en el que se calculan las razones trigonométricas, tiene un ángulo recto, por lo que aplican erróneamente las relaciones trigonométricas. Por otro lado, al darle al seno un valor igual a un número decimal, a los estudiantes les resulta complicado continuar, en muchos casos transforman el número a una fracción y con ello construyen el triángulo, sin considerar que este puede tener otras proporciones de medida.

Al hacer uso de una clase tradicional para la enseñanza de la trigonometría, se fomenta la aparición de los errores conceptuales antes tratados, ya que la clase se enfoca en las definiciones de las razones trigonométricas cuestionando solo el valor faltante de la relación, por lo que se pierde el significado de dichas razones, imprescindible según Maldonado en

Fernández (2016), ya que la trigonometría es un contenido difícil de entender por los estudiantes por ser un tema complejo que posee conexión con diversos fenómenos y se conecta con varias disciplinas. Por otro lado, Weber (2005) sostiene que la investigación orientada a conocer y superar las dificultades de los estudiantes en trigonometría es escasa, por lo cual existen pocas mejoras a este proceso de enseñanza y aprendizaje, a pesar de ser un elemento fundamental en distintas disciplinas. Esto se debe a que la trigonometría provee a los estudiantes del conocimiento necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes (Bourbaki, 1950).

# Capítulo 3: Propuesta didáctica para la enseñanza de la trigonometría

Considerando lo escrito en el capítulo anterior, se hace imperativo la creación de un material didáctico para la unidad de trigonometría vista en segundo medio que cumpla con los requisitos descritos anteriormente. Por lo cual, comenzaremos describiendo los aspectos que incorporamos del marco teórico en la propuesta didáctica de trigonometría, para a continuación describir la propuesta de unidad. Una vez mostrados los puntos, se procede a describir la estructura general de cada clase a desarrollar, para luego describir cada una de estas clases mencionando el material a usar en cada una de las tres etapas que tiene la clase. Finalmente, se hablará del proceso de validación al cual se someterá la propuesta didáctica.

Los aspectos rescatados del marco teórico que se han implementado en nuestra unidad son:

- Uso de la plataforma educativa EdModo: Esta es una red privada, segura y gratuita que tiene como objetivo principal la interacción y colaboración entre docentes y estudiantes. Esta plataforma le proporciona al docente un espacio virtual privado en el que se pueden compartir mensajes, archivos, enlaces, un calendario de aula, proponer tareas y actividades; realizar exámenes, corregirlos y calificarlos. La elección de la red, se debe a que es la unión entre una plataforma educativa y una red social, siendo muy similar a Facebook, pero con propósito educativo. Se destaca por su fácil uso y acceso, además de poseer una aplicación móvil con versión para Android e iOS, proporcionando al estudiante la capacidad de acceder a la plataforma desde su teléfono.

  Cabe destacar que el curso creado en la plataforma llamado Trigonometría[1], consta de carpetas con el número de cada clase (véase figura 3.1), en cada una de estas se encontrará el material que se utilizará en ellas. Esto facilita que los estudiantes puedan acceder de manera fácil y ordenada al material de cada clase. Sin embargo, el docente crea las carpetas a medida que se avanza en el número de clases. Para ahorrar tiempo, el docente puede crear las carpetas previamente en su biblioteca de EdModo, para luego compartirla al curso.

[1] Puede acceder por el siguiente link: https://edmo.do/j/esuxyg

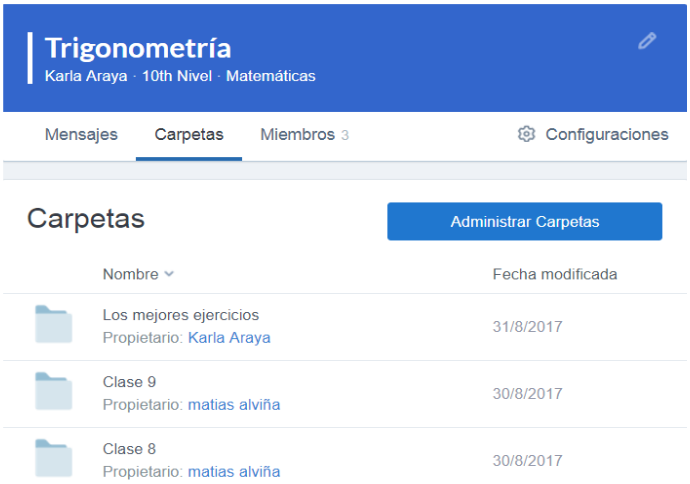



**Figura 3.1** Formato de la creación de las carpetas en el grupo de trigonometría en el EdModo.

- Uso de videos educativos, que llamaremos Cápsulas de Conocimiento (CC). Según la categoría propuesta por Schmidt (1987), los videos son cognoscitivos, ya que pretenden dar a conocer diferentes aspectos relacionados con el tema que se está estudiando. Los videos que grabamos son de corta duración (hasta 15 minutos) con el fin de mantener la atención de los estudiantes durante este periodo. Para asegurar que los estudiantes observen el material previo a la clase, cada video cuenta con una actividad de ejercitación, las que se revisan al inicio de las clases presenciales. Junto con ello, cada video tiene iconos que destacan lo que tienen que hacer los estudiantes, como se muestra en la figura 3.2.


**Figura 3.2** Simbología de los videos

Por otro lado, creamos tres tipos de videos, para variar la forma en que se le propone al estudiante el material previo. Estos son:

- Videos de mesa: son videos grabados de manera cenital, donde se enfoca una mesa en la cual hay hojas de block (véase figura 3.3).
- Videos de pizarras: son videos grabado en pizarra de una sola toma en la que se ve el rostro del docente (véase figura 3.4).

- Videos de screen recording: son videos en donde se graba la pantalla del computador, utilizando Power Point y el programa GeoGebra.

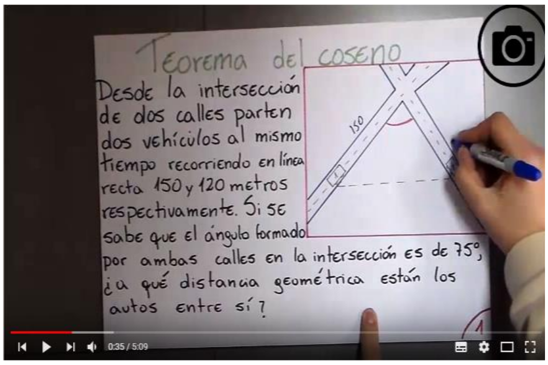



**Figura 3.3** Video del Teorema coseno, captura minuto 0:35

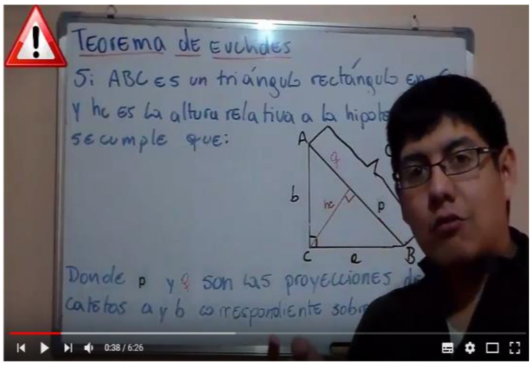



**Figura 3.4** Video del Teorema de Euclides, captura minuto 0:38

Los videos que se utilizan para la materia son hechos por nosotros, siendo grabados con una cámara de video HD Samsung HMX-F90, los cual fueron editados y producidos con el programa Camtasia Studio 8.

- El modelo pedagógico invertido genera que la clase sea dividida en tres partes, una de las cuales es presencial, que es la que se da durante la clase, y las otras dos no presenciales, que son la pre y post clase realizadas con el apoyo de la plataforma EdModo. Como se señaló anteriormente, cada clase tiene una carpeta en la plataforma y en cada una de ellas se sube el material de las tres etapas:

  - Pre-clase: Antes de la clase, el docente sube a la carpeta la Cápsula de Conocimiento o texto que se va a trabajar en la clase. El estudiante debe ver el video o leer el texto, tomar nota y resolver los ejercicios que se plantean en el material. En el caso de que el estudiante haya quedado con dudas sobre el contenido, puede anotarlo y consultarlo en la clase presencial.

  - Durante la clase: Se hace un consenso del ejercicio propuesto en el video o en el texto, para también resolver dudas que hayan quedado en estos materiales. Luego de ello se comienza a abordar más profundamente el contenido visto en el video por medio de una guía o un desafío. La secuencia realizada en la clase considera a los estudiantes trabajando en equipos (de tres integrantes para las guías y de cinco integrantes para los desafíos). Al finalizar la clase se realiza una puesta en común en donde cada grupo elige un presentador que muestra en 2 o 3 minutos cómo se realizó la actividad y los roles que cada integrante tuvo durante la clase.

- Post clase: Después de la clase, los estudiantes deben completar de manera individual la autoevaluación que se encuentra en la carpeta de la clase correspondiente. Esta autoevaluación (véase apéndice 5.2) se realiza por medio de Google Forms, que nos permite obtener respuestas en forma automática y ordenada, teniendo una gráfica general de los resultados, como también la posibilidad de analizar los resultados uno a uno. Cabe destacar que la autoevaluación la consideraremos una evaluación de progreso, por lo que el docente tendrá para ir revisándolas constantemente a medida que avancen las clases para ver si el estudiante trabaja o no en este modelo, bajo este parámetro las autoevaluaciones de las clases son en esencia las mismas, pero cambia el material que se utilizó en cada clase, tanto en la rúbrica de guía como la del desafío se considera las autoevaluaciones de los integrantes del grupo. Luego de ello, deberán subir los resultados que obtuvieron de la guía o el desafío que se les asignó en la clase, para ello uno de los integrantes del grupo deberá subir la foto o archivo de sus resultados a la asignación creada por el docente (véase figura 3.5), este archivo debe llevar como nombre los apellidos de cada integrante del grupo. La creación de una asignación permite que sea más sencillo ver los resultados obtenidos por los grupos para el docente, como también permite que la recepción del material sea más ordenada. No obstante, una asignación solo permite que el docente pueda ver el material subido por los estudiantes, por lo que proponemos que cuando el docente revise lo subido seleccione algunos ejercicios que estén buenos, ordenados, legibles y que tengan una buena calidad de imagen, y los suba a una carpeta que llamaremos "Los mejores ejercicios" (véase figura 3.1). Para subir un archivo a esta carpeta se le propone al docente que como nombre de archivo coloque: Clase "..."- Guía "…"- Ejercicio "…", esto con el fin de que el estudiante puede acceder fácilmente a un ejercicio, ya que el archivo estaría suelto en esta carpeta creada por el docente.

  Por otro lado, el profesor deberá subir el ejercicio que el estudiante tendrá que resolver de forma individual, con el fin de evaluar y corregir las dudas que hayan quedado luego de haber realizado la clase, para esto el profesor deberá crear una asignación distinta a la anterior que sea para que los estudiantes puedan subir el ejercicio. Mientras tanto, el profesor se ocupará de subir el material para la siguiente clase, observar el material subido por los estudiantes y retroalimentar en el caso que sea necesario, para ello EdModo da la posibilidad de mandar un mensaje privado al estudiante, como también tiene la posibilidad de comentar la tarea subida en la misma asignación, cualquiera sea el modo, es importante realizar esta retroalimentación de forma individual para poder continuar con la secuencia planteada.

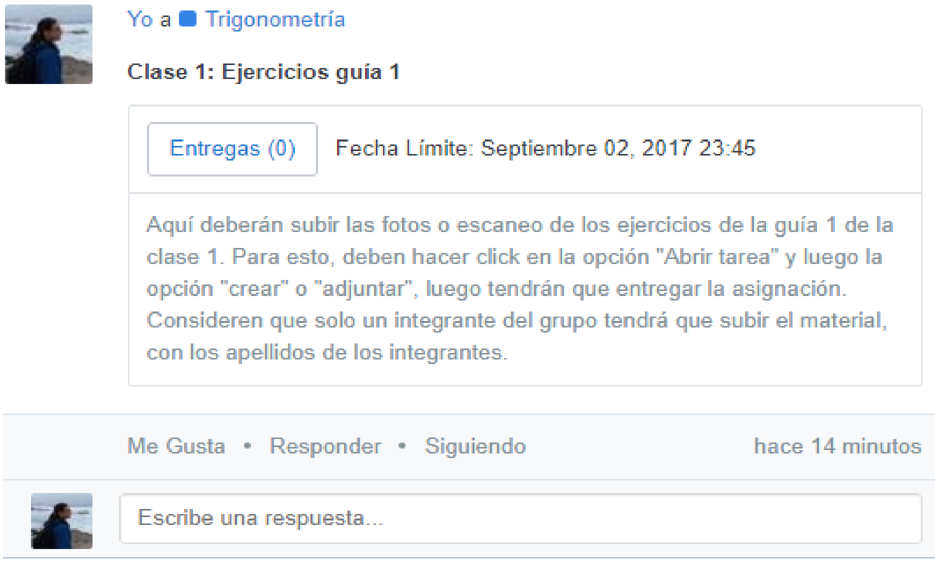



**Figura 3.5** Captura de asignación de la clase 1: Ejercicios guía 1

En síntesis, las clases se van enmarcando en una pedagogía activa que se da dentro y fuera de la sala de clases, que se ve beneficiada por el uso de una plataforma educativa y el uso de videos para la enseñanza de la trigonometría.

## 3.1 Propuesta general de la unidad a desarrollar

Durante la elección de los contenidos que se observarán en la unidad, se realizó un mapa con los contenidos previos que los estudiantes han adquirido para enfrentarse a la unidad de trigonometría, como las Bases Curriculares no establecen contenidos mínimos obligatorios, consideramos los Objetivos de Aprendizaje (OA) de cursos anteriores como conocimientos previos para implementar esta unidad, teniendo como resultado figura 3.6.

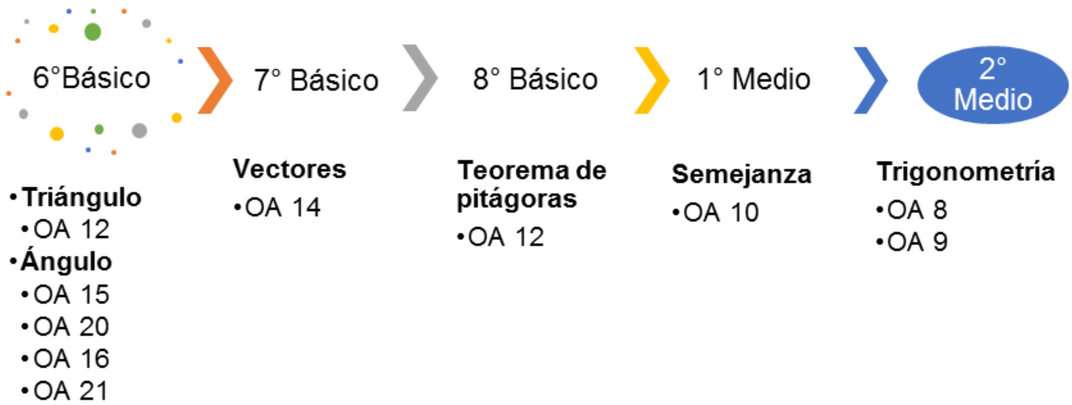



**Figura 3.6** Mapa de contenido previos a trigonometría

Por lo tanto, se consideraron estos contenidos al momento de realizar la elección del material para la unidad, para lo cual cada clase será de 2 horas pedagógicas (1 hora y 30 minutos), para un total de 14 clases presenciales, con el fin de poder abordar los OA de trigonometría propuestos por las Bases Curriculares. Estos, apuntan a que el estudiante sea capaz de establecer una relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo, formando así las razones trigonométricas. Es por esto, que consideramos que debiésemos abordar más profundamente, ya que será la única vez que se va estudiar trigonometría en enseñanza media, por lo que es importante abordarlo de manera completa. Como se ve en la figura 3.7, incluimos el contenido de funciones trigonométricas e inversas, lo cual se debe a que con su utilización podemos determinar el ángulo entre dos lados, sabiendo la razón entre estos. Junto con ello, agregamos el teorema del seno y coseno, con el fin de poder determinar el ángulo o un lado de cualquier triángulo, ya que las razones trigonométricas se limitan a estar en un triángulo rectángulo. En este sentido, es vital la idea del circulo goniométrico que nos permite abordar los valores de los ángulos mayores a 90°, que anteriormente no podíamos abordar con las razones trigonométricas.

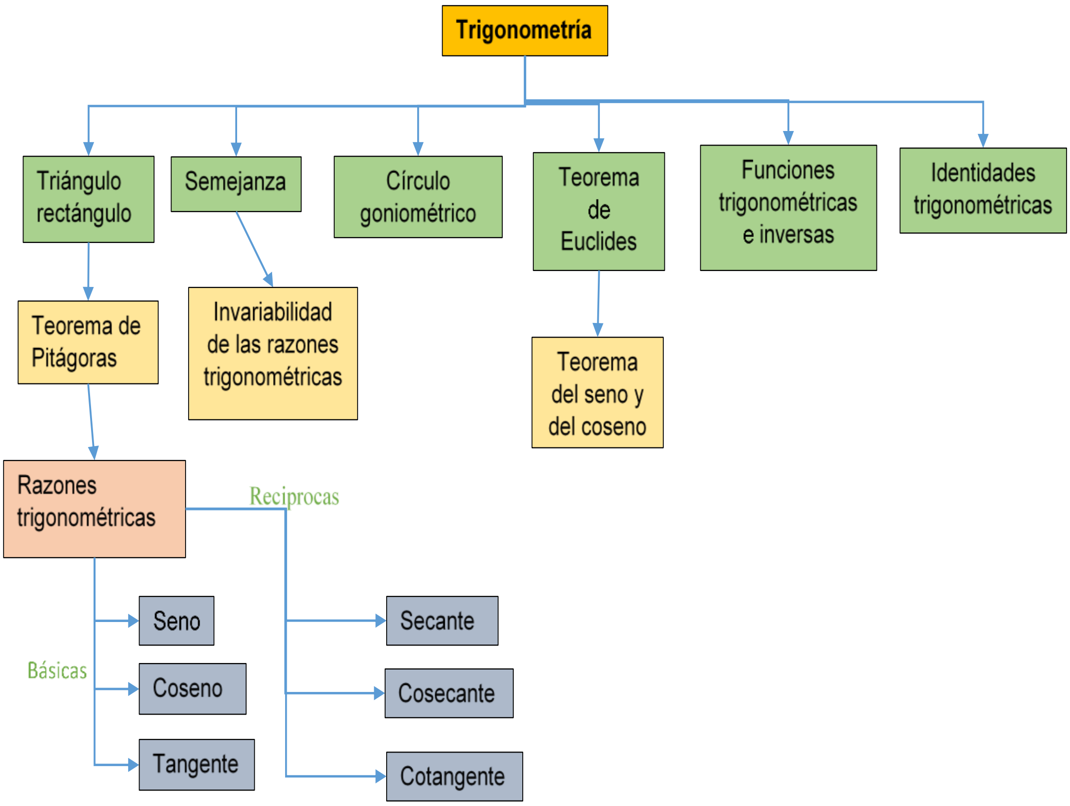
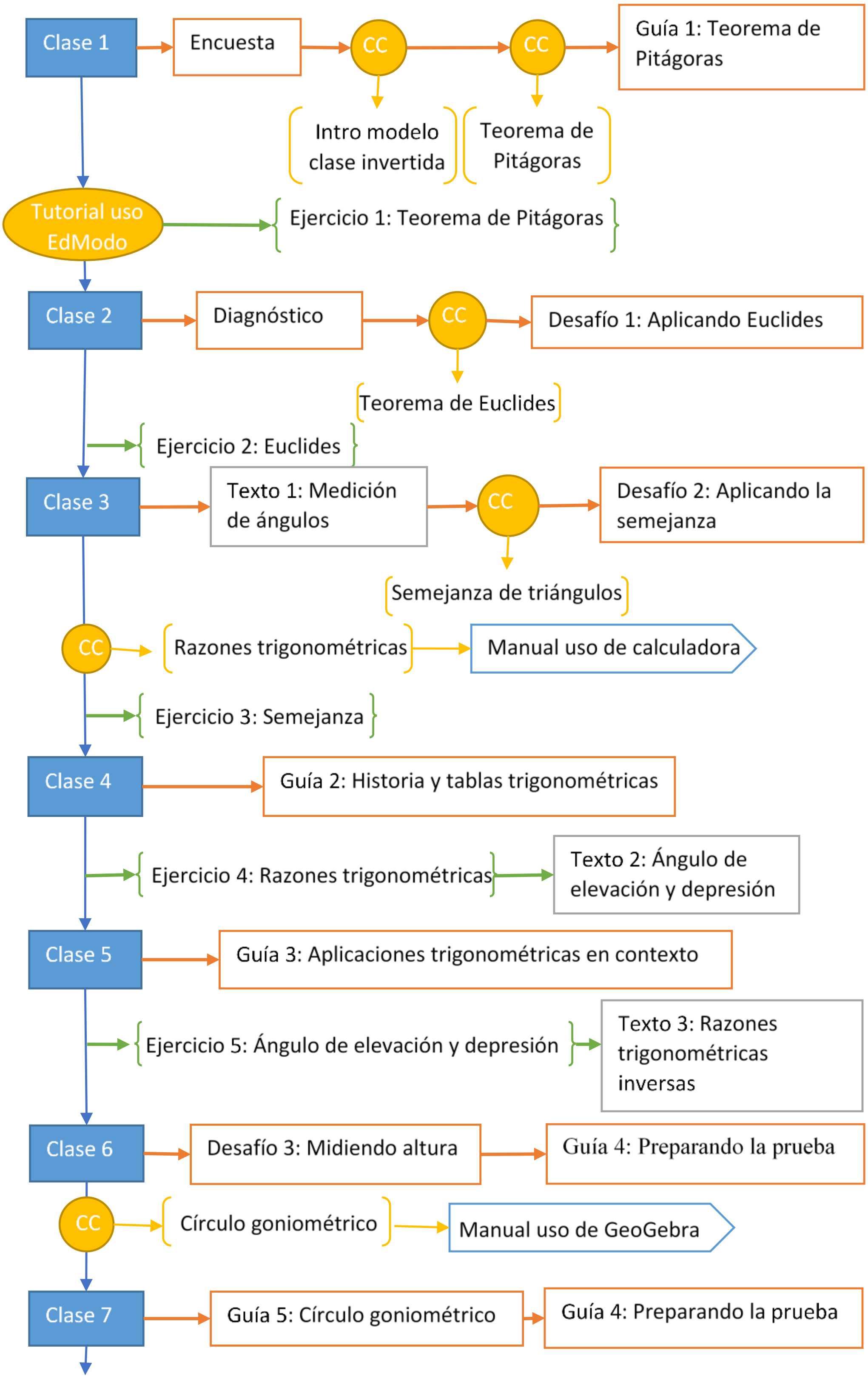



**Figura 3.7** Mapa de contenido de la unidad de trigonometría

Ante esto, las primeras tres clases se realizan para mostrar el modelo de clase invertida, con el fin de que los estudiantes se puedan ir interiorizando con el modelo y principalmente con el trabajo que tienen que realizar al momento de ver los videos, ya que tienen que tomar apuntes y tienen que resolver los ejercicios. A su vez, se recuerdan los conceptos previos del Teorema de Pitágoras, semejanza y el Teorema de Euclides (que forma parte de 8° EB y 1°

EM). Además, consideramos una encuesta y un diagnóstico, que dan luces sobre relación de los estudiantes con la tecnología y los conocimientos previos para la unidad, respectivamente. Luego, durante las siguientes clases se realiza el contenido propiamente tal de la unidad, donde también consideramos una evaluación formativa y una sumativa.

A continuación, se encuentra el mapa del diseño de la unidad donde se observa cada clase y el material que se utiliza en cada una de ellas.


Clase 1
Encuesta
CC
CC
Guía 1: Teorema de Pitágoras
Intro modelo clase invertida
Teorema de Pitágoras
Tutorial uso EdModo
Ejercicio 1: Teorema de Pitágoras
Clase 2
Diagnóstico
CC
Desafío 1: Aplicando Euclides
Teorema de Euclides
Ejercicio 2: Euclides
Clase 3
Texto 1: Medición de ángulos
CC
Desafío 2: Aplicando la semejanza
Semejanza de triángulos
CC
Razones trigonométricas
Manual uso de calculadora
Ejercicio 3: Semejanza
Clase 4
Guía 2: Historia y tablas trigonométricas
Ejercicio 4: Razones trigonométricas
Texto 2: Ángulo de elevación y depresión
Clase 5
Guía 3: Aplicaciones trigonométricas en contexto
Ejercicio 5: Ángulo de elevación y depresión
Texto 3: Razones trigonométricas inversas
Clase 6
Desafío 3: Midiendo altura
Guía 4: Preparando la prueba
CC
Círculo goniométrico
Manual uso de GeoGebra
Clase 7
Guía 5: Círculo goniométrico
Guía 4: Preparando la prueba

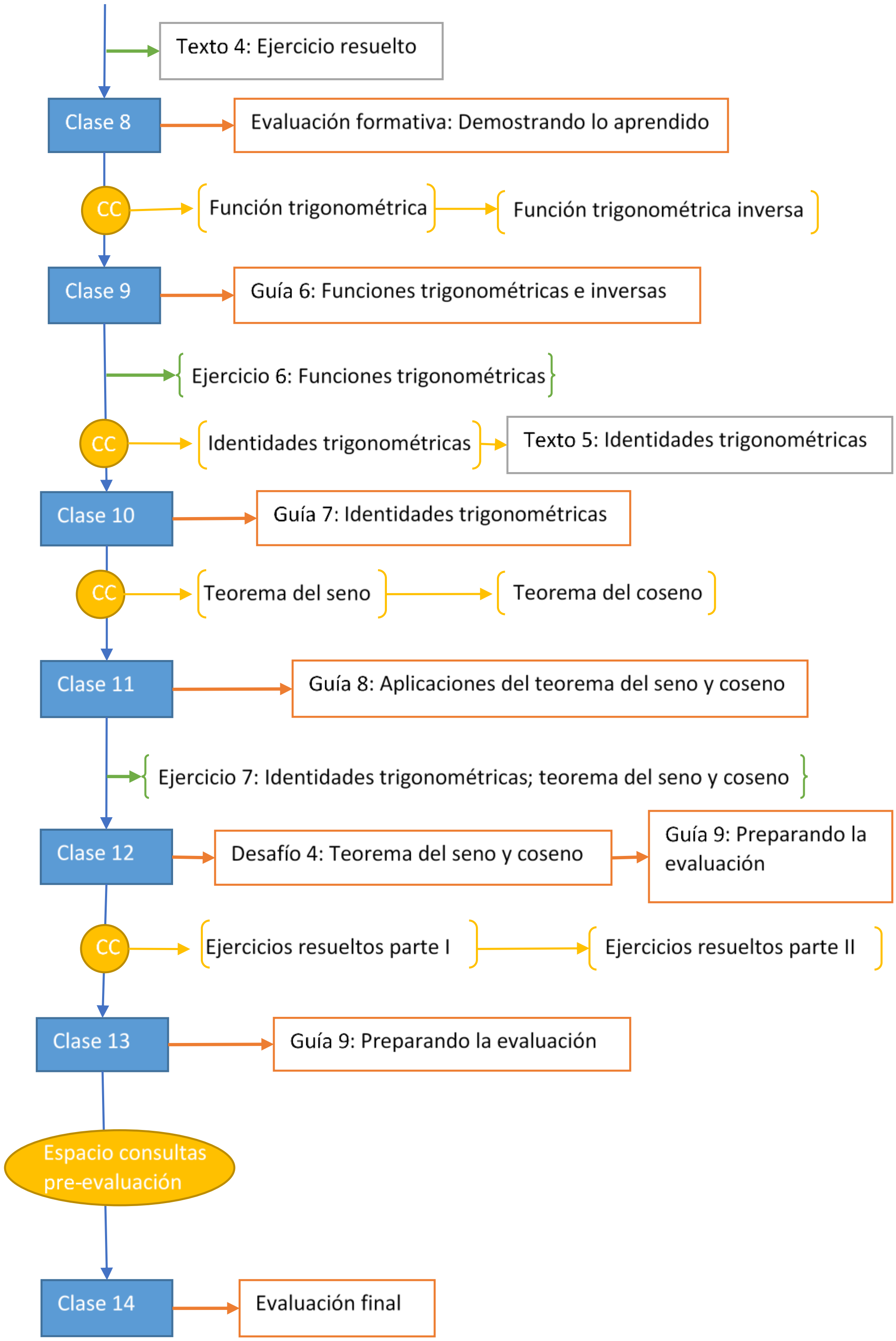



**Figura 3.8** Mapa de las clases de la unidad de trigonometría.

## 3.2 Estructura general de las clases a desarrollar

La estructura de clase a desarrollar contempla el trabajo cooperativo de los estudiantes, como ya se mencionó anteriormente, por medio de grupos de trabajo (3 o 5 integrantes, dependiendo del caso). Las clases son enfocadas a la aplicación y comprensión más profunda del contenido observado en las Cápsulas de Conocimiento o los textos enviados previamente. Los estudiantes pondrán aplicar, analizar, debatir y argumentar el contenido visto a través de actividades y desafíos propuestos. Dicho material se entregará una copia a cada grupo, porque luego se va añadir a la carpeta de la clase correspondiente en la plataforma, para cuidar que cada estudiante tenga acceso al material. Es un requisito que los estudiantes tengan la aplicación EdModo en su celular, ya que va facilitar la observación de video en el aula las tres primeras clases, como también el trabajo de grupo.

Para las evaluaciones se cuenta con rúbricas de trabajo clase a clase que serán explicadas a los estudiantes, una evaluación formativa que cuenta con dos partes: una individual y otra grupal en donde se les plantea una problemática; cerrando la unidad con la evaluación sumativa que contempla ejercicios de todo lo observado en las clases.

Las clases constan de un inicio, desarrollo y cierre (véase figura 3.9), considerando estas de dos horas pedagógicas, la cual se distribuyen de la siguiente forma:

- Inicio (10 a 15 minutos): En cada principio de la clase, el profesor preguntará a los estudiantes sobre el contenido visto en la Cápsula de Conocimiento y/o texto previo a la clase, responderá inquietudes y comentará brevemente la tarea de la Cápsula. En esta instancia los estudiantes forman los grupos de trabajo y eligen un presentador o presentadora del grupo, el cual será anotado por el profesor en la rúbrica de cada grupo.

- Desarrollo (60 minutos o menos dependiendo de la clase): En esta sección el profesor entrega los materiales a utilizar de acuerdo con el número de clase en la cual se esté trabajando (sea guía o desafío), procede a leer las instrucciones iniciales y, si el trabajo se realizará fuera de la sala, pone un tiempo tope para volver a reunir a los estudiantes en el aula. Durante el desarrollo de clase el profesor actuará como guía, enfocándose en prestar ayuda a los grupos que la necesitan y monitorear el trabajo de los estudiantes, así como el cumplimiento del trabajo cooperativo.

- Cierre (15 minutos o más dependiendo de la clase): En esta parte, el docente pide a los presentadores de cada grupo que expongan en dos o tres minutos el trabajo realizado, así como los roles de cada integrante del grupo. Luego el docente realiza un breve resumen de la clase considerando los conceptos anotados en la pizarra al principio de la sesión. Finalizando la clase, el profesor recuerda que los estudiantes deben subir el trabajo realizado a la plataforma, además de contestar la autoevaluación presente en la carpeta y resolver el ejercicio adjunto antes de la clase siguiente.

Luego de cada clase, tal como se dijo antes, el docente tendrá que monitorear el trabajo del estudiante, considerando la guía o desafío del día y entregando el nuevo material.


**Figura 3.9** Resumen de la estructura general de las clases.

## 3.3 Material diseñado para la propuesta didáctica

Durante la propuesta didáctica realizada se diseñaron cuatro materiales didácticos que cumplen distintas funciones.

### 3.3.1 Guías didácticas

El diseño de las guías didácticas consta de tres componentes principales: las instrucciones, el resumen de los contenidos (véase figura 3.10) y las actividades *per se*.

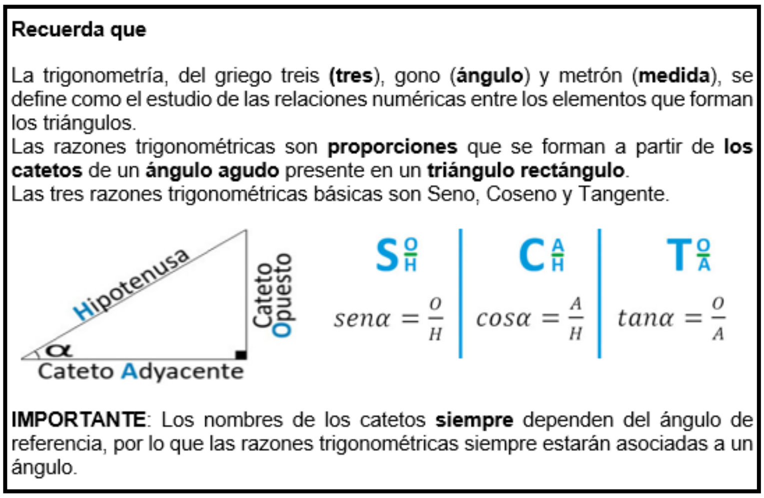
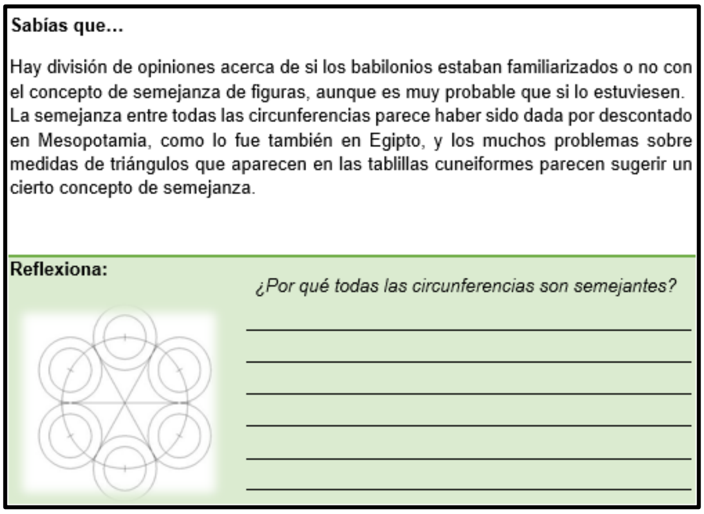



**Figura 3.10** Resumen de la guía 2.

Debido a que las guías se realizan en equipos de tres personas, es imperativo que los estudiantes que realizan la guía consideren las instrucciones. Por otro lado, “el recuerda que” servirá para las actividades posteriores que son de ejercitación y profundización del contenido observado en la Cápsula de Conocimiento, ya que los estudiantes requieren un breve resumen que contemple los aspectos más fundamentales de la clase. Por último, dependiendo de la guía y de sus instrucciones, el desarrollo de las actividades es completa o por ejercicios en cada grupo, además existen guías didácticas que poseen dos partes, por lo que a algunos estudiantes se les entrega la parte I y a otros la parte II.

### 3.3.2 Desafíos didácticos

Los desafíos contemplan actividades que desarrollen habilidades cognitivas de orden superior según la Taxonomía de Bloom. El material de desafíos consta de instrucciones, un ítem de sabías que (véase figura 3.11), seguida por una reflexión y las actividades propiamente tales.



**Sabías que...**

Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque es muy probable que si lo estuviesen. La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza.

**Reflexiona:**

*¿Por qué todas las circunferencias son semejantes?*

**Figura 3.11** Hito histórico del desafío 2.

Al igual que en las guías, se encuentran las instrucciones, con la diferencia que ahora los equipos de trabajo son de cinco integrantes. Luego de ello, se continúa con un breve párrafo que señala un hito histórico o noticioso sobre el contenido hablado en el desafío, luego se encuentra una pregunta de reflexión que se basa en la lectura anterior. Por último, viene el desafío donde se parte desde una pregunta, para luego continuar con un método de medición para dar respuesta a esa interrogante aplicando trigonometría. Es importante destacar que hay clases en las que se propone más de un desafío, por lo cual se les va a asignar a cada grupo uno de ellos.

### 3.3.3 Textos de trabajo

Durante algunas pre-clases, a los estudiantes se les entrega un texto de trabajo por medio de la plataforma. Se caracteriza por ser breve, apuntando al contenido que se necesitará para la clase siguiente, los estudiantes tendrán que tomar nota y resolver el ejercicio propuestos en estos (véase figura 3.12).

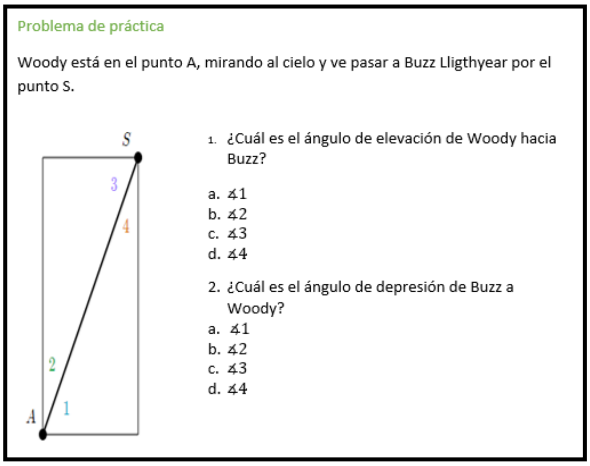



**Figura 3.12** Ejercicio propuesto en el texto 2.

### 3.3.4 Ejercicios post clase

Como el modelo de clase invertida contempla tres etapas, es crucial que los estudiantes ejerciten luego de la clase para afianzar de manera individual los contenidos que se observaron en clases de forma grupal. Para ello se encuentran los ejercicios post-clase, que son ejercicios cortos (máximo tres ejercicios breves) que se entregan individualmente antes de iniciar la siguiente clase, para resolverlos el estudiante puede valerse de todos los recursos presentes en la plataforma, así como de sus apuntes de la clase. Al final de cada ejercicio, aparece la figura 3.13, fomentando el uso de EdModo como una red social, donde profesor y estudiantes interactúan.

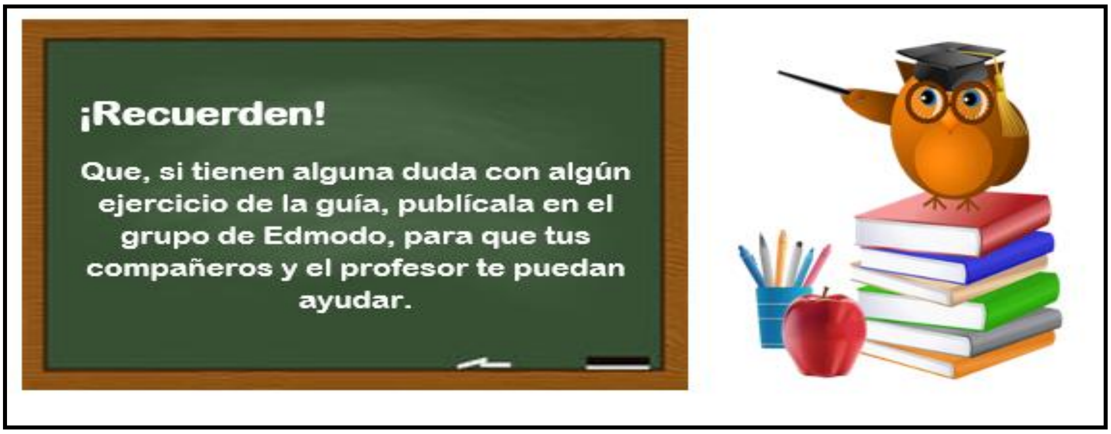



**Figura 3.13** Final de la guía de ejercicios

## 3.4 Requisitos para la propuesta

Para llevar a cabo la propuesta se necesita cumplir ciertos requisitos que ayudarán al modelo a cumplir su función.

### 3.4.1 Perfil del establecimiento educacional

Al igual que en el caso del docente, el centro educacional también debe cumplir ciertos requisitos mínimos para llevar a cabo la propuesta didáctica con el modelo de clase invertida, los cuales son:

1. Contar con sala de computación en uso en donde exista acceso a internet.
2. Tener computadores suficientes como para que cada estudiante tenga uno propio con un sistema operativo reciente (idealmente Windows 7, 8 o un software libre)
3. Tener disponible un proyector para que el docente lo utilice en el aula.
4. Si los estudiantes no cuentan con internet en sus domicilios, se les permita entrar a la sala de computación en horas extra programáticas para revisar el contenido de la plataforma.

Además, existen otros requisitos ideales que no necesariamente el establecimiento debe cumplir, pero que podrían ser de utilidad para llevar a cabo el modelo de clase invertida de mejor manera:

1. Contar con wifi que llegue a la sala de clases de los estudiantes con los cuales se está trabajando.
2. Contar el uso de Tablet para los estudiantes y así trabajar dentro de la sala de clases cuando se requiera.

Por otro lado, el establecimiento necesitará considerar el hecho de que el trabajo en el aula puede tornarse caótico en comparación con la metodología de clase tradicional, esto debido a que en el trabajo cooperativo y el uso de grupos provocará una transmisión de ideas de forma constante entre los integrantes. El establecimiento debe estar preparado para considerar salidas al patio durante las clases y el movimiento constante tanto dentro como fuera de la sala, todo con el fin de mejorar la motivación y el aprendizaje significativo de sus estudiantes.

### 3.4.2 Perfil docente para la propuesta didáctica

Durante el transcurso de la realización de la propuesta didáctica planteada hemos detectado que se requiere considerar ciertas características en el perfil del docente que utilizará el modelo de clase invertida, los cuales detallamos a continuación:

1. Enfoque constructivista: Este es el punto que más influye dentro de las características que el docente debe contar al momento de aplicar la propuesta. El docente debe poseer una mirada educativa que se centre bajo los estándares constructivistas, para así convertirse en un docente que guía a los estudiantes hacia la construcción del conocimiento. Este punto sitúa al profesor como un facilitador y a los estudiantes como protagonistas, lo que se verá reflejado dentro del aula.

2. Conocimiento del modelo pedagógico invertido: El docente tiene que conocer de qué manera opera el modelo pedagógico utilizado durante la propuesta. Esto considera los momentos de esta (pre clase, durante clase y post clase), como también la secuencia didáctica planteada para la clase.

3. Disposición: Este punto está estrictamente ligado a los dos primeros, ya que el docente que utilice este modelo necesitará la disposición total para realizar retroalimentaciones personalizadas a los estudiantes de manera constante.

4. Manejo de plataforma educativa: Para poder manejar los aspectos del modelo de clase invertida, el docente debe saber utilizar la plataforma educativa Edmodo, esta requerirá que sepa cómo integrar los estudiantes al grupo, como se sube material, como crear asignaciones y como mandar mensajes a los estudiantes.

5. Manejo de sitio web: Aunque la propuesta se realiza a través de videos de los que ya se tiene acceso público desde YouTube, el docente igual debe saber cómo utilizar un canal de YouTube en nivel usuario, principalmente para acceder a los videos y compartirlos.

6. Manejo de Google Foms: La aplicación de Google Drive es requerida debido a que todas las autoevaluaciones, diagnósticos y encuestas se encuentran presentes en este sitio, con un buen manejo de este el docente podrá tener acceso a una visión general del curso y, si lo requiere, una visión individual de algún estudiante en particular.

7. Manejo de GeoGebra: Para la propuesta se requiere el manejo del software educativo GeoGebra a nivel usuario, principalmente en el uso online o de escritorio, sabiendo manejar los recursos que tiene este.

### 3.4.3 Indicaciones al docente

Junto con el perfil que el docente debe cumplir, existen implicaciones que se deben considerar al momento de llevar a cabo la propuesta, durante este apartado se da una visión general de estos aspectos. En él se considera la estructura y la secuencia de clase, así como las tareas asociadas a ellas.

**Pre Clase:** Antes de cada clase, el docente tendrá que:

1. Subir el video o texto a la carpeta de la clase correspondiente. Con estos recursos se busca que el estudiante comprenda y recuerde el contenido que se va interiorizar en la clase, siendo estas habilidades de pensamiento de orden inferior según la Taxonomía de Bloom.
2. Crear la asignación en la que los estudiantes subirán sus respuestas del trabajo que van a realizar en clase (recomendable usar el botón programar mensajes para fecha y hora dado por Edmodo).

**Durante la clase:** El docente deberá considerar la siguiente secuencia didáctica:

- Inicio:
    I. Preguntará sobre el contenido visto por los estudiantes en el video o texto.
    II. Responderá inquietudes y comentará brevemente la tarea del video o texto.
    III. Indicará la formación de grupos de trabajo, se elige un/a presentador/a por grupo y se anota los grupos en cada rúbrica.
- Desarrollo:
    I. Entrega del material (guía o desafío).
    II. Monitorear el trabajo de los grupos y fomentar el trabajo cooperativo. Para ello, el docente debe ayudar a los estudiantes a que cada uno asuma una responsabilidad dentro del grupo, para que así trabajando codo a codo logren el objetivo planteado, formando así un grupo de aprendizaje cooperativo, aunque si hay un grupo de aprendizaje cooperativo de alto rendimiento, el docente debe fomentar clase a clase que esto puedan superar los objetivos planteado. En este sentido, hay que realizar preguntas con los pronombres "qué", "cómo", "por qué" y "para qué", ya que con estas vamos a saber que está haciendo cada integrante del grupo, como están llevando a cabo el planteamiento y resolución del problema, él porque están haciendo aquello y para que lo hacen. Esto con el fin de fomentar las habilidades matemáticas en los estudiantes, como también fomentar las habilidades de orden superior según la Taxonomía de Bloom.
- Cierre:
    I. Comenzar las presentaciones por grupo del problema asignado, donde el docente debe completar la rúbrica y retroalimentar la resolución planteada por los estudiantes.
    II. Se realiza consenso de lo observado en la clase (preferentemente en la pizarra) con las ideas dadas por los estudiantes.
    III. Se les recuerda a los estudiantes que deben contestar la autoevaluación, subir el material a la plataforma y resolver el ejercicio post clase.

**Post clase:** Usted como docente tendrá que:

1. Observar las respuestas de la autoevaluación dadas por el curso.
2. Revisar la asignación de la clase para observar el material subido por el grupo y terminar de contestar la rúbrica.
3. Seleccionar uno o más ejercicios de cada grupo y subirlos a la carpeta de los mejores ejercicios (se recomienda poner el nombre Clase # - Guía # - Ejercicio #).
4. Subir ejercicios post clase a la carpeta de la clase correspondiente. Este ejercicio busca fomentar las habilidades de aplicar, comprender y recordar.
5. Revisar el ejercicio post clase subido por los estudiantes a la asignación correspondiente.

Estas indicaciones funcionan para todas las clases planteada, al menos que se haya señalado en la secuencia didáctica que el docente debe realizar algo extra en una de las etapas.

## 3.5 Secuencia didáctica

A continuación, se expondrá de manera más extensa cómo se desarrollarán cada una de las clases y los temas que en ésta se tratarán, haciendo énfasis en la idea primordial o idea fuerza a trabajar durante el transcurso de las tres etapas que se da al aplicar el modelo de clase invertida. Además de ello, cada material tiene su solución en el apéndice 7.6.

### 3.5.1 Clase 1: Recordando el teorema de Pitágoras

Esta clase tiene como objetivo:

1. Recordar el teorema de Pitágoras por medio de un video.
2. Distinguir entre el modelo de clase tradicional y el modelo de clase invertida por medio de un video explicativo.
3. Explicar el procedimiento de resolución de los ejercicios del teorema de Pitágoras.
4. Aplicar el teorema de Pitágoras a problemas con contexto.
5. Verificar la validez del teorema de Pitágoras utilizando múltiples figuras geométricas.

Para cumplir estos objetivos, se propone que la clase se realice en la sala de computación del establecimiento, ya que es importante ayudar a los estudiantes a registrarse y guiarlos en esta primera parte del proceso que consiste en interiorizarse con el modelo de clase invertida utilizando la plataforma EdModo. Estando en la sala de computación, se registrarán en la plataforma EdModo haciendo énfasis en que este será este nuestro espacio virtual de trabajo, donde van a ir subiendo material, respondiendo encuesta y viendo videos. Para poder registrarlo, el profesor le pide la clase previa a esta, sus correos electrónicos, en el caso que haya un estudiante que no cuenta con uno o que no se acuerda de la contraseña, se le pide que solucione el tema para la próxima clase. Con los mails de cada estudiante, el profesor procede a invitarlos a que se registren en el curso. Es importante que el profesor realice él envió de estas invitaciones antes de la clase presencial, de tal forma que los estudiantes puedan registrarse en sus hogares y en el caso que no puedan registrarse, se realiza esta acción al inicio de la clase. Con los estudiantes registrados, se les señala que cada clase tendrá asociado una carpeta en EdModo, el docente debe mostrar la ubicación de estos archivos, junto con ello les muestra donde pueden encontrar tutoriales de uso de EdModo. Luego de ello, se les explica que vamos a trabajar con el modelo de clase invertida, para ello, el docente reproduce el video de clase invertida que se encuentra en la carpeta 1 del curso de trigonometría, que se encuentra en el siguiente link de YouTube:

https://youtu.be/DBYjcNI5ouc

El video es adaptado de la página web NYU (NYU,2015), donde regrabamos el audio del video, debido a que este estaba en inglés. El video dura 38 segundos, donde se diferencia una clase tradicional de una clase invertida, explicando principalmente el cambio del espacio que se lleva a cabo entre estos modelos de clase.

A continuación, se les pide que ingresen a la clase 1 y en ella encontraran el archivo que se llama Encuesta: La matemática y la tecnología (véase apéndice 7.1), que nos va a permitir obtener información del uso que le dan los estudiantes a la tecnología, si cuentan con los requisitos mínimos para llevar a cabo el modelo y su apreciación de las matemáticas. Todo esto con el fin, debe saber cuántos estudiantes están limitados a utilizar el modelo de clase invertida, ya que este necesita del acceso a internet para obtener el material y en tal caso que hubiera estudiante que no tuvieran acceso a internet, se le puede facilitar el material por medio de un pendrive, con el fin de que puede tener el mismo material que tienen el resto de su compañero en la plataforma. Para realizar esta encuesta los estudiantes van a contar con 15 minutos para responderla.

Luego, de ello se procede a describir la simbología que tienen los videos que van a ver antes de la clase y lo que tiene que hacer al momento de verlos, con ello se procede a que reproduzcan el video Teorema de Pitágoras que se encuentra en la carpeta de la clase 1 y que se encuentra en YouTube bajo el siguiente link:

https://www.youtube.com/watch?v=qVU6ih8yw1w&index=1&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN&t=3s

Este video dura 04:47 minutos, y es un video grabado en pizarra, el cual grabamos de esta forma debido a que es el primer video del contenido, por lo que queríamos tener una cercanía más próxima con los estudiantes. El video inicia con la explicación del teorema de Pitágoras, se muestra el desarrollo de un ejercicio y luego se deja de tarea otro, que deberán desarrollar de forma individual, para ello tendrán 5 minutos para resolverla. El docente realizará una puesta en común, enfatizando el procedimiento que utilizaron los estudiantes para desarrollar el ejercicio y se finaliza la actividad resolviendo cualquier duda que les haya quedado del contenido.

Una vez terminada la actividad anterior, se entrega la guía 1 de Pitágoras (véase apéndice 1.1), se leen las instrucciones y se designan los dos ejercicios por grupo. Esta guía, está compuesta de 12 ejercicios, de los cuales los ejercicios 10, 11 y 12, buscan que los estudiantes sean capaces de demostrar que se cumple el teorema de Pitágoras sumando las áreas de las figuras dadas, para ello los grupos que les toque estos ejercicios deberán buscar en internet el área de una semicircunferencia, de un triángulo equilátero y de un hexágono, dependiendo del ejercicio que le haya tocado al grupo. Por otro lado, los ejercicios 2, 3, 5, 6, 7, 8 y 9 son ejercicios contextualizados, donde los grupos que les toque uno de estos ejercicios deberán identificar los catetos e hipotenusa, para luego aplicar el teorema de Pitágoras. Por último, el ejercicio 1 y 4 son de contexto matemático, donde los estudiantes van determinan las longitudes de un triángulo, en el caso del ejercicio 1 el triángulo original se rota en torno a uno de sus vértices y en el caso del ejercicio 4 se quiere determinar la diagonal de cubo, siendo clave que el estudiante pueda ubicarse en un plano tridimensional. Para resolver los dos ejercicios designados por el docente los grupos tendrán 30 minutos, mientras trabajan se les lee la rúbrica de evaluación de guía (véase apéndice 6.6). Esta rúbrica apunta a evaluar el trabajo que realizan los estudiantes en las clases que se trabajan con guías, teniendo un puntaje total de 24 puntos, la cual tiene como indicadores:

- Presentación (5 puntos): Se considera el contenido de la presentación (procedimiento de resolución del ejercicio asignado al grupo y las labores de los integrantes) y el tiempo de la presentación (2 a 3 minutos).
- Conocimientos demostrados (11 puntos): Se considera el desempeño del grupo (sube los ejercicios a la asignación y el resultado es correcto), llenan la autoevaluación (después de la clase), y el orden y limpieza de las fotos subidas a la asignación.
- En la clase (8 puntos): Se considera el respeto hacia compañeros al momento de presentar, responsabilidad en su trabajo y el logro del objetivo planteado para la clase.

Esta rúbrica de evaluación nos dará una nota que es la misma para todo el grupo de trabajo, luego de ello se sacará un promedio de todas la rubricas de clase aplicada a lo largo de la unidad y esta nota equivaldrá a un 20% de la nota final.

Luego de ello, los estudiantes deben designar a un miembro del grupo para la presentación, la cual tiene un tiempo de 15 minutos. Es importante destacar que no importa si todos los grupos alcanzan o no a presentar, ya que lo más importante es que a lo largo de toda la unidad cada estudiante presente a lo menos una vez. El docente finaliza la clase retomando los aspectos más importantes de la misma, señalando que tienen que completar la autoevaluación que se encuentra en la carpeta de esta clase y resolver el ejercicio 1 (véase apéndice 4.1) que está compuesta de dos ejercicios contextualizado del teorema de Pitágoras.

### 3.5.2 Clase 2: Recordando el teorema de Euclides

Esta clase tiene como objetivos:

1. Recordar el teorema de Euclides por medio de un video.
2. Diagnosticar los conocimientos previos de trigonometría.
3. Explicar la resolución del desafío de Euclides.
4. Diseñar una estrategia de resolución a un desafío propuesto.
5. Determinar la altura de objetos por medio del teorema de Euclides.
6. Analizar situaciones en las que se pueda aplicar el teorema de Euclides.

Esta clase se inicia con la aplicación del diagnóstico (véase apéndice 5.1), que refiere a los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre la unidad, para ello será necesario que los estudiantes ingresen con su celular a la aplicación EdModo, por lo que solo será posible si tienen internet o si el establecimiento tiene internet compartida para los estudiantes. Si ninguna de las opciones cumple con el requerimiento y la cantidad de estudiantes que no puedan ingresar es mayor a diez, entonces el docente tendrá copias del diagnóstico impreso. Los estudiantes tendrán 15 minutos para realizarlo. Además, se necesita contemplar la posibilidad que, si los estudiantes realizan el diagnóstico vía internet, con el recurso de Google Forms será más rápido realizar una vista global del curso y así conocer los sectores en que los estudiantes tienen mayores fortalezas y debilidades. Los ejes que contempla el diagnóstico son las definiciones de conceptos como rayo, función biyectiva y ejes coordenados, además se contempla el teorema de Thales, la transformación de grados a radianes y la operatoria combinada de números racionales.

Una vez finalizado el diagnóstico, el docente volverá a contemplar el uso del celular con los estudiantes. Estos deben ingresar a la carpeta de la clase 2 y reproducir la Cápsula de Conocimiento del teorema de Euclides desde el link de YouTube:

https://youtu.be/IhpzexZEZvo.

Si la cantidad de estudiantes que no pueden reproducir el video, por alguna de las razones ya estipuladas, es superior a diez, entonces el docente reproducirá el video con un proyector, para que todo el curso pueda verlo. El video utilizado es en pizarra ya que se espera desarrollar la proximidad con los estudiantes y su relación con el modelo, este tiene una duración de 06:27 minutos, inicia con la explicación del teorema de Euclides, se muestra el desarrollo de un ejercicio y luego se deja de tarea otro, a los estudiantes se les dará cinco minutos para resolver el ejercicio de forma individual. El docente realizará una puesta en común, enfatizando el procedimiento que utilizaron los estudiantes para resolver el ejercicio. Se finaliza la actividad resolviendo cualquier duda que le haya quedado a los estudiantes. El tiempo para todo este aspecto no debe exceder los 20 minutos.

Una vez finalizada la actividad, se hace entrega del desafío 1 (véase apéndice 2.1), se leen las instrucciones para todo el curso, cada equipo tendrá que elegir un presentador, que expondrá lo hecho en el desafío al finalizar la clase.

El desafío consiste en aplicar el teorema de Euclides a una situación en que deben mantener una varilla perpendicular a una superficie con la ayuda de dos hilos, para ello el ángulo entre ambos hilos debe ser un ángulo recto (véase figura 3.14), los materiales utilizados solo serán los estipulados en la hoja del desafío. Los estudiantes tendrán que armar una estrategia de trabajo, encontrar soluciones, medir y aplicar lo aprendido con el teorema de Euclides, luego los estudiantes tendrán que reproducir el aprendizaje obtenido en un ejercicio final que se encuentra en el mismo desafío. Esta actividad no debe exceder los 35 minutos.

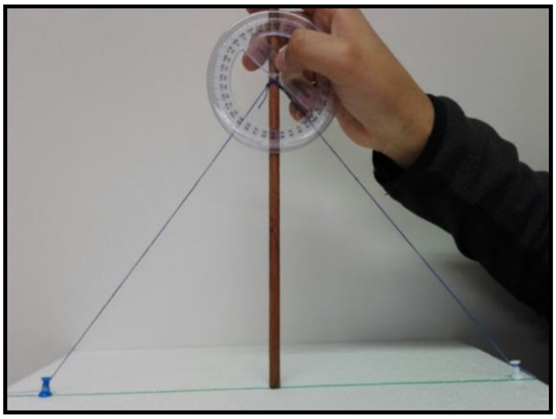


**Figura 3.14** Desafío 1, sosteniendo el poste.

Una vez finalizada la actividad, el docente leerá la rúbrica de desafíos (véase apéndice 6.5). Dicha rúbrica considera el trabajo que se realiza en las clases en las que se realizan desafíos, esta contempla los siguientes ítems:

- Presentación (7 puntos): Se considera el contenido de la presentación (procedimiento del grupo, labores de los integrantes, dificultades y datos relevantes) y el tiempo de la presentación (2 a 3 minutos).
- Conocimientos demostrados (11 puntos): Se considera el desempeño del grupo (el grupo sube el desafío a la asignación y lo resuelve correctamente), que los estudiantes llenen la autoevaluación (después de la clase) y el orden y limpieza de las fotos subidas a la asignación.
- En la clase (8 puntos): Se considera el respeto hacia compañeros al momento de presentar, responsabilidad en su trabajo y el logro del objetivo planteado para la clase.

Esta rúbrica de evaluación nos dará una nota que es la misma para todo el grupo de trabajo, luego de ello se sacará un promedio de todas la rubricas de desafío aplicada a lo largo de la unidad y esta nota equivaldrá a un 20% de la nota final. Leída la rúbrica, los presentadores de cada grupo realizan la breve reseña del trabajo. El docente finaliza la clase retomando los aspectos más importantes de la misma, señalando que para la siguiente clase será necesario traer regla y transportador para trabajar y que deben resolver el ejercicio 2 (véase apéndice 4.2) que consta de dos ejercicios contextualizados del teorema de Euclides.

### 3.5.3 Clase 3: Recordando la semejanza de triángulos

Los objetivos de esta clase son:

1. Recordar los criterios en la semejanza de triángulos por medio de un video.
2. Descubrir si dos triángulos son semejantes.
3. Explicar la resolución del desafío de semejanza.
4. Determinar la altura de un objeto por medio de los criterios de semejanza.

Para cumplir este objetivo de clase, se inicia viendo el video de semejanza, repitiéndose el proceso descrito en la anterior clase, es decir, si existe una cantidad alta de estudiantes que no tienen acceso a internet en el teléfono, se mostrará el video a todo el curso. Este video, tiene una duración de 06:49 minutos, es del tipo screen recording, debido a que el uso de GeoGebra permitió mostrar los criterios de semejanza variando los lados y ángulos de los triángulos que se estaban utilizando. El video inicia con la explicación del concepto de semejanza en un triángulo, se muestra los tres criterios de semejanza y luego se deja una tarea, que deberán desarrollar de forma individual, para ello tendrán 5 minutos para resolverlo. Luego de ver el video, se les enseña a los estudiantes el texto 1: medición de ángulos (véase apéndice 3.1), para ello el docente llevará copias impresas del material, además se señala que esta será la única ocasión en la que un texto se leerá en clase. Luego se realiza una puesta en común y se resuelven dudas que quedaron de la semejanza de triángulos y del texto visto.

Después de esto se realiza una actividad individual en la que se procede a entregar triángulos de goma eva a cada estudiante (véase figura 3.15) y se les pide que identifiquen cuáles son los triángulos semejantes, para lo cual pueden utilizar la regla y transportador. La idea de esta actividad previa es que los estudiantes sean capaces de reconocer dos triángulos semejantes utilizando uno de los tres criterios, de tal forma que cualquier criterio que el estudiante ocupe lo lleve a la semejanza de triángulo. Se finaliza la actividad realizando una breve puesta en común y conclusiones finales sobre el tema, para esto los estudiantes contarán con 15 minutos para realizar esta actividad.

**Figura 3.15** Determinando si dos triángulos son semejantes.

A continuación, se procede a entregar el desafío 2 (véase apéndice 2.2), para ello se leen las instrucciones y se designa a cada grupo uno de los dos desafíos. La historia que esta previa a la actividad, cuenta el origen del termino semejanza, para después de ello, continuar con los desafíos. El primero se llama cuaderno métrico (véase figura 3.16) debido a que utilizando un cuaderno y una masa colgando desde uno de los extremos de los espirales de este, con el fin de determinar la atura de un objeto. En el cuaderno se forma un triángulo que es semejante al triangulo que se forma entre el objeto que se está determinando la altura y la persona que está midiendo, por lo cual los estudiantes pueden establecer una proporción entre los lados que conocen y así determinar la altura de dicho objeto. En cambio, el desafío 2 se utiliza otro tipo de medición que se conoce como el método del ingeniero (véase figura 3.17), que nace en la novela La isla Misteriosa de Julio Verne, en la que describe una forma de medir objetos de gran altura, con esto los estudiantes replican el experimento realizado por el personaje de Julio Verne en su libro.

**Figura 3.16** Desafío 2, cuaderno métrico.

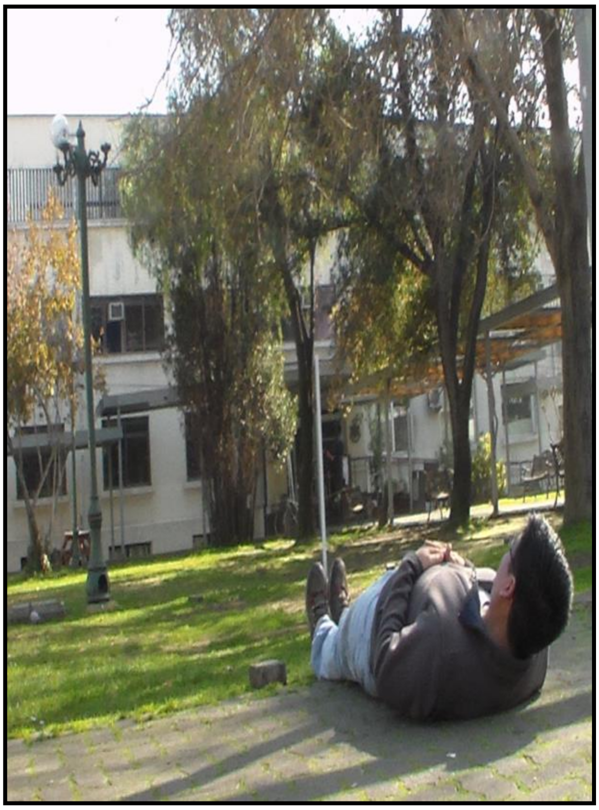


**Figura 3.17** Desafío 2, método del ingeniero.

Después de resolver el desafío se presentan los resultados que obtuvieron los grupos, es importante que el presentador de esta ocasión no sea los que ya salieron en la clase 1 y 2. Y con las presentaciones terminadas, se hace un resumen de las ideas claves de la clase, además se recuerda que deben completar la autoevaluación, ver el video que el profesor va a subir a la plataforma para la clase 4 y resolver el ejercicio 3 (véase apéndice 4.3) que consta de un ejercicio contextualizado de semejanza.

### 3.5.4 Clase 4: La historia de la trigonometría y las tablas trigonométricas

Los objetivos de esta clase:

1. Identificar en una línea de tiempo los hitos más importantes de la historia de la trigonometría.
2. Determinar las razones trigonométricas básicas de diversos triángulos rectángulos semejantes.
3. Inferir la invariabilidad de las razones trigonométricas básicas en triángulos rectángulos semejantes.
4. Explicar el procedimiento de resolución de los ejercicios de razones trigonométricas.

La clase número 4 inicia con las dudas de los estudiantes respecto a la Cápsula de Conocimiento de las razones trigonométricas con el link en YouTube:

https://youtu.be/JgsP1yxNeK8?list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN.

El video de razones trigonométricas es un video de pizarra que dura 11:31 minutos, en él se definen las tres razones trigonométricas básicas, se muestra su nomenclatura, el uso de la calculadora y dos formas de aplicar las razones trigonométricas a dicho ejercicio, por último, se hace entrega de un ejercicio más, el cual se revisa en la clase. El docente recordará a los estudiantes que se encuentra el manual de uso calculadora científica (véase apéndice 7.2) disponible en la plataforma. Luego, el profesor preguntará sobre la tarea realizada, haciendo énfasis en el procedimiento y en el uso de las tres razones trigonométricas presentes en el video, el docente anotará un breve resumen en la pizarra, que estará en este lugar durante la clase.

Luego se hace entrega de la guía 2: historia y tablas trigonométricas (véase apéndice 1.2), leyendo las instrucciones del inicio, para que así los estudiantes se agrupen en los equipos de tres integrantes y elijan a sus presentadores. La primera actividad de la guía consiste en ordenar en una línea de tiempo los hitos históricos que se encuentran desordenados, para ello las imágenes presentes en la guía están en orden, por lo que los estudiantes pueden hacer uso de sus celulares para investigar los sucesos a partir de las fotos (véase la figura 3.18). El docente pondrá una línea de tiempo en algún lugar de la sala (ya sea en un papelógrafo, dibujándola en la pizarra o con ayuda de un proyector), los presentadores irán pegando uno a uno los hitos históricos a partir de las imágenes realizando así la puesta en común, esta actividad contempla de 20 a 25 minutos.

**Actividad 1: Historia de la trigonometría**

1. Realiza una línea de tiempo con las hojas de block y plumones entregados por el profesor.
2. Recorta las imágenes y los hitos que se observan a continuación.
3. Considera que las imágenes se encuentran en orden, pero los hitos históricos están desordenados.


**Figura 3.18** Guía 2, actividad 1.

Después de realizar la revisión de la actividad 1, los estudiantes tendrán a su disposición cuatro triángulos hechos con goma eva con los mismos ángulos interiores (véase figura 3.19), lo que será necesario para la segunda actividad de las tablas trigonométricas, en la que cada grupo calculará las tres razones trigonométricas de cada triángulo, esto con el objetivo que los estudiantes descubran la invariabilidad de las razones trigonométricas. Para esta actividad los estudiantes contarán con 25 a 30 minutos.

**Figura 3.19** Actividad inicial, comparando los triángulos.

Una vez resuelta la actividad, se les recuerda a los estudiantes el uso de la rúbrica de clases y se procede a realizar las presentaciones. El docente realiza un cierre enfatizando en la invariabilidad de las razones trigonométricas, además recuerda que se deben subir las fotos o escaneos de lo realizado en clases y contestar la autoevaluación de forma individual. Por último, se recuerda que antes de la siguiente clase se debe resolver el ejercicio 4 (véase apéndice 4.4) que se encontrará en la plataforma de trabajo.

### 3.5.5 Clase 5: Aplicaciones de ángulo de elevación y depresión

Los objetivos de esta clase son:

1. Determinar las razones trigonométricas de los ángulos notables.
2. Aplicar las razones trigonométricas, utilizando los ángulos de elevación y depresión, a problemas en contexto.
3. Explicar el procedimiento de resolución de los problemas contextualizados de razones trigonométricas.

Para cumplir los objetivos de esta clase, los estudiantes debieron haber leído el texto 2: ángulo de elevación y depresión (véase apéndice 3.2) que se encuentra la carpeta 5 de la plataforma, que apunta a que el estudiante reconozca el ángulo de elevación y depresión. Es por ello, que se comienza la clase resolviendo las dudas del texto y haciendo una puesta en común de los ejercicios planteados en este.

Luego se entrega la guía 3: Aplicaciones trigonométricas en contexto (véase apéndice 1.3), que consta de tres actividades. La primera de ella consiste en que los estudiantes determinen el valor de las razones trigonométricas básicas de los ángulos 30° y 60°, para ello deben analizar un triángulo equilátero, en cambio en la segunda actividad los estudiantes determinan las razones trigonométricas del ángulo de 45° con ayuda de un cuadrado. Así la actividad 1 y 2 buscan que los estudiantes encuentren las razones trigonométricas de los ángulos notables. Obsérvese que esta actividad no permite determinar el ángulo de 90°, debido a que no se pueden establecer las razones trigonométricas de este ángulo, ya que el cateto opuesto del ángulo de 90° corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo. Por otro lado, la actividad 3 apunta a que los estudiantes apliquen las razones trigonométricas a problemas contextualizados, habiendo problemas de determinación de alturas y distancias, calcular el radio de la tierra y determinar el índice de refracción de ciertos materiales. Todos los grupos deben realizar la actividad 1 y 2 en su cuaderno, en cambio en la actividad 3 los grupos deberán resolver los 12 ejercicios. Mientras trabajan, el profesor comenzará a asignar dos ejercicios por grupo que serán los que tendrán que subir a la asignación de esta clase y se les señala que uno de esos dos ejercicios serán los que presenten al final de la clase.

Por último, comienzan las presentaciones de los grupos mostrando el procedimiento del ejercicio que les haya tocado. Después de ello, el docente realiza un resumen de las ideas claves, les señala que deben contestar la autoevaluación que se encuentra en la carpeta clase 5 y resolver el ejercicio 5 (véase apéndice 4.5). Por último, se les pide a los estudiantes que por grupos de 5 integrantes traigan un trozo de cartón de 15 x 15 cm y una bombilla para la siguiente clase.

### 3.5.6 Clase 6: Midiendo altura

Se señalan los objetivos de esta clase:

1. Construir un instrumento de medición de ángulo
2. Determinar la altura de un edificio utilizando los ángulos de elevación o de depresión.
3. Explicar la resolución del desafío midiendo altura.

La clase inicia cuando el docente resuelve las dudas que hayan quedado del texto 3: razones trigonométricas recíprocas (véase apéndice 3.3), que es un texto de cuatro páginas en el que se habla de las tres razones trigonométricas recíprocas (secante, cosecante, cotangente), el profesor realiza una puesta en común con los estudiantes sobre el ejercicio propuesto en dicho texto.

Luego, se entrega a los estudiantes el desafío 3: midiendo altura (véase apéndice 2.3), se inicia leyendo las instrucciones para después continuar con la construcción del instrumento de medición de ángulos. Para ello, el profesor llevará transportadores de papel, cinta masking, masas (o contrapesos) e hilo. Una vez los estudiantes construyen un goniómetro por grupo (véase figura 3.20), se realiza una explicación general sobre cómo se realizan las mediciones de ángulos con el instrumento (véase figura 3.21), luego el profesor distribuye los tres desafíos distintos en los grupos de trabajo. Con ello, los estudiantes saldrán de la sala por 45 a 50 minutos. El primer desafío consiste en medir la altura de un edificio lejano, esto se hará realizando dos mediciones de un edificio que se encuentre fuera del establecimiento, ambas mediciones deben estar separadas lo suficiente como para que el ángulo medido en cada uno sea distinto. El segundo desafío consiste en la medición de un objeto que se encuentre dentro del establecimiento y que sea de fácil acceso, para ello los estudiantes tendrán que realizar una sola medición y medir la distancia desde la persona que mide hasta el objeto. El tercer desafío considera la altura entre los pisos de un edificio, a diferencia de los otros dos desafíos, en este se utiliza un ángulo de depresión, además se necesitará una escalera por lo que las mediciones tendrán que realizarse dentro de un edificio del establecimiento que cuente con unas. Como gran parte del desafío se realizará fuera de la sala de clases, se recomienda que los estudiantes designen una labor para cada integrante del grupo antes de salir, para así optimizar el tiempo. El docente tendrá que monitorear a los grupos mientras realizan la actividad, se recomienda dejar la sala cerrada para tranquilidad de los estudiantes.

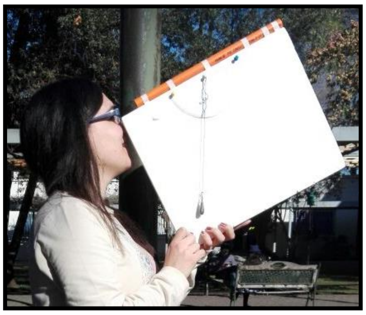


**Figura 3.20** Desafío 3, goniómetro.

**Figura 3.21** Desafío 3, midiendo la altura de un poster.

Una vez que se termine la actividad y se dé respuesta a las preguntas adjuntas, los estudiantes volverán a la sala de clases, en donde se iniciarán las presentaciones, se recordará la rúbrica de desafíos y se realizará una puesta en común para finalizar la clase. El docente utilizará los últimos minutos de la clase para entregar la guía 4: preparando la evaluación (véase apéndice 1.4), para que así los estudiantes tengan ejercicios que practicar para la evaluación que se realizará dos clases después.  El contenido de la evaluación contempla los tópicos de semejanza, teorema de Pitágoras, teorema de Euclides y razones trigonométricas.

### 3.5.7 Clase 7: Círculo goniométrico y preparando la prueba formativa

Los objetivos de esta clase son:

1. Construir un círculo goniométrico utilizando GeoGebra.
2. Identificar los valores característicos de las razones trigonométricas utilizando el circulo goniométrico.
3. Determinar el seno y coseno de un ángulo en el círculo goniométrico.
4. Explicar el procedimiento de resolución de los ejercicios del circulo goniométrico.

Para cumplir los objetivos de esta clase, los estudiantes debieron haber visto antes de esta el video de circulo goniométrico que se encuentra en la carpeta clase 7 en la plataforma EdModo, junto con él encontrarán un manual de GeoGebra (véase apéndice 7.3), donde se describen las principales herramientas que este programa tiene. El video se puede encontrar en el siguiente link de YouTube:

https://www.youtube.com/watch?v=J3Mdmndy5Xc&index=5&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN

Este video, tiene una duración 07:45 minutos, es del tipo screen recording, teniendo una mezcla de grabación de GeoGebra y Power Point (ppt), debido a que resultaba más sencillo definir las características principales de un plano cartesiano y del circulo goniométrico en el ppt, para luego ver más detalladamente la construcción de este en el GeoGebra y así mostrar como varían las razones trigonométricas variando un punto en el círculo. Al igual que el resto de los videos que ya se han descrito anteriormente, se comienza definiendo el circulo goniométrico, para después dar un ejemplo y por último se deja una tarea, que deberán desarrollar de forma individual. El docente realizará una puesta en común al comenzar la clase, enfatizando el procedimiento que utilizaron los estudiantes para desarrollar el ejercicio y se finaliza la actividad resolviendo cualquier duda que les haya quedado a los estudiantes del contenido.

Esta clase, se propone que el profesor la realice en la sala de computación del establecimiento, ya que se propone que los estudiantes puedan construir el circulo goniométrico en el GeoGebra, para ello se hace entrega de la guía 5: círculo goniométrico (véase apéndice 1.5), que consta de dos partes. La primera parte contiene las instrucciones para que los estudiantes puedan construir el circulo goniométrico, recomendamos que el profesor vaya haciendo con ellos la construcción de este material, de todas forma en la carpeta de clase 7, se encuentra un GeoGebra que se llama MD-Circulo goniométrico (véase figura 3.22), que es un material para el docente (MD) en el que se muestra el resultado final de lo que se quiere lograr que los estudiantes construyan, el cual está con colores y muestra el cálculo de las razones trigonométricas, para que el profesor pueda dar un ejemplo utilizándolo.

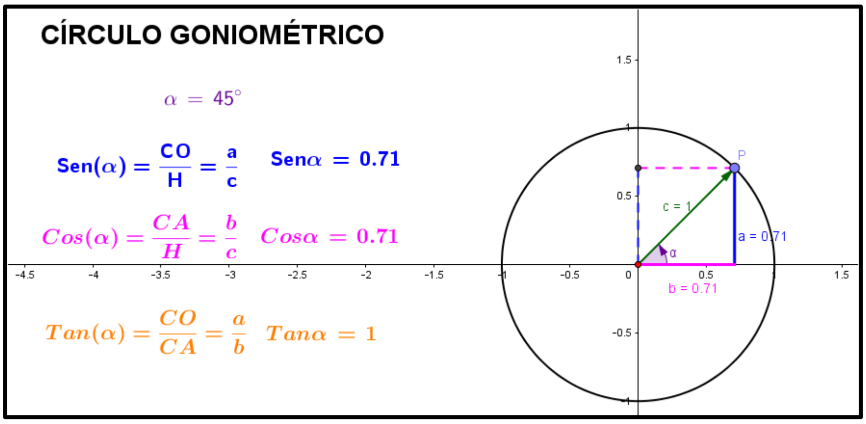



**Figura 3.22** MD-Circulo goniométrico

La segunda parte de la guía, busca que los estudiantes utilicen el GeoGebra que ellos construyeron y determinen los valores que se les están pidiendo. Obsérvese que los ángulos que se les pide a los estudiantes son de los cuatro cuadrantes, ya que se busca que relacionen el seno y coseno de cada uno de estos ángulos con las coordenadas del punto que da en el círculo con ese ángulo, por lo cual vemos que el valor del seno y coseno en el primer cuadrantes es positivo, en el segundo cuadrantes el valor del coseno va a ser negativo y el valor del seno positivo, en el tercer cuadrante el valor del seno y del coseno es negativo, y en el cuarto cuadrante el valor del seno es negativo y el valor del coseno es positivo.

Esta guía está pensada para que se desarrolle en el primer bloque de la clase, es decir en los primeros 45 minutos, por lo cual los grupos no realizan las presentaciones de sus resultados, en cambio, se hace un consenso y el docente resume las ideas principales de esta actividad. Aun así, los estudiantes deben contestar la autoevaluación y subir sus respuestas a la asignación creada, aunque después de la clase no hay un ejercicio para evaluarlo de forma individual, debido a que la siguiente clase se realizará la evaluación formativa, por lo cual los estudiantes tienen que dedicar el tiempo de la post-clase a estudiar para ella.

En el segundo bloque, el profesor les señala que continúen el trabajo en la guía 4 (que se entregó en la anterior clase) que tiene como objetivo preparar a los estudiantes para la evaluación formativa que se realizará la próxima clase. El contenido que se quiere evaluar es el teorema de Pitágoras y Euclides, semejanza de triángulos y razones trigonométricas. Para ello, la guía 4 tiene tres ítems y un total de 16 ejercicios, los cuales son graduados según la dificultad que tienen en su resolución, es por ello que el ítem 1 inicia con un ejercicio que pide determinar los valores que faltan aplicando el teorema de Pitágoras o el de Euclides, en el caso del ítem 2 inicia con un ejercicio de determinar el lado faltante de uno de los lados de los dos triángulos y que justificar si son semejantes, y en el caso del ítem 3 los dos primeros ejercicios se les pide a los estudiantes que escriban las razones trigonométricas dado los valores de un triángulo. El resto de los ejercicios planteados en cada ítem son contextualizados.

Durante el trabajo de los estudiantes, el docente responde dudas, consulta e informa que en la plataforma se va a subir el texto 4 (véase apéndice 3.4) en la carpeta de esta clase, este texto tiene tres ejercicios resueltos de la guía 4. Los ejercicios seleccionados, son aquellos que tienen el mayor grado de dificultad de cada ítem, esto con el fin de poder apoyar a los estudiantes al momento de que resuelvan la guía. No obstante, si existe alguna duda con otro ejercicio se les señala que pueden preguntarla por medio de la plataforma.

### 3.5.8 Clase 8: Evaluación formativa

Los objetivos de esta clase refieren a los objetivos planteados en la evaluación: demostrando lo aprendido, los cuales son:

1. Aplicar el teorema de Pitágoras y Euclides a problemas en contexto.
2. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos a problemas en contexto.
3. Aplicar las razones trigonométricas a problemas en contexto.
4. Determinar la altura de un objeto.
5. Determinar la distancia que se encuentra entre dos objetos.

Para cumplir con estos objetivos, la evaluación formativa (véase apéndice 5.3) consta de dos partes. La primera parte contiene tres ejercicios de aplicación de las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y Euclides y los criterios de semejanza de triángulos, dicha parte se realiza de forma individual y los estudiantes tendrán 30 minutos para resolverla.

**Figura 3.23** Evaluación formativa, paracaidista perdido.

La parte 2 consiste en desafíos para grupos de cinco integrantes. A cada grupo se le asignará uno de los dos desafíos y tendrán 50 minutos para terminarlo. El primer desafío llamado el globo aerostático consiste en que el profesor coloca una imagen de un globo aerostático en una de las murallas de la sala, es importante que se pegue lo más alto posible, los estudiantes tendrán determinar la altura a la que se encuentra el globo, realizar un diagrama de la situación y justificar cada procedimiento realizando utilizando bases trigonométricas, cualquier medición directa que se haga invalidará el puntaje del grupo. El segundo desafío llamado el paracaidista perdido, consiste en que el profesor colocará una imagen de un paracaídas en el extremo contrario de la sala y una imagen de X en el suelo (véase figura 3.23), que indicará el lugar donde cayó el paracaidista, los estudiantes tendrán que calcular la distancia recorrida por el paracaidista, realizar un diagrama de la situación y justificar cada procedimiento realizado utilizando bases trigonométricas, nuevamente cualquier medición directa que se haga invalidará el puntaje del grupo. Para ambos desafíos los estudiantes podrán utilizar el goniómetro, aunque su uso también debe estar justificado.

Para el docente, la evaluación cuenta con una tabla de distribución de contenido que considera una tabla de especificación con los tópicos de teorema de Pitágoras, el teorema de Euclides, la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas; también cuenta con la pauta de respuestas de la primera parte (véase apéndice 6.2).

Para la segunda parte el profesor tendrá una rúbrica de evaluación (véase apéndice 6.3) en donde se consideran los siguientes tópicos:

- Diagrama: Considera que el diagrama sea acertado para el ejercicio.
- Conocimientos demostrados: Que considera la utilización de conceptos trigonométricos acordes al ejercicio.
- Justificación del procedimiento: Que será en base a conceptos trigonométricos y matemáticos acordes al ejercicio.
- Resultado: Considera si el grupo realizó un análisis del resultado obtenido.
- Orden y limpieza: Considera el orden y la limpieza del grupo.

Finalizada la evaluación, se da por terminada la clase.

### 3.5.9 Clase 9: Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas

Los objetivos de esta clase son:

1. Relacionar el círculo goniométrico con las funciones trigonométricas.
2. Identificar las características de la gráfica de la función seno y coseno.
3. Determinar la función trigonométrica inversa en problemas en contexto.
4. Explicar el procedimiento de resolución de los problemas de las funciones trigonométricas e inversa.

Para cumplir los objetivos de esta clase, los estudiantes debieron revisar antes el video de funciones trigonométricas y el de funciones trigonométricas inversas que se encuentran en la carpeta clase 9 en la plataforma EdModo, los cuales se pueden encontrar en el siguiente link de YouTube:

- Funciones trigonométricas: https://www.youtube.com/watch?v=gBcc0Bvf0w4&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN&index=7

- Funciones trigonométricas inversa: https://www.youtube.com/watch?v=4hDdYVscVfs&index=6&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN

Estos videos tienen una duración de 10:51 y 6:06 minutos, respectivamente. Ambos videos son del tipo screen recording, lo cual se debe a que se utiliza GeoGebra para mostrar la gráfica de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, junto con esto se creó un ppt para las dos partes de los videos. En el caso del primero, el ppt permite recordar el término de función, para luego hablar de la gráfica de una función y cómo se obtiene. A continuación, se procede a mostrar los GeoGebra de cada función relacionándolo con el circulo goniométrico. En cambio, en el segundo video se ven las funciones inversas de las que se trabajaron en el primer video, donde se hace hincapié en que estas funciones no son las razones trigonométricas reciprocas y junto con ello se muestra la notación que se utiliza en la calculadora para determinar un ángulo, luego se realiza un ejemplo y se le da una tarea, que deberán desarrollar de forma individual. El docente realizará una puesta en común al comenzar la clase, enfatizando el procedimiento que utilizaron los estudiantes para desarrollar el ejercicio y se finaliza la actividad resolviendo cualquier duda que les haya quedado a los estudiantes del contenido.

Luego de ello, se entrega la guía 6 (véase apéndice 1.6) que consta de dos guías, las cuales tienen el mismo formato en donde el primer ítem se analiza la función seno en una y la otra la función coseno, en el segundo ítem los estudiantes resuelven un ejercicio de funciones trigonométricas y en el tercer ítem deben determinar el ángulo dado los lados. Es por ello, que a los grupos se les asigna la guía A o la guía B. Si al grupo le tocó la guía A deben descargar el GeoGebra de función seno, si al equipo le tocó la guía B deben descargar el GeoGebra de función coseno, ambas funciones se encuentran en la plataforma EdModo en la carpeta de la clase.

Luego de ello se hará una puesta en común sobre los resultados obtenidos en esta primera actividad y se les pide a los estudiantes que anoten el resumen en su cuaderno. Después, el profesor tendrá la posibilidad de explicar la función tangente utilizando el GeoGebra realizado para el profesor, que se encuentra en la carpeta de la clase llamado MD-Función tangente (véase figura 3.24), con el cual se podrá explicar el dominio, el recorrido, los valores máximo y mínimo, los valores en que se indetermina y los valores en que se hace cero la función tangente. Luego de esto, los estudiantes deben desarrollar la actividad 2 y 3, en ambas solo hay un ejercicio contextualizado sobre el tema que se está tratando. Finalmente, se comienzan las presentaciones de las actividades 2 y 3, para luego realizar una puesta en común de las ideas claves de la clase. Se les recuerda a los estudiantes que completen la autoevaluación y que suban a la plataforma la actividad 2 y 3. Además, se les recuerda a los estudiantes que deben realizar el ejercicio 6 (véase apéndice 4.6).

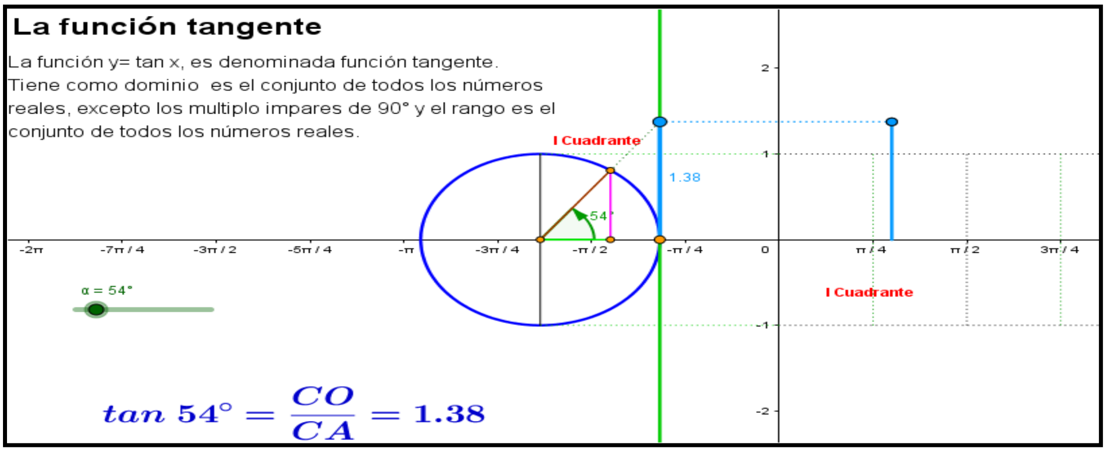



**Figura 3.24** MD-Gráfica de la función tangente

### 3.5.10 Clase 10: Identidades trigonométricas

Los objetivos de esta clase son:

1. Demostrar las identidades trigonométricas básicas y pitagóricas.
2. Comprobar igualdades a partir de las identidades trigonométricas.
3. Determinar las razones trigonométricas a partir de las identidades básicas y pitagóricas.
4. Explicar el procedimiento de resolución de las demostraciones de las identidades trigonométricas.

Al iniciar la clase, el profesor comienza resolviendo dudas que hayan quedado de la Cápsula de Conocimiento de identidades trigonométricas. Este video es hecho en mesa por considerar que los estudiantes deben prestar atención al procedimiento y cada uno de los pasos de las demostraciones allí expuestas, tiene una duración de 12:46 minutos, siendo el video más largo de la lista de reproducción destinada para la unidad, el cual se encuentra en el siguiente link:

https://youtu.be/asnLhATpRcQ?list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN.

El video tiene una introducción hacia la demostración matemática, considerando aspectos como la hipótesis, la tesis y el razonamiento deductivo; además, el video considera que las identidades trigonométricas se demuestran a partir de un razonamiento deductivo, dando dos ejemplos de su resolución y un último ejemplo de la utilización de una identidad trigonométrica para calcular otras razones trigonométricas a partir de ella, finalmente se les pide a los estudiantes que revisen el texto 5: identidades trigonométricas (véase apéndice 3.5) y que intenten realizar al menos una para la siguiente clase. El profesor preguntará a los estudiantes sí pudieron realizar la demostración y cuál fue la que hicieron, anotará un breve resumen de la forma de demostrar en la pizarra y dará por finalizado el tema de la cápsula.

Siguiendo con la clase, se hace entrega de la guía 7: identidades trigonométricas (véase apéndice 1.7) y se leen las instrucciones para trabajar. La guía consta de tres actividades, difiriendo un poco de las anteriores clases. En la actividad 1, los grupos de trabajo se les asignarán dos demostraciones, que deberán desarrollar en 20 minutos, luego de esto se presentarán de forma breve, para esto el docente tendrá a su disposición una rúbrica de evaluación propia de la guía 7 (véase apéndice 6.1) que muestra escalas de apreciaciones (malo, bueno, muy bueno) para cómo los estudiantes demuestran los ejercicios. Cuando los presentadores finalicen, entonces se continuará trabajando en la actividad 2 y 3 de la guía, las que constan de demostraciones y uso de una identidad trigonométrica para dar con otras razones trigonométricas. Los estudiantes tendrán 15 minutos para resolver las actividades, luego se realiza la segunda presentación a partir de la rúbrica de evaluación de clases.

### 3.5.11 Clase 11: Aplicaciones del teorema del seno y coseno

Los objetivos de esta clase son:

1. Demostrar el teorema del Seno y Coseno.
2. Aplicar el teorema del seno y el teorema del coseno a diversos contextos.
3. Explicar el procedimiento de resolución de las aplicaciones del teorema del seno y coseno.

Para cumplir los objetivos de esta clase, los estudiantes debieron haber visto antes el video del teorema del seno y del coseno que se encuentra en la carpeta clase 11 en la plataforma EdModo, junto con ello se sube a la plataforma un video extra de la fórmula de Herón que permite resolver otro tipo de problemas. Los videos se pueden encontrar en los siguientes links de YouTube:

- Teorema de seno: https://www.youtube.com/watch?v=H3Fm6ILoBDo&t=12s&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN&index=9
- Teorema del coseno: https://www.youtube.com/watch?v=idSrXkNKK2E&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN&index=10
- Fórmula de Herón: https://www.youtube.com/watch?v=kZlkY1aLuJ0&list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN&index=13

Estos videos, tiene una duración de 05:54, 05:09 y 04:09 minutos, respectivamente. El tipo de videos es de mesa, ya que se busca que los estudiantes presten atención al procedimiento y cada uno de los pasos allí expuestos. En el caso de estos videos, se comienza planteando un situación problema, que en el caso del teorema del seno se puede resolver utilizando las razones trigonométricas que hemos aprendido hasta esta clase, pero en el caso del teorema del coseno y de la fórmula de Herón se necesita esta información para poder resolver la situación inicial, por lo cual habiendo planteado el problema, se continúa viendo el contenido, para que después se resuelva el ejercicio planteado inicialmente y con ello se procede a dejar otro de tarea, que deberán resolver de forma individual. El docente realizará una puesta en común al comenzar la clase, enfatizando el procedimiento que utilizaron los estudiantes para desarrollar el ejercicio y se finaliza la actividad resolviendo cualquier duda que les haya quedado del contenido.

Para esta clase se propone que se lleve a los estudiantes a la sala de computación del establecimiento, en este punto los estudiantes tendrán a su disposición la guía 8 (véase apéndice 1.8), en la primera actividad los estudiantes trabajarán con GeoGebra para realizar las construcciones que les ayudarán a demostrar el teorema del seno y coseno de forma individual, esto se encuentra especificado en la guía de la clase. El docente podrá apoyarse de los GeoGebra respectivos de cada teorema, que se encuentran en la carpeta de la clase bajo los nombres de MD-Demostración del teorema del seno y MD-Demostración del teorema del coseno. También se recomienda que el profesor pueda mostrar a los estudiantes los pasos a seguir por medio de utilizar los GeoGebra antes especificados, además el docente tendrá un texto para cada demostración, con lo cual se podrá respaldar (véase apéndice 7.4) para asegurar la correcta demostración de los teoremas.

En la segunda actividad de la guía 8 se encuentran 12 ejercicios contextualizados del teorema del seno y coseno. Dentro de estos ejercicios, los estudiantes pueden aplicar cualquiera de los dos teoremas para calcular los lados faltantes del triángulo que se forma. Sin embargo, en los ejercicios 6, 7, 8 y 9 no basta con calcular los lados, sino que son ejercicios que involucran habilidades superiores de la Taxonomía de Bloom, ya que requieren que el estudiante analice, interprete y relacione. En el caso de esta guía, el docente deberá asignar cuatro problemas, de los cuales uno será el que cada grupo tendrá que presentar al final de la clase, el tiempo de presentación de esta clase es mayor que en otras (30 minutos aproximadamente) para que los estudiantes que no han presentado en las otras clases puedan presentar en esta actividad. Luego de ello, el docente realiza un resumen de las ideas claves tratadas en la clase, se les señala que deben completar la autoevaluación de esta clase y resolver el ejercicio 7 (véase apéndice 4.7) post-clase que involucra identidades trigonométricas (correspondiente a la clase 10) y teorema del seno y coseno (correspondiente a esta clase), lo cual se debe a que la post-clase anterior los estudiantes debieron haber visto los videos consultados al principio de la clase, por lo que la post-clase anterior quedaría sobre cargada de trabajo fuera del aula.

### 3.5.12 Clase 12: Midiendo distancia

Para esta clase se consideran los siguientes objetivos:

1. Determinar la distancia entre los objetos utilizando el teorema del seno o coseno.
2. Explicar la resolución del desafío midiendo distancia.

Se inicia la clase recordando los aspectos más importantes del teorema del seno y del coseno, para lo que el docente realiza un breve resumen en la pizarra. Luego el profesor entregará el desafío 4: Teorema del seno y coseno (véase apéndice 2.4) y se leerán las instrucciones y se iniciará con la resolución de la actividad previa. A cada grupo de estudiantes se les entregará uno de los tres desafíos de la guía, para los que tendrán 45 minutos, el docente entregará los transportadores de cartulina a cada grupo que los necesite según los desafíos que les haya tocado.

**Figura 3.25** Desafío 4, parte 1

El primer desafío contempla la determinación de distancias entre dos oficinas a partir de un ángulo medido y los dos lados que lo componen (véase figura 3.25). El segundo desafío considera la determinación de distancias entre dos oficinas a partir del ángulo comprendido entre una de las oficinas y un observador, un lado adyacente al ángulo y el lado opuesto a este (véase figura 3.26). El tercer desafío llamado cuánto habrán recorrido considera un mapa a escala con lugares en la orilla del lago Llanquihue, para ello los estudiantes requerirán un transportador tamaño normal y reglas de medición.

**Figura 3.26** Desafío 4, parte 2

Una vez finalizada la actividad, los presentadores realizarán las observaciones pertinentes según la rúbrica de desafíos. En este instante se les entregará a los estudiantes 40 minutos para las presentaciones, ya que se espera que cada estudiante que no haya presentado anteriormente lo haga en esta clase. En cuanto las presentaciones terminen, el docente entregará la guía 9: preparando la prueba (véase apéndice 1.9) para que los estudiantes tengan material de práctica para la evaluación final de la clase 14, señalando que en la siguiente clase se realizará la guía y se resolverá cualquier duda de la misma o de ejercicios de guías anteriores.

Además, el docente señala que se subirán a la plataforma dos videos de ejercicios resueltos que pertenecen a la misma guía. El video: ejercicios resueltos parte I, tiene una duración de 10:53 minutos y contempla contenido sobre la proyección de vectores con un ejercicio que no se encuentra en la guía y otro resuelto que sí está en la misma, es un video en pizarra debido a que se considera pertinente que los estudiantes observen cómo el profesor realizó el ejercicio. El segundo video: ejercicios resueltos parte II, tiene una duración de 09:04 minutos y considera el uso de las funciones trigonométricas inversas para encontrar los ángulos pedidos en los ejercicios, nuevamente se inicia con un problema que no se encuentra en la guía, seguido de otro que sí está, este video también ha sido grabado en pizarra por la misma razón anterior. Se dejan los links de ambos videos:

- Ejercicios resueltos parte I:
https://youtu.be/5RQFxjDnXLc?list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN

- Ejercicios resueltos parte II:
https://youtu.be/5I4BlNZ2Ayw?list=PLNKBEDFYyM8polhiIMb45fQh0K_Q_c_pN

Con esta información, se da por finalizada la clase.

### 3.5.13 Clase 13: Preparando la prueba final

El objetivo de esta clase es:

1. Aplicar las razones trigonométricas, las identidades trigonométricas, las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas, y el teorema del seno y coseno.

Para cumplir este objetivo se comienza haciendo un resumen de la materia con la ayuda de los estudiantes, se preguntan dudas sobre algún ejercicio o sobre los videos de ejercicios resueltos que se les envió antes de la clase. En el caso de que haya un estudiante que resolvió toda la guía, se le pide que ayude a sus compañeros haciendo como tutor de los otros. Recomendamos al docente que aproveche el momento para presentar la retroalimentación de las rúbricas de desafíos y de guías, además de retroalimentar la evaluación formativa.

### 3.5.14 Clase 14: Evaluación final

Los objetivos de esta clase refieren a los objetivos planteados en la prueba final, los que son:

1. Interpretar la gráfica de la función seno y coseno.
2. Examinar y demostrar una de las identidades trigonométricas.
3. Aplicar e ilustrar las razones trigonométricas a problemas en contexto.
4. Aplicar e ilustrar las funciones trigonométricas e inversas a problemas en contexto.
5. Aplicar el teorema del seno y coseno a problemas en contexto.

Para cumplir estos objetivos, la evaluación final (véase apéndice 5.4) consta de dos partes. La primera parte denominada calcula, contempla cinco ejercicios de aplicación de los contenidos observados, concentrándose en las razones trigonométricas, el teorema del seno y coseno y las funciones trigonométricas inversas. La segunda parte llamada responde, contiene una demostración errónea de una identidad trigonométrica, el estudiante tendrá que encontrar el error y resolverla de manera correcta, el segundo ejercicio de esta parte considera la descripción de las características de las funciones seno y coseno, y finalmente se encuentra un ejercicio en el cual se pide comprobar el resultado encontrado, justificando la respuesta.

Los estudiantes tendrán 80 minutos para realizar la evaluación, la que es de desarrollo por lo que se enfoca en el proceso que llevó al estudiante al resultado obtenido. El docente tendrá a su disposición una tabla de especificaciones (véase apéndice 6.4) que contempla los contenidos abordados por cada pregunta.

Aunque no se contempla una clase 15, se recomienda al profesor realizar una retroalimentación de la evaluación, ya sea por medio de la plataforma o en una clase presencial.

## 3.6 Estrategias de validación

Para validar la propuesta didáctica mencionada anteriormente, se seleccionó a tres validadores, a los que se le entregó acceso al curso creado en EdModo, donde se encuentra presente el material, junto con ello se les hizo entrega de un resumen de la propuesta didáctica que consta de 11 páginas y se le entregó un enlace a Google Forms con la encuesta de validación pertinente, que permiten traspasar la información cualitativa a cuantitativa, para su comparación y futura tabulación. Sin embargo, solo dos validadores contestaron la encuesta, lo que nos dificultó encontrar un reemplazo para el tercero por falta de tiempo.

### 3.6.1 Criterios de selección para validadores

El perfil de los participantes de la validación contempla a expertos que aporten en la modificación y evolución del total de la propuesta planteada. Debido a que el modelo de clase invertida es una metodología reciente en Chile, fue difícil encontrar docentes que tuvieran conocimiento de ella, por lo que se buscó a expertos que cumplieran las siguientes características:

- Ser profesor/a titulado/a de matemática
- Llevar cuatro años de experiencia o más realizando clases

Además, de cumplir con las características mencionadas, se espera que los expertos cumplan con al menos una de las siguientes categorías:

- Haber realizado clases en el nivel de segundo de enseñanza media o de tercero de enseñanza media en el área de matemática (debido al cambio de Marco a Bases Curriculares)
- Ser conocedor de las tecnologías de la información y comunicación (TICs)
- Haber utilizado plataformas educativas en sus clases.
- Ser conocedor del modelo de clase invertida.

De acuerdo a los puntos planteados anteriormente se han seleccionado 3 profesores que cumplen con al menos tres de los requisitos requeridos para la validación del material, que se resumen en la siguiente tabla.

| Validador | Descripción |
|---|---|
| Alan Muñoz (validador 1) | Ingeniero Electromecánico, con 10 años de experiencia en aula, actualmente trabaja en un colegio particular, donde ha enseñado trigonometría. Durante su docencia ha utilizado plataformas educativas en la sala de clases. |
| Osvaldo Baeza (validador 2) | Licenciado en Educación en Matemática y Computación/Profesor de Estado en Matemática y Computación, con 21 años de experiencia en aula, actualmente trabajando en un colegio particular, donde ha enseñado trigonometría. Junto con ello, se encuentra haciendo clase de Tecnologías de la información y la comunicación para la enseñanza (TICE) y de geometría a futuro docentes en la Universidad de Santiago de Chile. Además, ha utilizado plataforma educativa en la sala de clases. |

**Tabla 3.1** Resumen de los validadores de la propuesta didáctica.

### 3.6.2 Encuesta de validación

Como se mencionó anteriormente, la encuesta de validación se realizó en la plataforma Google Forms, la que se compone de nueve secciones de validación (véase apéndice 8). Cada sección de validación consta de una escala Likert en la que el número 5 considera estar totalmente de acuerdo con la afirmación y el número 1 totalmente en desacuerdo con ella.

1. Validación secuencia de clase: Este ítem considera los tiempos de las clases para las actividades estipulada, como también se valida el material didáctico verificando si es pertinente al contenido y al desarrollo del modelo de clase invertida.

    a. Las actividades de la clase están desarrolladas de forma clara.
    b. Los conceptos seleccionados son coherentes con el material (videos y/o textos) previos a la clase.
    c. Las actividades de la clase son acordes al tiempo estipulado (2 horas pedagógicas – 1:30 horas).

    Luego de las preguntas, la validación considera una casilla de comentarios opcional para los expertos.

2. Validación de diseño y presentación de guías y desafíos: Este ítem contempla validar el diseño y forma del material utilizado en clases, considerando aspectos como las instrucciones y el lenguaje del mismo.

    a. Las indicaciones generales son claras y de fácil comprensión.
    b. La presentación de la guía llama la atención y estimula a trabajar en ella gracias a su diseño.
    c. Los títulos asignados son coherentes con las actividades propuestas.
    d. La redacción y el lenguaje es claro y apto para el nivel en el que se implementa la guía.
    e. Las actividades propuestas son adecuadas para realizarse en la sala de clases.
    f. El desarrollo de la guía no supera el tiempo asignado por el docente (dependiendo de la guía).
    g. Las imágenes puestas en las guías orientan al estudiante en el desarrollo de las actividades.

    Además de las afirmaciones, esta sección cuenta con una casilla para señalar la(s) guía(s) o desafío(s) con mayor deficiencia de esta sección. Luego, continúa la casilla de comentarios que también se realiza de forma opcional.

3. Validación de textos y ejercicios: Este ítem contempla la validación de los textos y ejercicios que se encuentran fuera de la clase, considerando los aspectos más relevantes de ellos.

    a. La redacción y lenguaje son claros y de fácil comprensión.
    b. Los textos y ejercicios son de extensión corta y apropiadas para el tiempo predispuesto.
    c. Los textos y ejercicios apuntan a los aprendizajes esperados.

    Nuevamente, esta sección considera la casilla para señalar el(los) texto(s) y/o ejercicio(s) con mayor deficiencia de la sección. Después se encuentra la casilla de comentarios, opcional.

4. Validación de videos: Esta sección apunta a validar los videos que forman las Cápsulas de Conocimiento de la clase invertida.

    a. El uso de videos favorece el trabajo individual y la comprensión de los conceptos a trabajar.
    b. La duración del video es correcta para mantener la atención de los estudiantes.
    c. El contenido del video es acertado y apunta a los conceptos que se trabajarán en clases.
    d. La información entregada en los videos tiene una redacción clara y coherente.
    e. Los ejercicios presentes en los videos siguen la línea del contenido visto y se expresan de forma clara y coherente.
    f. La calidad técnica de los videos (audio, imagen, duración) son apropiadas para la comprensión de los conceptos involucrados en la unidad.
    g. El contenido matemático está libre de errores conceptuales.

    Una vez más se pide señalar el(los) video(s) con mayor deficiencia en esta sección y a continuación se encuentra la casilla opcional de comentarios.

5. Validación de guías: Este ítem contempla la validación de las nueve guías de trabajo en clases, sin considerar su diseño, ya que se validó en una sección anterior.

    a. El material es coherente con el desarrollo de los conceptos a trabajar en la clase.
    b. La complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media.
    c. La redacción y lenguaje son claros y no dan pie a interpretaciones erróneas.
    d. Las actividades propuestas cumplen con los objetivos de la clase.

e. Las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas.
f. Las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI.
g. Las preguntas planteadas promueven el trabajo colaborativo y la comunicación entre pares.
h. El contenido matemático está libre de errores conceptuales.
i. El contenido planteado en las guías es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases.
j. Los conceptos tratados en las guías están relacionados con otros conceptos anteriores o posteriores.

Después se presenta la casilla para señalar la(s) guía(s) con mayor deficiencia en esta sección, seguido de la casilla de comentarios.

6. Validación de desafíos: Esta sección contempla la validación de los cuatro desafíos trabajados en clases, sin considerar su diseño, ya que se validó en una sección anterior.

   a. Las actividades de la clase están desarrolladas de forma clara.
   b. La complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media.
   c. Las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI.
   d. Las actividades desarrolladas promueven el trabajo colaborativo.
   e. Los desafíos planteados son apropiados para el tiempo predispuesto (según cada clase).
   f. La redacción y lenguaje son claros y no dan pie a interpretaciones erróneas.
   g. El contenido planteado en los desafíos es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases.
   h. El contenido planteado en los desafíos está libre de errores conceptuales.
   i. Las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas.

   Después se presenta la casilla para señalar el(los) desafío(s) con mayor deficiencia en esta sección, seguido de la casilla de comentarios.

7. Validación de evaluaciones: Esta sección permite la validación de los tipos de evaluaciones creados para la unidad.

   a. El lenguaje y redacción de las evaluaciones es claro y preciso.
   b. Las instrucciones de las evaluaciones son claras y no permiten dobles interpretaciones.

c. Los ejercicios elegidos para las evaluaciones son acordes al contenido visto en clases.
d. Las rúbricas de evaluación permiten observar las habilidades matemáticas que se esperan fomentar en la unidad.
e. Las evaluaciones cumplen con los objetivos de aprendizaje detallados en las bases curriculares utilizadas.
f. La ficha de autoevaluación posee los indicadores adecuados para monitorear el trabajo clase a clase de los estudiantes.
g. Las presentaciones clase a clase siguen un formato adecuado y coherente con la rúbrica de evaluación.
h. La cantidad de evaluaciones es acorde al número de clases para la unidad.

En esta sección se pide señalar la(s) evaluaciones con mayor deficiencia en esta sección, continuando con la casilla de comentarios.

8. Validación del uso de la red educativa EdModo: En esta sección se busca validar el uso de la red educativa EdModo para el modelo de clase invertida.

   a. La red educativa es de fácil acceso e inscripción.
   b. El material presente es accesible y simple de localizar.
   c. El sitio promueve una buena interacción entre profesor y estudiante.
   d. La forma de utilizar el sitio es simple de entender y está libre de interpretaciones erróneas.
   e. El sitio cuenta con un buen espacio de ayuda que permite resolver dudas e inquietudes.
   f. La página es ordenada y su aspecto es agradable como red social educativa.
   g. Los enlaces vinculados al sitio (GeoGebra, YouTube) son de fácil acceso desde la red social educativa.
   h. El sitio tiene las herramientas necesarias para incentivar un aprendizaje significativo en los estudiantes.

   Este apartado termina con la casilla de comentarios opcional.

9. Opiniones: Debido a que el modelo de clase invertida es un tema reciente, consideramos pertinente recaudar las opiniones de los expertos respecto a distintos aspectos del modelo, en este ítem las preguntas a. y b. son obligatorias y las c. y d. son opcionales.

a. ¿Qué le pareció más interesante de la metodología de clase invertida?: Esta pregunta se responde marcando un máximo de cuatro casillas, en las que se encuentran:

    i. El uso de videos
    ii. La plataforma EdModo
    iii. La aplicación en la unidad de trigonometría
    iv. El trabajo dentro del aula
    v. El material utilizado
    vi. La secuencia didáctica (antes, durante y después de clases)
    vii. Las evaluaciones (autoevaluación, formativa, sumativa)

b. ¿Qué adaptaciones le haría al modelo y/o material?
c. ¿Utilizaría el modelo de clase invertida para sus clases?
d. Apreciaciones finales.

# Capítulo 4: Resultados

Como se ha mencionado en el pasado capítulo 3, la propuesta didáctica fue validada por dos profesores expertos en el área de las TICs aplicada a la enseñanza, como también realizan clases en establecimientos educacionales y además enseñaron trigonometría. El validador 1, no tiene título de profesor de estado de matemática, pero como ha enseñado durante 10 años y ha utilizado plataformas educativas, consideramos sus comentarios como docente, mientras que el validador 2 cumple con los requisitos mínimos planteados en el capítulo 3.

A continuación, se muestra el análisis de las respuestas recibidas por parte de los validadores para cada una de las clases.

## 4.1 Tabulación de las respuestas por sección

A continuación, se procederá a mostrar las respuestas dadas por los validadores en la encuesta likert de cada sección, desglosando los ítems que los componen. Aunque no presentamos los resultados de las guías que mejorarían los validadores, debido a que en todas las secciones no señalaron ninguna.

### 4.1.1 Validación secuencia de clase

Esta sección busca que los validadores vean el tiempo de las clases, la pertinencia del contenido y el desarrollo del modelo de clase invertida. La tabla 4.1 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| C | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

**Tabla 4.1** Resumen respuestas de validadores para el ítem 1.

Con los resultados de la tabla 4.1, se grafican los datos para obtener la figura 4.1.

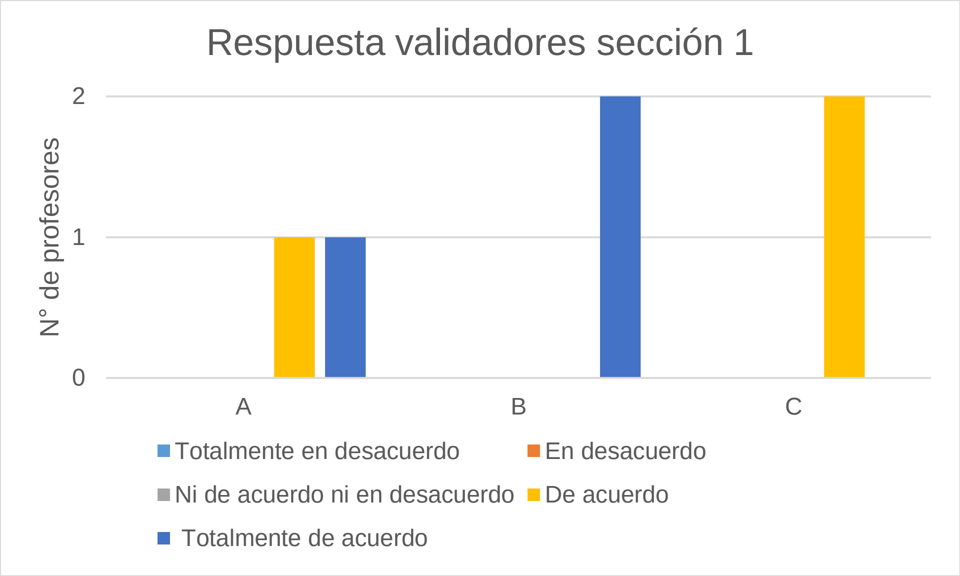



**Figura 4.1** Gráfico respuesta de validadores de la secuencia de clase.

Obsérvese que para esta sección los validadores piensan que las clases están desarrolladas de forma clara (ítem A), además en el ítem B se ve que ambos validadores están totalmente de acuerdo con que el material previo a la clase es coherente y asertivo, en cambio en el ítem C vemos que ambos están de acuerdo en que el tiempo es acorde a las actividades estipuladas. Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.2.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| **1** | Sin comentarios |
| **2** | Si bien son claras las actividades, el desarrollo de éstas podrían ser más claramente asociadas a las habilidades que se propician en el currículum que se viene instalando (bases curriculares), para ir normalizando a los alumnos y al docente en las habilidades que allí se desarrollan. Las actividades me parece que se pueden agotar en menos tiempo de lo que se pensó al diseñarlas. Por ello, debiesen existir más actividades desafiantes que queden a disposición del docente al momento de que se le agoten en clase las que tenga planificadas. |

**Tabla 4.2** Comentarios de validadores para el ítem 1.

### 4.1.2 Validación de diseño y presentación de guías y desafíos

Esta sección busca que los validadores observen los aspectos generales de las guías y desafíos, enfocándose en el diseño y presentación de las mismas. La tabla 4.3 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| D | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

**Tabla 4.3** Resumen respuestas de validadores para el ítem 2.

Con los resultados de la tabla 4.3, se grafican los datos para obtener la figura 4.2.

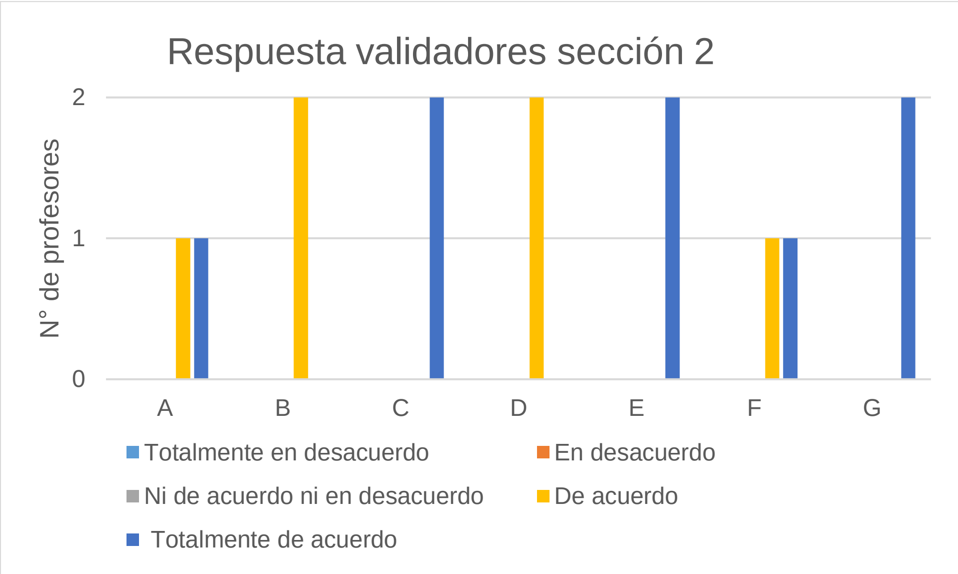



**Figura 4.2** Gráfico respuesta de validadores de diseño y presentación de guías y desafíos.

En esta sección los validadores piensan que las indicaciones generales pueden mejorar en su claridad y fácil comprensión (ítem A). Ambos validadores consideran que la presentación de la guía llama la atención y estimula a trabajar en ella gracias a su diseño (ítem B), que los títulos asignados son coherentes con las actividades propuestas (ítem C), consideran que la redacción y el lenguaje es claro y apto para el nivel en el que se implementa la guía (ítem D) y que las actividades propuestas son adecuadas para realizarse en la sala de clases (ítem E). Los validadores consideran que se puede mejorar el tiempo para el desarrollo de la guía (ítem F). Finalmente, ambos validadores están totalmente de acuerdo en que las imágenes puestas en las guías orientan al estudiante en el desarrollo de las actividades.

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.4.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| **1** | Se debe cuidar que los ejercicios planteados vayan de fácil a difícil y que la nomenclatura utilizada sea la correcta en función al tema que se está desarrollando. |
| **2** | Como toda obra humana, es susceptible de ser mejorada. Las áreas que en mi opinión debiesen depurarse son: 1. El lenguaje técnico. En ocasiones se usan términos coloquiales para definiciones matemáticas. Esa laxitud puede llevar a comprensiones diferentes a las que se espera en una persona que no sabe lo que se le está enseñando. Por esto es que las definiciones matemáticas son tan precisas, para que todos los que la manejen, entiendan lo mismo. 2. Se pueden perfeccionar los diseños gráficos que se usan en los materiales, con algunos consejos o asesoría gráficas, puede perfeccionarse esto. 3. La pertinencia de los tiempos asociados a las clases dependerá del tipo de alumno y las condiciones donde se implemente esta propuesta, por lo que no es simple indicar si están ajustados los tiempos o no. |

**Tabla 4.4** Comentarios de validadores para el ítem 2.

### 4.1.3 Validación de textos y ejercicios

En esta sección se espera que los validadores observen los aspectos de los textos y ejercicios. La tabla 4.5 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

**Tabla 4.5** Resumen respuestas de validadores para el ítem 3.

Con los resultados de la tabla 4.5, se grafican los datos para obtener la figura 4.3.

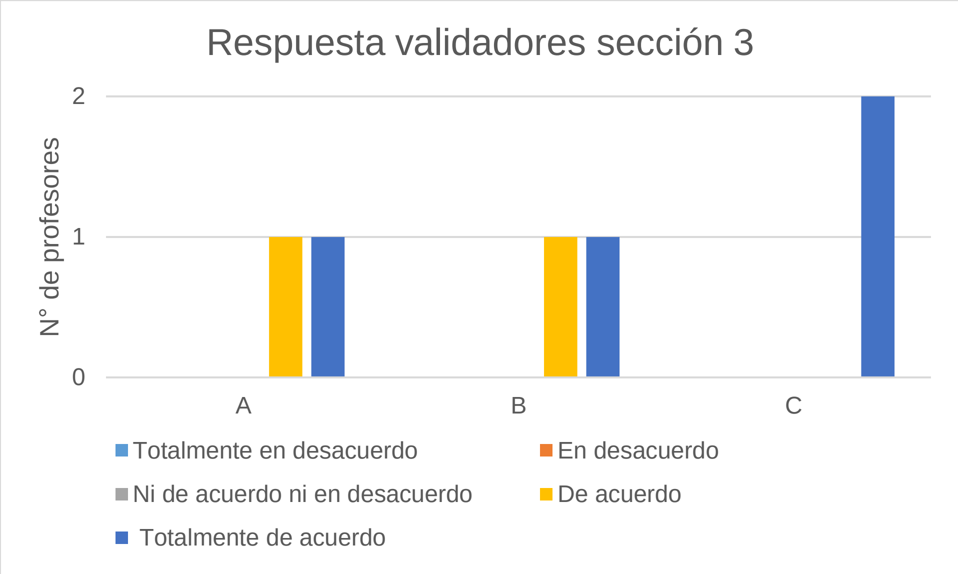



**Figura 4.3** Gráfico respuesta de validadores de textos y ejercicios.

En esta sección los validadores piensan que se puede mejorar redacción y lenguaje de los textos y ejercicios (ítem A). Ambos validadores están de acuerdo en que los textos y ejercicios son de extensión corta y apropiadas para el tiempo predispuesto (ítem B), y, por último, ambos validadores están totalmente de acuerdo en que los textos y ejercicios apuntan a los aprendizajes esperados (ítem C).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.6.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| 1 | Ninguno |
| 2 | El lenguaje técnico se debiese depurar más, para que no de la posibilidad de comprensiones diferentes a las que se espera que los estudiantes aprendan. |

**Tabla 4.6** Comentarios de validadores para el ítem 3.

### 4.1.4 Validación de videos

En esta sección se espera que los validadores observen los aspectos de los videos, desde la calidad de grabación, hasta el contenido matemático presente en ellos. La tabla 4.7 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |

**Tabla 4.7** Resumen respuestas de validadores para el ítem 4.

Con los resultados de la tabla 4.7, se grafican los datos para obtener la figura 4.4.

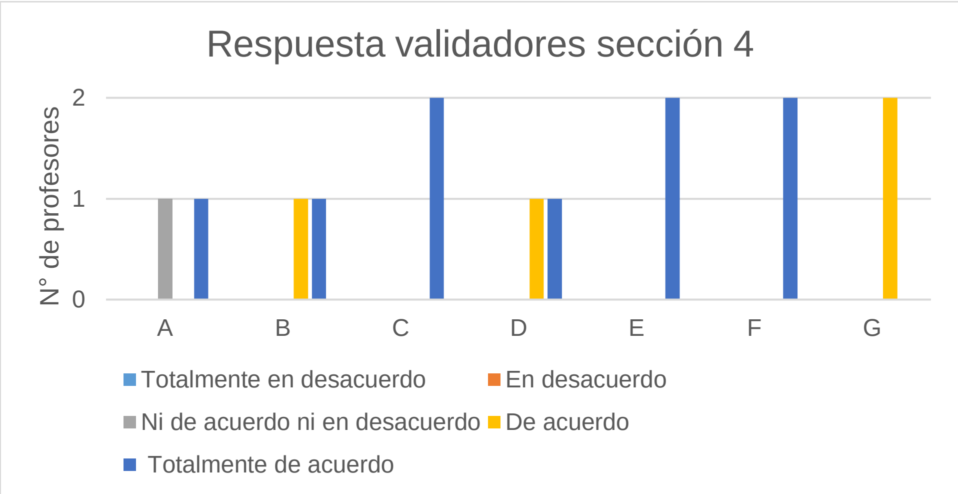



**Figura 4.4** Gráfico respuesta de validadores de videos.

En esta sección uno de los validadores no está ni de acuerdo ni en desacuerdo en que el uso de videos favorece el trabajo individual y la comprensión de los conceptos a trabajar, mientras que otro está totalmente de acuerdo (ítem A). Ambos validadores están de acuerdo en que la duración del video es correcta para mantener la atención de los estudiantes (ítem B). Los dos validadores están totalmente de acuerdo en que el contenido del video es acertado y apunta a los conceptos que se trabajarán en clases (ítem C). Los validadores están de acuerdo en que la información entregada en los videos tiene una redacción clara y coherente (ítem D). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que los ejercicios presentes en los videos siguen la línea del contenido visto y se expresan de forma clara y coherente (ítem E). Los dos validadores están totalmente de acuerdo en que la calidad técnica de los videos es apropiada para la comprensión de los conceptos involucrados en la unidad (ítem F). Por último, los dos validadores están de acuerdo en que el contenido matemático está libre de errores conceptuales (ítem G).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.8.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| **1** | El que mucho explica se complica, de hoy en día los estudiantes están acostumbrados a observar y atender multi ventanas por el uso de los medios de comunicación y la tecnología, en ese caso, no es bueno utilizar el método tradicionalista de enseñanza en los videos, más al contrario tener más interactividad en los videos. |
| **2** | Los videos, en general, explican cuestiones procedimentales, por lo que la comprensión conceptual no es abordada en ellos de manera explícita. Si bien los videos son robustos en su trabajo matemático, algunas cuestiones formales se debiesen pulir en ellos como, por ejemplo, el usar la frase "pasa restando al otro lado" en lugar de "se resta lo mismo a ambos miembros de la ecuación" es algo que debiese mejorarse en algunos videos. |

**Tabla 4.8** Comentarios de validadores para el ítem 4.

### 4.1.5 Validación de guías

En esta sección se espera que los validadores observen los aspectos de las guías, enfocándose en su contenido y la utilización de este. La tabla 4.9 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| C | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| H | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| J | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

**Tabla 4.9** Resumen respuestas de validadores para el ítem 5.

Con los resultados de la tabla 4.9, se grafican los datos para obtener la figura 4.5.

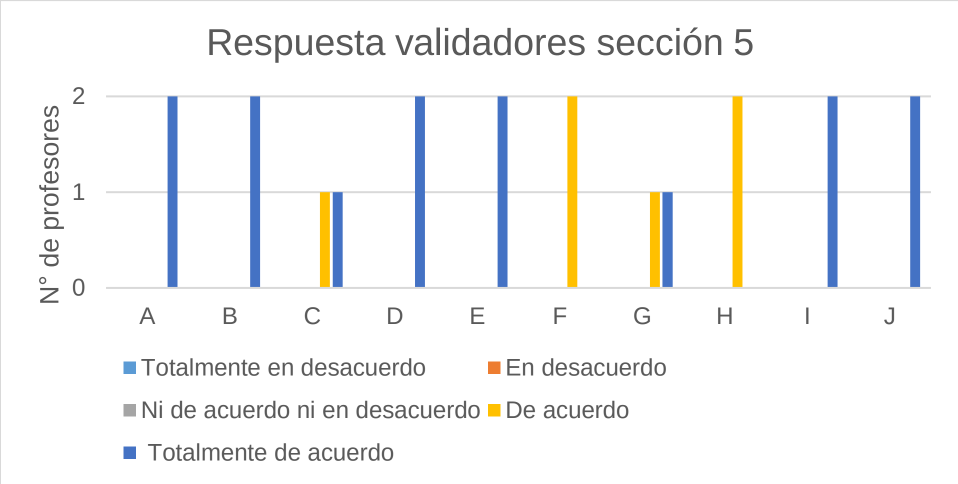



**Figura 4.5** Gráfico respuesta de validadores de guías.

En esta sección los validadores piensan que el material es coherente con el desarrollo de los conceptos a trabajar en la clase (ítem A). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que la complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media (ítem B). Los validadores están de acuerdo en que la redacción y lenguaje son claros y no dan pie a interpretaciones erróneas (ítem C). Los validadores están totalmente de acuerdo en que las actividades propuestas cumplen con los objetivos de la clase (ítem D). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas (ítem E). Los validadores están de acuerdo en que las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI (ítem F). Los validadores están de acuerdo en que las preguntas planteadas promueven el trabajo colaborativo y la comunicación entre pares (ítem G). Los validadores consideran que los conceptos pueden ser mejorados para evitar errores conceptuales (ítem H). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que el contenido planteado en las guías es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases (ítem I). Por último, los dos validadores están totalmente de acuerdo en que los conceptos tratados en las guías están relacionados con otros conceptos anteriores o posteriores (ítem J).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.10.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| 1 | Ninguno |
| 2 | Las guías están inclinadas más hacia el aprendizaje de cuestiones procedimentales que conceptuales. Para esto último, se debiese proponer otro tipo de trabajos o preguntas en las guías. |

**Tabla 4.10** Comentarios de validadores para el ítem 5.

### 4.1.6 Validación de desafíos

En esta sección se espera que los validadores observen los aspectos de los desafíos propuestos, enfocándose en el contenido y las situaciones relevantes de ellos. La tabla 4.11 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| C | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| I | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Tabla 4.11** Resumen respuestas de validadores para el ítem 6.

Con los resultados de la tabla 4.11, se grafican los datos para obtener la figura 4.6.

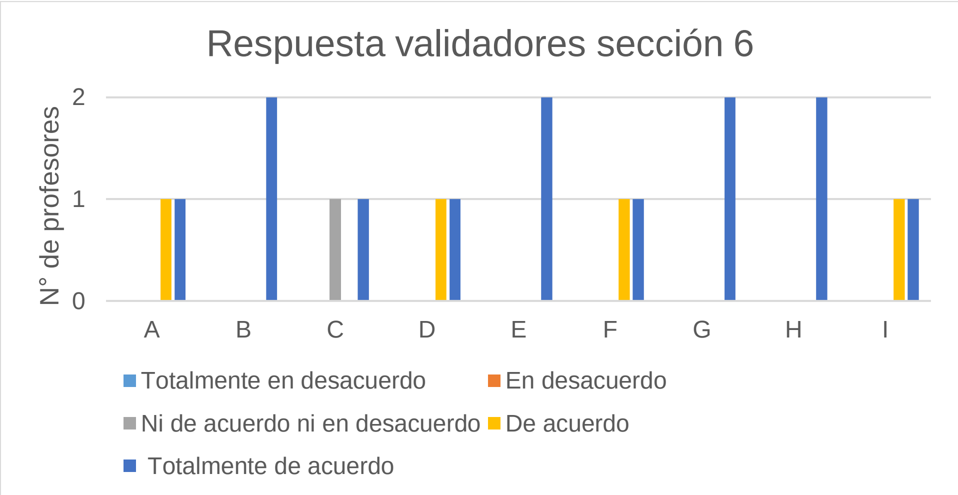



**Figura 4.6** Gráfico respuesta de validadores de desafíos.

En esta sección los validadores piensan que se puede mejorar la claridad en el desarrollo de las actividades (ítem A). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que la complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media (ítem B). Uno de los validadores no está ni de acuerdo ni en desacuerdo en que las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI, mientras que el otro está totalmente de acuerdo (ítem C). Los validadores están de acuerdo en que las actividades desarrolladas promueven el trabajo colaborativo (ítem D). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que los desafíos planteados son apropiados para el tiempo predispuesto (ítem E). Los validadores consideran que se puede mejorar la claridad del lenguaje para que no dé pie a interpretaciones erróneas (ítem F). Los validadores están totalmente de acuerdo en que el contenido planteado en los desafíos es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases (ítem G). Los dos validadores están totalmente de acuerdo en que el contenido planteado en los desafíos está libre de errores conceptuales (ítem H). Finalmente, uno de los validadores está de acuerdo en que Las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas, mientras que el otro está totalmente de acuerdo (ítem I).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.12.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| **1** | Ninguno |
| **2** | Comentarios similares a los que haría en esta parte los realicé anteriormente. |

**Tabla 4.12** Comentarios de validadores para el ítem 6.

### 4.1.7 Validación de evaluaciones

En esta sección se espera que los validadores observen los tres tipos de evaluaciones presentes en el modelo. La tabla 4.13 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| B | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| F | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| G | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| H | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Tabla 4.13** Resumen respuestas de validadores para el ítem 7.

Con los resultados de la tabla 4.13, se grafican los datos para obtener la figura 4.7.

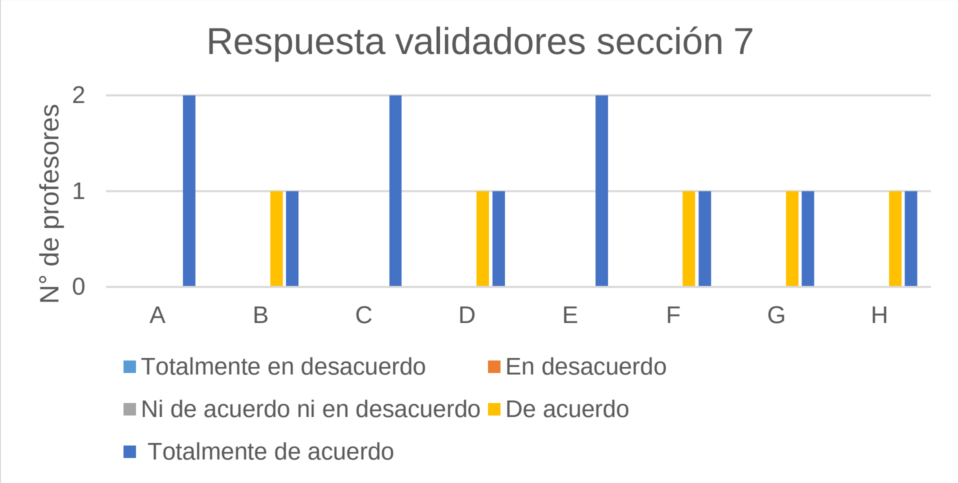



**Figura 4.7** Gráfico respuesta de validadores de evaluaciones.

En esta sección los validadores están totalmente de acuerdo en que el lenguaje y redacción de las evaluaciones es claro y preciso (ítem A). Ambos validadores están de acuerdo en que las instrucciones de las evaluaciones son claras y no permiten dobles interpretaciones (ítem B). Los dos validadores están totalmente de acuerdo en que los ejercicios elegidos para las evaluaciones son acordes al contenido visto en clases (ítem C). Los validadores están de acuerdo en que las rúbricas de evaluación permiten observar las habilidades matemáticas que se esperan fomentar en la unidad (ítem D). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que las evaluaciones cumplen con los objetivos de aprendizaje detallados en las bases curriculares utilizadas (ítem E). Los validadores están de acuerdo en que la ficha de autoevaluación posee los indicadores adecuados para monitorear el trabajo clase a clase de los estudiantes (ítem F). Ambos validadores están de acuerdo en que las presentaciones clase a clase siguen un formato adecuado y coherente con la rúbrica de evaluación (ítem G). Finalmente, los validadores están de acuerdo en que la cantidad de evaluaciones es acorde al número de clases para la unidad. (ítem H).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.14.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| **1** | Excelente trabajo |
| **2** | Falta perfeccionar las evaluaciones, pero en general, apuntan a lo que se desea evaluar. |

**Tabla 4.14** Comentarios de validadores para el ítem 7.

### 4.1.8 Validación del uso de la red educativa EdModo

En esta sección se espera que los validadores observen los aspectos que involucran el uso de la red educativa presente en la propuesta didáctica.  La tabla 4.15 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Ítem | Totalmente en desacuerdo | En desacuerdo | Ni de acuerdo ni en desacuerdo | De acuerdo | Totalmente de acuerdo |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| H | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Tabla 4.15** Resumen respuestas de validadores para el ítem 8.

Con los resultados de la tabla 4.15, se grafican los datos para obtener la figura 4.8.

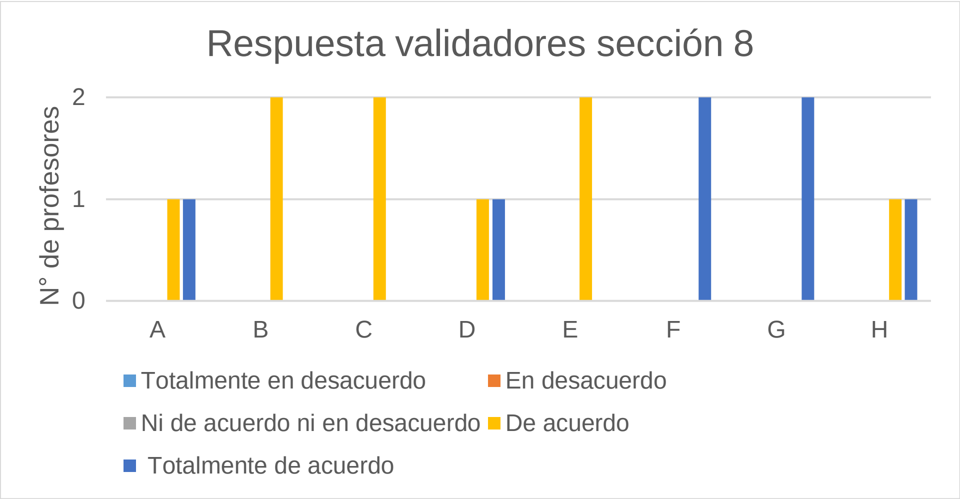



**Figura 4.8** Gráfico respuesta de validadores de uso de la red educativa Edmodo.

En esta sección los validadores piensan que la red educativa es de fácil acceso e inscripción (ítem A). Ambos validadores están de acuerdo en que el material presente es accesible y simple de localizar (ítem B). Ambos validadores están de acuerdo en que el sitio promueve una buena interacción entre profesor y estudiante (ítem C). Los validadores están de acuerdo en que la forma de utilizar el sitio es simple de entender y está libre de interpretaciones erróneas (ítem D). Los dos validadores están de acuerdo en que el sitio cuenta con un buen espacio de ayuda que permite resolver dudas e inquietudes (ítem E). Los dos validadores están totalmente de acuerdo en que la página es ordenada y su aspecto es agradable como red social educativa (ítem F). Ambos validadores están totalmente de acuerdo en que los enlaces vinculados al sitio (GeoGebra, YouTube) son de fácil acceso desde la red social educativa (ítem G). Y finalmente, los validadores están de acuerdo en que el sitio tiene las herramientas necesarias para incentivar un aprendizaje significativo en los estudiantes (ítem H).

Los comentarios que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.16.

| Validadores | Comentarios |
|---|---|
| 1 | Ninguno |
| 2 | Después de culturizarse con los ambientes de trabajo, éstos son amables en su uso. |

**Tabla 4.16** Comentarios de validadores para el ítem 8.

### 4.1.9 Opiniones

Finalmente, en esta sección se espera que los validadores den sus opiniones y apreciaciones referente a la propuesta didáctica. La tabla 4.17 muestra un resumen de los resultados obtenidos en este punto de la validación.

| Aspectos que le parecieron más interesantes a los validadores | Número de profesores |
|---|---|
| El uso de videos | 2 |
| La plataforma EdModo | 1 |
| La aplicación en la unidad de trigonometría | 1 |
| El trabajo dentro del aula | 1 |
| El material utilizado | 0 |
| La secuencia didáctica | 2 |
| Las evaluaciones | 1 |

**Tabla 4.17** Resumen respuestas de validadores para el ítem 9.

Con los resultados de la tabla 4.17, se grafican los datos para obtener la figura 4.9.

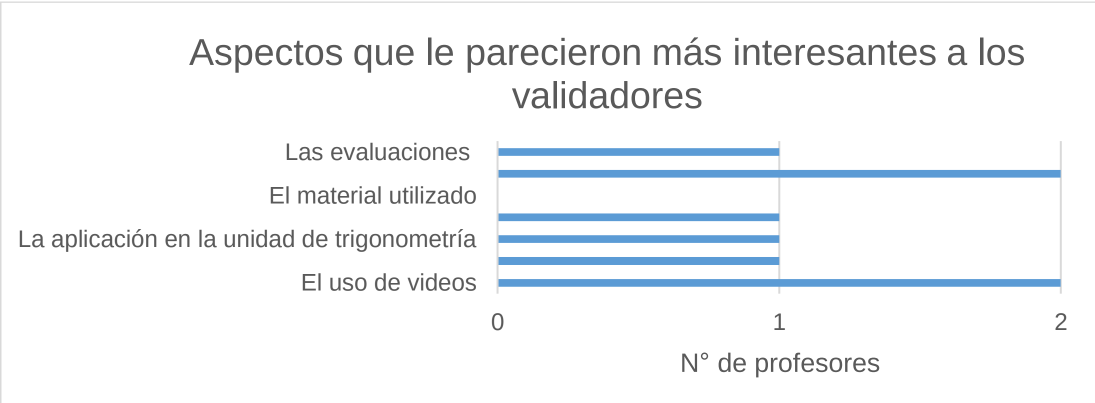



**Figura 4.9** Gráfico respuesta de validadores de sus intereses de la propuesta.

Según el gráfico en la figura 4.9, observamos que los aspectos que le parecieron más interesantes a los validadores son la secuencia didáctica y el uso de videos. Luego, en aspectos interesantes posteriores se encuentran las evaluaciones, el trabajo dentro del aula, la aplicación en la unidad de trigonometría y la plataforma Edmodo. Por último, el aspecto que les pareció menos interesante de la propuesta a los validadores, en comparación con los otros, fue el material utilizado en la unidad.

Las adaptaciones que harían los validadores a la propuesta se resumen en la tabla 4.18.

| Validadores | Adaptaciones que le harían a la propuesta |
|---|---|
| 1 | Ninguna |
| 2 | 1. Las planificaciones de clase no están estandarizadas, por lo que la realización de esta unidad en personas que no tienen contacto con los autores no les será simple reproducir las estrategias.<br>2.La estrategia de hacer consultas y retroalimentaciones con fotos subidas a EdModo, se hace un poco ineficiente si en las clases presenciales no se les saca provecho a las imágenes. Además, esa estrategia de muchos preguntando a uno respondiendo implica mucho tiempo para el docente en sus retroalimentaciones. Se podría pensar en un mecanismo que les permitiera tanto a docentes como alumnos utilizar las interacciones que se realicen al momento de hacer las consultas de manera que no sea tan demandante de tiempo para el docente. Por ejemplo, que las preguntas que pertenezcan a una categoría específica, el docente las use para dar una respuesta general a esa temática en lugar de responder uno a uno los estudiantes.<br>3. Incluiría más trabajo orientado a la adquisición de habilidades que se están intencionado actualmente como, por ejemplo, las de modelar, argumentar y comunicar y representar, todas articuladas dentro de la resolución de problemas. |

**Tabla 4.18** Resumen de adaptaciones al material que harían los validadores a la propuesta.

Las apreciaciones finales que hicieron los validadores en esta sección se resumen en la tabla 4.19.

| Validadores | Apreciaciones finales |
|---|---|
| 1 | Es un excelente trabajo, es inmersiva, entretenida, activa, productiva, funcional y sobre todo educativa. Les deseo éxito en el trabajo que desempeñan y sigan en pie con las tecnologías en la educación. |
| 2 | Les enviaré el documento con las descripciones de clase. En él hice algunas anotaciones que les puede servir para hacer ajustes. |

**Tabla 4.19** Resumen de las apreciaciones finales de los validadores sobre la propuesta didáctica.

## 4.2 Cambios del material didáctico

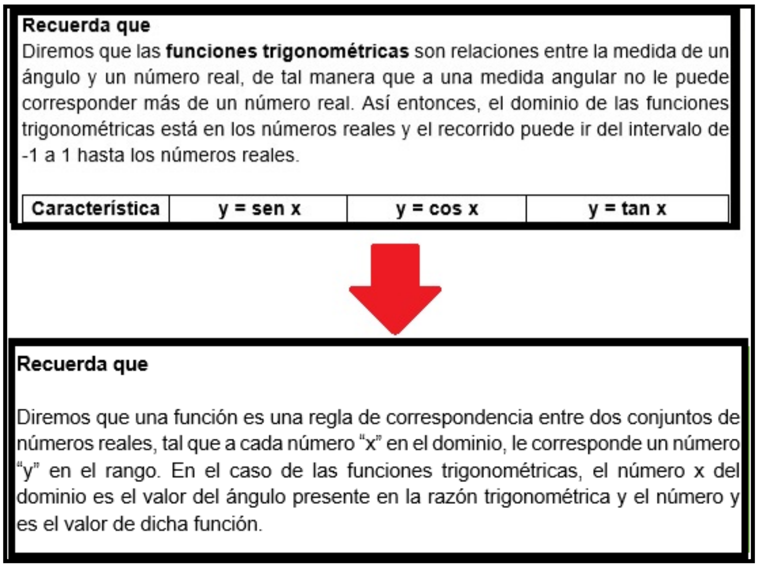
Como observamos en la tabulación y gráficas de respuestas del punto anterior, la mayoría de las afirmaciones realizadas en la encuesta fueron validadas con los números 4 y 5, posicionándose entre los estándares de acuerdo y totalmente de acuerdo. Con el fin de mejorar la propuesta didáctica, se utilizaron los comentarios dados por los validadores, resumiendo las ideas principales dada por ello en la tabla 4.20.

| Sección | Comentarios destacados |
|---|---|
| Secuencia de clase | Las actividades deben ser más claras y asociadas a las habilidades propuestas por el currículo. |
| | Las actividades se pueden agotar en menos tiempo del estipulado, por lo que debiese haber más actividades desafiantes en caso de que sobre tiempo. |
| Diseño y presentación | Los ejercicios deben tener un orden de fácil a difícil y que la nomenclatura sea la correcta. |
| | Depurar el lenguaje técnico, debido a que está muy coloquial. |
| | La pertinencia de los tiempos asociados a las clases dependerá del tipo de alumno y las condiciones donde se implemente esta propuesta. |
| Videos | No es bueno utilizar el método tradicionalista en los videos, al contrario, debiesen ser más interactivos. |
| | Los videos son robustos en su trabajo matemático y algunas cuestiones formales se debiesen pulir en ellos como el lenguaje utilizado. |
| Guías y desafíos | Las guías están inclinadas más hacia el aprendizaje de cuestiones procedimentales que conceptuales. Se debiese proponer otro tipo de trabajos o preguntas en las guías. |
| Opiniones | Las planificaciones de clase no están estandarizadas. |
| | La estrategia de hacer consultas y retroalimentaciones con fotos subidas a EdModo, se hace un poco ineficiente si en las clases presenciales no se les saca provecho a las imágenes. |
| | Las preguntas que realicen los estudiantes en la plataforma, pertenezcan a una categoría. |
| | Modificar los objetivos de las clases. |
| | Proponer que estudiantes demuestren el teorema del seno y coseno |

**Tabla 4.20** Resumen de los comentarios más relevantes.

El primer cambio significativo realizado por el conjunto de comentarios destacados fue realizar indicaciones generales al docente (expuesto en el apartado 3.5), observamos que, si bien la secuencia didáctica escrita en el capítulo anterior planteaba los pasos a seguir, el documento no poseía una indicación para el profesor de cómo guiar el trabajo de los estudiantes, tanto dentro como fuera de sala de clase. En este mismo apartado se consideró importante especificar que el material y las clases realizadas fomentan las cuatro habilidades matemáticas propuestas en el currículo (resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar). Las indicaciones al docente resumen el trabajo general realizado, especificando la manera en la que el docente guía el trabajo cooperativo de los estudiantes al problematizar las actividades realizadas.

En el diseño y presentación de guías y desafíos consideramos apropiado ordenar las guías por nivel de dificultad, sin embargo, consideramos que no sería necesario para ciertas guías en las que el docente tendría que designar ejercicios a los grupos de trabajo. El cambio de orden se realizó en tres guías (3, 4, y 9) así como también en la evaluación formativa. Por otro lado, consideramos indispensable revisar la nomenclatura y el lenguaje utilizado en todo el material didáctico (véase figura 4.10), no solo en las guías y desafíos, ya que fue un punto que ambos validadores comentaron.


**Recuerda que**

Diremos que las **funciones trigonométricas** son relaciones entre la medida de un ángulo y un número real, de tal manera que a una medida angular no le puede corresponder más de un número real. Así entonces, el dominio de las funciones trigonométricas está en los números reales y el recorrido puede ir del intervalo de -1 a 1 hasta los números reales.

| Característica | y = sen x | y = cos x | y = tan x |
|---|---|---|---|

**Recuerda que**

Diremos que una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de números reales, tal que a cada número "x" en el dominio, le corresponde un número "y" en el rango. En el caso de las funciones trigonométricas, el número x del dominio es el valor del ángulo presente en la razón trigonométrica y el número y es el valor de dicha función.

**Figura 4.10** Ejemplo de mejora del lenguaje de la guía 6

Nos apoyamos del libro Trigonometría y Geometría Analítica (Sullivan,1997) para revisar el lenguaje, cambiamos de un lenguaje coloquial a uno más formal y técnico, en algunos casos reestructuramos los inicios de las guías (entre ellas, las guías 1, 2, 4, 6 y 7 y los desafíos 1 y 3). En cuanto a los tiempos mencionados, consideramos que no existe problema en añadir un tiempo ideal a la propuesta, ya que incluso si los tiempos no son respetados en su totalidad, le dan una idea al docente de cuánto se debería demorar en cada actividad. Junto con ello, sabemos que la propuesta didáctica va a depender del tipo de estudiante que tengamos en la sala de clase, lo que provoca que estos tiempos sean relativos y en caso de la propuesta está pensada para 40 estudiantes en aula. Aun así, consideramos el comentario y añadimos un documento que contienen ejercicios extra (véase apéndice 7.5) de cada tema que se trata en la unidad, siendo estos más complejos que los tratados en las guías y en los ejercicios post clase, ya que buscamos que los estudiantes que hayan logrado la actividad en menos tiempo del estipulado se puedan seguir superando e interiorizando el contenido.

La sección de los videos fue la con más baja calificación dada por los validadores, somos conscientes de las fallas que presentan estos y por ello no estamos conforme con el resultado final, por lo que creemos que podemos mejorarlos. Respecto a los comentarios hechos por los validadores, el uso del método tradicionalista para enseñar en los videos viene desde la metodología de clase invertida, donde inicialmente se formaliza y entrega el contenido de forma rápida y resumida en ellos, ya que se busca que los estudiantes se queden con una, dos o tres ideas principales que se están tratando en los videos, por lo cual no se busca interiorizar el concepto ni que el video motive, dado que esto último se da en la clase. Por ello, consideramos no cambiar la forma general en la cual se entrega el contenido en los videos, pero sí estamos de acuerdo en que algunos videos pueden iniciar desde un problema y desde este llegar al contenido, en vez de entregar el contenido al principio y luego resolver el ejercicio, con el fin de generar un interés mayor en los estudiantes.

Por otro lado, no consideramos realizar cambios en los videos, esto debido a lo demandante que resultó trabajar tanto en el formato como en el contenido de ellos. Según Sánchez (2016) el realizar videos consiste en un proceso de años

> "El primer año requiere mucha grabación, el segundo más grabación y perfeccionamiento de los materiales y el tercero y siguientes terminar de perfilar esos materiales. Pero cada año siempre se pueden mejorar, pulir y retocar." Sánchez (2016; p. 57)

Considerando este aspecto, podemos decir que el proceso que utilizamos para la grabación de nuestros videos fue relativamente acelerado, Estos los realizamos en dos meses aproximadamente, en donde el primer mes construimos los guiones y el material a presentar, el segundo mes utilizamos el tiempo en grabar lo planificado. Podemos catalogar que la grabación fue lo más complicado, fueron días completos de grabaciones para hacer solo un video, reediciones y tomas nuevas, luego al momento de editar el material nos encontrábamos con errores de tomas, distorsiones de imágenes, desenfoques o ruido de entorno. Según Bergmann y Sams (2012), realizar videos para la clase invertida es un proceso de construcción que consiste en continuar grabando y eliminando videos hasta sentirse cómodos con el material obtenido, esto se logra solo al continuar haciendo más y más videos. Debido a ello, consideramos apropiados los comentarios y sugerencias realizados por los validadores y, aunque en función del tiempo no haremos cambios en los videos, aun así, seguiremos trabajando en los videos hasta que estemos conforme con la biblioteca de videos creada para la unidad de trigonometría.

Pasando a la sección de guías y desafíos, nos llamó la atención la percepción de que las guías están inclinadas al aprendizaje procedimental, más que al conceptual, ya que desde nuestra perspectiva las guías y desafíos son claros para contrarrestar el procedimiento y el concepto, y así incentivar habilidades de nivel superior en la taxonomía de Bloom que es lo que se busca al utilizar el modelo de clase invertida. Aun así, consideramos el comentario realizado, por lo cual incluimos en los desafíos que los estudiantes planteen una hipótesis antes de comenzar con la actividad (véase figura 4.11), aspecto que antes habíamos añadido solo a dos desafíos, por lo que se les agregó la misma idea y actividad previa a los desafíos faltantes (1 y 3). Sin embargo, consideramos que las guías necesitan tener un procedimiento claro, para que el estudiante pueda seguirlo sin desviarse del objetivo de clase, por lo que el docente guiará el proceso del estudiante fomentado que los grupos trabajen en forma cooperativa, como también los ayudara a que recauden toda la información necesaria para resolver la situación planteada.

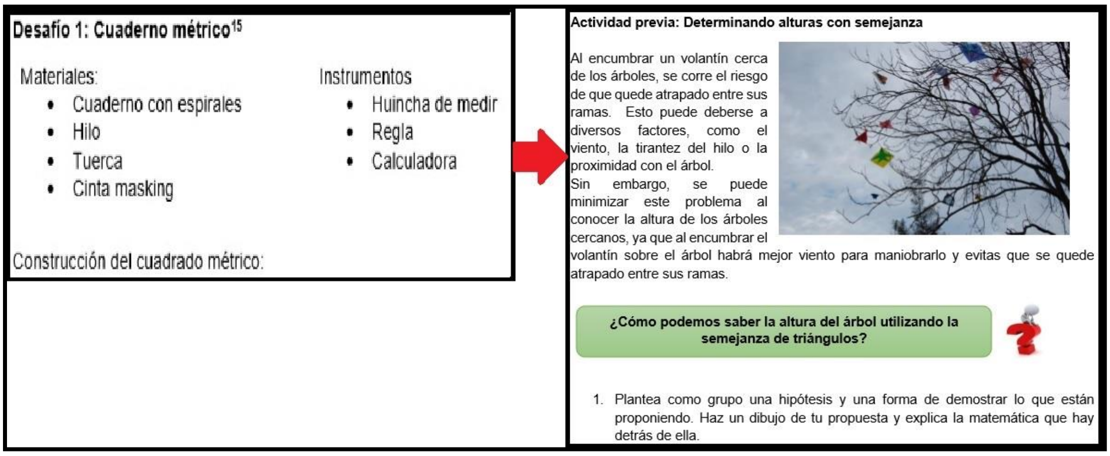



**Figura 4.11** Ejemplo de mejora de la actividad previa de los desafíos.

La última sección donde se señalan las opiniones de los validadores, fue una de las más interesante en relación a los comentarios. Consideramos mejorar la entrega de la propuesta didáctica a los validadores, cambiándola para hacer disponible el uso de una planificación de clases y unidad al momento de entregarle el material a estos, debido a que le hicimos entrega de un resumen que describía brevemente cada clase, por lo que no quedaron completamente claros los momentos que propusimos para cada clase (inicio, desarrollo, cierre). Sin embargo, pensamos que es poco relevante agregar el resumen en la propuesta didáctica final, ya que es solo un extracto poco detallado de lo ya observado en el capítulo anterior.

Por otro lado, consideramos que no quedó claro la manera en la cual se hacen consultas y retroalimentaciones con las fotos subidas a Edmodo, ya que estas son para que el docente pueda evaluar el trabajo realizado por cada grupo más a fondo o simplemente tener un respaldo de que el grupo trabajó durante la clase. Aun así, el docente cuando sube el ejercicio resuelto por un grupo a la plataforma, es para que los estudiantes tengan la posibilidad de revisarlo nuevamente. Por lo que finalmente, la retroalimentación está dada en la sala de clase cuando los grupos exponen su resultado.

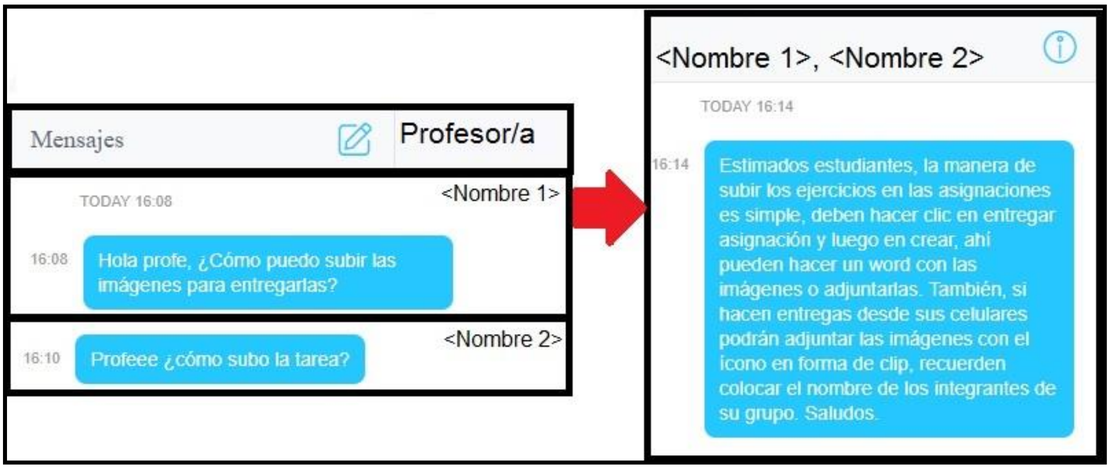



**Figura 4.12** Ejemplo de cómo el docente da respuesta a múltiples preguntas en la plataforma.

Luego, bajo el mismo parámetro del uso de la plataforma, se encuentra el comentario sobre la categorización de las preguntas realizadas en Edmodo. Consideramos que este aspecto sería un trabajo extra que se agregaría al docente además de todas las labores que tendrá que realizar durante la unidad, sin embargo, entendemos la necesidad de no volver a responder preguntas que varios estudiantes hayan realizado, En ese sentido, Edmodo da una pronta respuesta, al ser una plataforma educativa parecida a Facebook, en donde se pueden etiquetar personas para dar respuestas conjuntas cuando existan dudas parecidas (figura 4.12). Por lo que, el docente tendrá la posibilidad de juntar las preguntas que se parezcan y poder dar una sola y única respuesta en vez de tener que repetir el contenido estudiante por estudiante. Además, como esta propuesta no ha sido implementada, es complicado armar un banco de pregunta sin saber cuál son las preguntas recurrentes de los estudiantes.

Por otro lado, consideramos el cambio de los objetivos de las clases, añadimos algunos nuevos y modificamos la mayoría de los existentes (alrededor de 15 objetivos de clase fueron modificados durante este punto). Esto con el fin de que los objetivos estuvieran sincronizados con el trabajo realizado en cada clase y apuntaran hacia lo que queríamos que el estudiante lograra en ellas.

El cambio final que realizamos en la sección de opiniones fue el que los estudiantes demostraran el teorema del seno y coseno, para ello se modificó la clase 11 y la guía número 8. Inicialmente era el docente quien realizaba la demostración del teorema del seno y coseno en la clase apoyado por el material dispuestos por nosotros, por lo que la actividad fue cambiada partiendo por que la clase se realizara en la sala de computación del establecimiento, donde los estudiantes construirían el dibujo que les permitiría demostrar los teoremas usando GeoGebra, para luego anotar su hipótesis, tesis, pasos y justificación de la demostración de cada teorema. Durante este cambio no eliminamos el material de apoyo del docente, ya que consideramos que al profesor se le dificultará el realizar dos construcciones simultáneas (esto debido a que algunos estudiantes tendrán que demostrar el teorema del seno y otros el teorema del coseno), así que al utilizar los recursos GeoGebra destinados para la clase con anterioridad, podrá mostrar los pasos al abrir los dos documentos sin necesidad de realizar las dos construcciones.

Consideramos que los comentarios realizados fueron, en su mayoría, acertados y que contribuyen a realizar mejoras significativas en la propuesta didáctica, aferrándose a la metodología de clase invertida y al trabajo cooperativo que esperamos que los estudiantes realicen dentro del aula.

# Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones con respecto al desarrollo de la propuesta didáctica para la enseñanza del contenido de trigonometría, visto en segundo medio, con base en los OA 8 y OA 9 del currículum nacional vigente. Este análisis se basa principalmente en el contraste de los recursos, materiales y validaciones de la propuesta didáctica con su objetivo general y objetivos específicos planteados, en la cual se utiliza el modelo de clase invertida, por lo que se propone un estructura distinta a la clase tradicional, por lo que se hace necesario utilizar una plataforma educativa, en la que este contenga el material a utilizar en la sala de clase, como también fuera de ella, como lo son los videos, las encuestas, las guías, los desafíos, los textos y ejercicios.

### *Sobre la propuesta didáctica*

El objetivo general de este Seminario de Grado, fue el diseñar y evaluar una propuesta didáctica que se orienta bajo la metodología de clase invertida, para estudiantes de segundo año medio, aplicado a contenidos de trigonometría pertenecientes al sector de matemática. Este objetivo se subdividió en objetivos específicos para poder llevar a cabo tareas que permitieran el cumplimiento de este. El primer objetivo específico buscaba el diseño de estrategias pedagógicas para el desarrollo de los aprendizajes esperados, las cuales se crearon desde el uso del trabajo cooperativo dentro del aula, como el trabajo individual fuera del aula. Para ello, fue necesaria la incorporación de las TICs a la unidad, ya que con esta se establece otro medio de contacto inmediato con los estudiantes que se encuentra más allá del espacio de sala de clases. Por otro lado, consideramos que el tipo de trabajo cooperativo es complicado de guiar si no se tienen las nociones básicas de los grupos de cooperación existentes, los cuales se tienden a confundir con grupos de trabajo convencionales.

Se realizó la unidad didáctica de trigonometría en base a los objetivos de aprendizaje (OA 8 y 9), en donde uno de los aspectos más desafiantes fue la selección de los contenidos a ver en la unidad, ya que necesitábamos abarcar los OA, pero al mismo tiempo hicimos una selección de contenidos extra basados en los conocimientos que los estudiantes necesitan obtener para llegar a cumplirlos, además, debido a que el contenido de trigonometría se observa una sola vez dentro de la enseñanza media, encontramos imperativo realizar un seguimiento de los conocimientos previos a la unidad, los que utilizamos a nuestro favor al presentar el modelo de clase invertida desde estos contenidos, porque así el estudiante tendría tiempo para familiarizarse con el modelo desde una materia conocida. Por otro lado, al agregar el material extra que no se encuentra presente en los OA, nuestro número de clases para la unidad aumentó, quedando en 14 clases que incluyen dos evaluaciones y 11 autoevaluaciones.

En las clases se encuentra reflejada la interdisciplinaridad de la trigonometría, debido a que contextualizamos su uso en diversas ramas de la física, la ingeniería, la biología y la geodesia, que nos permitió plantear desafíos de aplicación de los contenidos (dos previos a la unidad y dos de trigonometría) y utilizar guías de trabajo que cumplieran con la contextualización de esta ejercitación. Como existe esta interdisciplina en trigonometría, el trabajo realizado tuvo que ser llevado a cabo a través de una matemática contextualizada, nuestra experiencia trabajando de esta manera fue que el contenido abordado presenta mucha más riqueza conceptual que cuando se ve descontextualizado. Ahora bien, se cumplió el objetivo de incluir el modelo de clase invertida y el uso de TICs, por ello el material estaba compuesto por elementos previos a la clase y posteriores a ella, que presentaban el reto de ser breves y de uso individual. Los textos están compuestos por conocimientos que los estudiantes podían estudiar por su cuenta de pocas páginas y que incluían una breve ejercitación, mientras que los ejercicios post clase cumplían el objetivo de ser la ejercitación individual requerida para que los estudiantes recuerden el trabajo cooperativo que realizaron durante la clase. Por último, los videos son el punto focal de nuestro trabajo con la tecnología que permitía al estudiante "poner en pausa al profesor" cuando no logre entender algún aspecto que explicaba, así como repetir la lección si quería reforzar el contenido. Con este aspecto se cumplió el objetivo de diseñar materiales (concretos y digitales) de soporte para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos y habilidades relacionados con la unidad. Por ello, también existió un material que brindara ayuda didáctica para el profesor, con el fin de orientar el uso del modelo, cumpliéndose otro de los objetivos específicos.

Al buscar una plataforma agradable para los estudiantes, llegamos a la plataforma educativa Edmodo que, como hemos dicho anteriormente es muy parecida a red social Facebook. No obstante, una de las desventajas de esta red es que los estudiantes no pueden acceder al material subido por otros estudiantes, por lo cual genera que el docente tenga otro trabajo más al tener que seleccionar los mejores ejercicios y así crear una carpeta con estos. Nuestra idea inicial era que cada estudiante pudiera crear una carpeta donde subir el trabajo de las clases, así cada estudiante podría ver el trabajo que hicieron sus compañeros y todos los trabajos quedarían a disposición de todos los demás estudiantes del curso, sin embargo, Edmodo no permite que un estudiante pueda editar de esta manera el contenido del curso. Pensamos que esto se puede solucionar si se busca una plataforma educativa que cuente con las mismas características de Edmodo pero que permita que los estudiantes creen carpetas para subir el material a las asignaciones.

Gracias a la realización de esta propuesta didáctica hemos podido reflexionar sobre nuestro rol como docente, observándonos como profesores, ya no más como estudiantes de pedagogía. Posicionarnos como docentes nos ha permitido observan la gran labor que llevaremos a cabo cada día, lo que requerirá de un estilo de trabajo diligente para la selección y creación de material. Esto nos hace considerar unirnos a una comunidad educativa, un lugar en el cual uno pueda intercambiar material con otros docentes, ya que será mucho más simple adecuar el material existente que hacerlo completamente desde el inicio. Otro aspecto relevante es que no basta con que preparemos el material para las clases, ya que existen condiciones para las cuales la propuesta didáctica puede ser implementada, como el perfil del profesor, el establecimiento educacional y el tipo de estudiantes que se tienen en la clase.

***Sobre el uso de la metodología de clase invertida***

Los videos de contenido fueron, a nuestro parecer, la parte más débil de nuestra propuesta didáctica, ya que la grabación y calidad dejan mucho que desear. Además, no contamos con un lugar específico para grabar, por lo que estuvimos constantemente regrabándolos por el ruido del entorno y la iluminación. Por otro lado, no contamos con un atril para fijar la cámara, por lo que no teníamos una posición fija para grabar, pero como mencionamos el capítulo 4, los videos son un proceso de construcción que pueden demorar unos cuantos años, hasta que uno como docente se sienta cómodo con el material grabado. Por ello no desistimos de su uso en futuras implementaciones de esta metodología.

Con respecto a la secuencia didáctica, encontramos que es un proceso de mucho trabajo plantear y crear el material para las tres etapas en la que se da una clase invertida, por lo que el docente que quiera implementar esta propuesta debe tener mucha disposición a trabajar, considerando que el modelo pedagógico invertido tiene varias ventajas, que se describimos en el capítulo 2, así como desventajas. En este mismo sentido, si un docente quiere utilizar esta propuesta en la sala de clase, debe tener un manejo básico con las TIC y debe considerar que su incorporación al aula debe ser lenta y paulatina, con el fin de lograr una buena aceptación del modelo clase invertida por parte de los estudiantes. Aunque el uso de las TIC a nivel nacional ha sido un proceso que todavía continua en construcción, consideramos que si existen docentes que se comprometan con esta labor el proceso formará parte de más establecimientos educacionales, logrando empapar cada vez más a la comunidad educativa, especialmente en el área de matemática. Este esfuerzo también requerirá de docentes informados y capacitados para poder cumplir las labores.

Al diseñar esta propuesta desde el modelo de clase invertida, aprendimos a cómo cada momento de la estructura es fundamental para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, ya que no solo existe aprendizaje dentro del aula, sino también antes y después del tiempo de clase. Elegir los contenidos fue la parte fundamental del diseño, ya que en base a ellos realizamos los materiales que, en su mayoría creamos nosotros con ayuda de múltiple literatura, por lo que pudimos notar lo fundamental de contar con fuentes de información confiables para presentar los contenidos matemáticos y adecuarlos al nivel en el que se está trabajando.

***Sobre el proceso de validación***

Al pasar estos materiales por una validación, realizamos mejoras en los aspectos técnicos de las guías y desafíos, el orden de los ejercicios, el tiempo que llevará cada clase y una mejora en el procedimiento, por lo que encontramos pertinente la gran mayoría de los comentarios realizados por los validadores y en su gran mayoría modificamos, como también agregamos material para cubrir lo pedido. No obstante, pensamos firmemente que nos hizo falta encontrar un experto en el modelo de clase invertida, ya que ambos profesores sabían qué era, pero no se manejaban completamente en el modelo, provocando que hubiera una confusión entre lo que apuntaban las guías y desafíos y lo planteado en el material de la pre clase. Además, en Chile hay solo dos establecimientos que la aplican a nivel institucional, pero ambos le dan un enfoque distinto al modelo ya que el contenido previo y posterior a la clase es poco relevante para ellos, a diferencia de nuestro caso. El no encontrar con un experto validador en clase invertida, provocó que los docentes quisieran problematizar el contenido presente antes de las clases, aspecto que nosotros no consideramos, ya que en la clase invertida se formaliza primero el contenido para luego aplicarlo y profundizarlo. Además, otro aspecto que nos dificultó la validación fue encontrar validadores que terminaran de observar la propuesta y respondieran a la encuesta dada, ya que muchos señalaban estar de acuerdo con la validación, pero al momento de tener que inscribirse en Edmodo, nunca lo hacían y terminábamos perdiendo el contacto con ellos.

A pesar de que los dos expertos que logramos conseguir para validar la propuesta no tuvieran todos los requisitos que pedíamos, sus comentarios fueron coherentes y beneficiosos para la mejora de nuestra propuesta didáctica, especialmente en aspectos como la validación de los videos, que va a continuar siendo nuestra tarea después de acabar este Seminario de Grado. Podemos decir que este proceso cumplió nuestro objetivo de validar el diseño pedagógico de clase invertida por un consejo de expertos.

Nuestro último objetivo específico era la publicación del material diseñado en comunidades docentes a nivel mundial y local, para asegurar un libre acceso a los recursos propuestos. Como todo el material utilizado se encuentra dentro del curso realizado en la plataforma Edmodo, nosotros como docentes tuvimos que agregarlo a nuestra biblioteca de recursos del sitio, por lo que cada docente que consulte los recursos allí subidos podrá acceder a ellos fácilmente desde la red educativa que se ha vuelto una verdadera comunidad docente e nivel mundial.

***Proyecciones***

Al hablar de las limitaciones de la propuesta en las secciones anteriores de la conclusión, podemos decir que estas se pueden mejorar al proyectar el trabajo a un futuro en el que se tenga más tiempo para la presentación de resultados. Algunas de las sugerencias para la mejora:

- Cambiar la plataforma educativa para que los estudiantes puedan crear carpetas, así estos estarán a disposición de todos los estudiantes y el docente no tendrá que resubir las fotos o escaneos.
- Ampliar la red de contactos docentes para obtener profesores conocedores del modelo de clase invertida que estén dispuestos a contribuir con el uso del modelo, no solo con el material creado.
- Utilizar una sala de grabación y micrófono para eliminar los ruidos y distracciones del ambiente y así mejorar la calidad de los videos.
- Probar la propuesta didáctica en establecimientos escolares.

Finalmente, respecto a los aprendizajes logrados durante nuestro proceso de Seminario de Grado, podemos decir que hemos interiorizado la labor docente de realizar el material y planear una unidad didáctica, consideramos que esta propuesta didáctica es un aporte hacia la comunidad docente, tanto para el área de trigonometría como para el modelo de clase invertida, que ha sido una metodología reciente dentro de nuestro país. En este sentido, queremos seguir trabajando para lograr mejorar los aspectos más débiles de nuestra propuesta y enriquecer los aspectos más destacados, para luego poder llevarlo a prueba y ver cómo el modelo de clase invertida puede generar un aprendizaje activo en los estudiantes, como también ver una mejora en la motivación y rendimiento.

# Referencias bibliográficas


Achútegui, A. (2014). Posibilidades didácticas del modelo Flipped Classroom en la Educación Primaria (tesis de grado). Universidad de la Rioja, España.

Adell, J. y Castañeda L. (2012). Tecnologías emergentes, ¿pedagogías emergentes? Adell, J. y Castañeda L. En *Tendencias emergentes en educación con TIC.* (pp. 13-32). Barcelona: Asociación Espiral Educación y Tecnología.

Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. 13th ed., pp. 378-455. Sergio Cervantes.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). Invitación a la didáctica de la Geometría. Madrid: Síntesis.

Army, P. D. (1991). An approach to teaching college course in trigonometry using applications and a graphing calculator. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick, NJ.

Baeza, O. y Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

Berenguer, C. (2016). Acerca de la utilidad del aula invertida o flipped classroom. En: IV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. *Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares.* España: Universidad de Alicante. Instituto de Ciencias de la Educación, pp.1466-1480.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). Flip your classroom: Reach every student in every class every day. Washington, DC: International Society for Technology in Education.

Bergmann, J. y Sams, A. (2013). Flipped Learning Model Increases Student Engagement and Performance.

Bergmann, J. y Sams, A. (2014). Flipped Learning: Maximizing Face Time. T+D. Biblioteca digital ITESM: EBSCO Business Source Premier., 68, pp. 28-31.

Bloom, B. S. y Krathwohl, D. R. (1956). Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain. NY: Longmans, Green.

Bonwell, C.C. y Eison, J.A. (1991). Active learning: Creating excitement in the classroom. Washington, DC: George Washington University, School of Education and Human Development.

Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57(4), 221-232.

Brown, S. A. (2005). The trigonometric connections: Students understanding of sine and cosine. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.

Cabero, J. y Barroso, J. (2015). Las tecnologías de la información y la comunicación: principios para su aplicación, integración y selección educativa. J. Cabero y J. Barroso (Coords.), Nuevos retos en tecnología educativa, pp. 41-67.

Cacheiro González, M. L. (2010). Recursos educativos TIC de información, colaboración y aprendizaje.

Cadoche, L. (2009). Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista: sus implicancias en el aula de Matemática. Ediciones UNL. Argentina.

Castañeda, J., Gómez, J., Llorente, E., Reyes, Y. y Yate, J. (2015). La trigonometría como herramienta para medir nuestro entorno. RECME, 1(1), pp. 690-696.

Castells, M. (2000). Aprender en la sociedad de la información. Fundación Santillana. Madrid.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 171-194.

CEPAL, (2012). El Caribe. *Comisión Económica para América Latina y el Caribe*, Santiago de Chile.

Cheuquepán, D. y Barbé, J. (2012). Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo. *Revista Ibeoamericana de Educación Matemática*, 29, pp.131-154.

Churches A. (2009). Taxonomía de Bloom para la era digital. Eduteka. Recuperado de http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital. [consultado 10 de julio 2017]

Colombia aprende. (2014). Guía del estudiante matemática, grado séptimo. Colombia. http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/plan_choco/mat7_b3_s8_est.pdf. [consultado de 28 julio 2017]

Cox, C. (2011). Currículo escolar de Chile: génesis, implementación y desarrollo. *Revue International de Education de Sevres*, 56, pp. 1-9.

Earnshaw, R. A. E. (Ed.). (2014). Virtual reality systems. Academic press.

Espinoza R., (2014). Proyecto de geometría: Semejanza de triángulos [es.slideshare.net] de: https://es.slideshare.net/CarlosRubenEspinozaYaez/proyecto-de-geometria-4to-ao-semejanza-de-tringulos [consultado de 30 mayo 2017]

Felder, R. M. y Brent, R. (2001). Effective strategies for cooperative learning. *Journal of Cooperation & Collaboration in College Teaching*, 10(2), pp. 69-75.

Fernández, E. M., Hidalgo, J. F. R. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 34(3), pp. 51-71.

Flipped Learning Network (FLN). (2014). Definition of Flipped Learning. Recuperado de http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/.

Fornons, V. y Palau, R. F. (2016). Flipped classroom en la asignatura de matemáticas de 3º de educación secundaria obligatoria. EDUTEC, *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, 55. Recuperado de http://www.edutec.es/revista

GeoGebra. (s.f). Manual de GeoGebra 5.0. Recuperado: https://wiki.geogebra.org/es/Manual

Gómez Chacón, I. M. y Lorios Matuk, E. G. (2005). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Educación Matemática, 17(1), pp. 185-190.

Hamdan, N., McKnight, P., McKnight K. y Arfstrom, K. M. (2013). A Review of Flipped Learning. Flipped Learning Network. Recuperado de:

http://www.flippedlearning.org/cms/lib07/VA01923112/Centricity/Domain/41/LitReview_FlippedLearning.pdf

Hernández, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 5 (2), pp. 26-35.

Huircán, M. y Carmona, K. (2013). Guía de Aprendizaje N°4 Geometría y trigonometría: Herramientas para resolver problemas. Chile.

Jara, I. (2013). Las políticas TIC en los sistemas educativos de América Latina: CASO CHILE. Buenos Aires: UNICEF.

Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E.J. (1999). El Aprendizaje Cooperativo en el Aula. Buenos Aires: Editorial Paidos.

Johnson, G. B. (2013). Student perceptions of the Flipped Classroom (Doctoral dissertation, University of British Columbia).

Khan Academy. (Mayo de 2017). KhanAcademy. Recuperado de: https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-modeling-with-right-triangles/a/angles-of-elevation-and-depression. [consultado 23 de mayo 2017]

Lage, M. J., Platt, G. J. y Treglia, M. (Winter, 2000). Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an Inclusive Learning Environment. *The Journal of Economic Education*, 31 (1), pp. 30-43.

Leyva, Y. E. (2010). Evaluación del Aprendizaje: Una guía práctica para profesores. Recuperado de: http://www.ses.unam.mx/curso2012/pdf/Guia_evaluacion_aprendizaje2010.pdf

Light, D. (2010). Multiple factors supporting the transition to ICT-rich learning environments: The Intel Teach Essentials Course and changing teacher practice in India, Turkey, and Chile. *International Journal of Education and Development using ICT*, 6(4), pp. 39-51.

Llopis J., (2010). Teorema del coseno o de los cosenos. [matesfacil.com] de: https://www.matesfacil.com/BAC/trigonometria/teorema/coseno/teorema-del-coseno-ejemplos-ejercicios-problemas-resueltos-aplicacion-triangulos-lados-angulo-demostracion-trigonometria.html [consultado 11 Jun 2017]

Maldonado, L., Marambio, V. y Galasso, B. (2017). Texto del estudiante Matemática 1° Medio. Chile.

Marcelo, C. (2001). Rediseño de la práctica pedagógica: factores, condiciones y procesos de cambios en los teletransformadores. Conferencia impartida en la Reunión Técnica Internacional sobre el uso de TIC en el Nivel de Formación Superior Avanzada. Sevilla, España: 6-8 de junio.

Massa, M., Romero, F. y Casals, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de la Trigonometría. *El Teorema de Pitágoras*.

Massut, M. F. (2015). Estudio de la utilización de vídeos tutoriales como recurso para las clases de matemáticas en el bachillerato con "Flipped Classroom" (tesis de doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona.

McCombs, B. L., y Whisler, J. S. (1997). The learner-centered classroom and school. San Francisco: Jossey-Bass.

MINEDUC (2015). Resultados TIMSS 2015. Estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias. Santiago, Chile.

MINEDUC (2016). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Santiago, Chile.

Montiel, G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, pp. 590-595.

Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. Quantitative reasoning and mathematical modeling: *A driver for STEM integrated education and teaching in context*, pp. 75-92.

Morales, G. y Báez, J. (2016). La experiencia del Colegio Mayor aplicando el modelo Flipped Classroom. En: *Actas del II Congreso de Flipped Classroom*. Zaragoza: Raúl Santiago Campión, pp.150-153.

New York University, NYU (2015). The Flipped Class Demystified. Recuperado de: http://www.nyu.edu/faculty/teaching-and-learning-resources/strategies-for-teaching-with-tech/flipped-classes/the-flipped-class-demystified.html

OECD (2004). The OECD principles of corporate governance. Contaduría y Administración, pp. 216.

OECD (2006a), Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006, OECD, Paris.

OECD (2016), PISA 2015 Resultados claves.

Olaizola A. (2014). La clase invertida: usar las TIC para “dar vuelta” a la clase. En: *Acta X Jornadas de Material Didáctico y Experiencias Innovadoras en Educación Superior*, Universidad de Buenos Aires, pp. 1-10.

Omatos A., (2015). Método de Julio Verne para medir alturas [mates.aomatos.com] de: http://mates.aomatos.com/372/ [consultado 22 junio 2017]

Paz, A. P., Serna, A., Ramírez, M. I., Valencia, T. y Reinoso, J. (2015). Hacia la Perspectiva de Aula Invertida (Flipped Classroom) en la Pontificia Universidad Javeriana desde una tipología de uso educativo del Sistema Lecture Capture (SLC). Conferencias LACLO, 5(1).

Pineda, I. (2016). Clase invertida (flipped classroom) ventajas y desventajas. Recuperado de: https://medium.com

Referencia de identidades trigonométricas. (2017). Khan Academy. De: https://es.khanacademy.org/math/precalculus/trig-equations-and-identities-precalc/using-trig-identities-precalc/a/trig-identity-reference [consultado 25 junio 2017]

Ruiz, M., Callejo, M. L., González, M. E., Fernández, M. (2004). Las TIC, un reto para nuevos aprendizajes. España: M.E.C. Narcea, 2004.

Salako, E., Eze, I. y Adu, E. (2013). Effects of cooperative learning on junior secondary school students' knowledge and attitudes to multicultural education concepts in social studies. Education, 133(3), pp. 303-309.

Sánchez, A. (2009). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría: empleando las TICs. EdutecNe. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*. 31. febrero 2010. http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec31/

Sánchez J. P. (2016). Flippmath 1° y 2°ESO: Dando vuelta a las matemáticas. *En: Actas del II Congreso de Flipped Classroom*. Zaragoza: Raúl Santiago Campión, pp.56-79.

Santos, M. (1996). Evaluación Educativa 2. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Sanz, M. (2015). Modificando Flipped Classroom: la versión “In-Class”. Recuperado de http://www.theflippedclassroom.es/modificando-flipped-classroom-la-version-in-class/

Sepúlveda, G., Velásquez, J., & Solabarrieta, P. (2001). Matemática Educación Media III. Chile: Santillana.

Sherard III, Wade H. (1981) Why Is Geometry a Basic Skill? Mathematics Teacher, 74, 1.

Shyu, S. y Kashyap, R. (2000). Augmented transition network as a semantic model for video data.

Schmidt, M. (1987) Cine y vídeo educativo. Madrid: MEC.

Solis, D. y Marta, S. (1981). Monografía sobre la trigonometría para la enseñanza media (Profesor de Estado). Universidad de Santiago de Chile.

Subtel, 2016. Resultados Encuesta Nacional de Acceso y Usos de Internet. Recuperado de http://www.subtel.gob.cl/wp-content/uploads/2015/04/Presentacion_Final_Sexta_Encuesta_vers_16102015.pdf.

Sullivan, M. (1997). Trigonometría y Geometría Analítica (4th ed.). México.

Sullivan, M. (2006). Álgebra y trigonometría (7th ed.). México.

Tapia, L. (2016). Mineduc publica informativo sobre incremento de las horas no lectivas. Recuperado de http://www.eligeeducar.cl/informativo-mineduc-horas-no-lectivas

Tecnológico de Monterrey. (2014). Aprendizaje Invertido. *Reporte Edu Trends*. Observatorio de Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey.

Toppo, G. (2011). Flipped classrooms take advantage of technology. USA Today, 6.

Valdemora J. G., (2013). Tema 8: Problemas métricos. [jgvaldemora.org] de: http://jgvaldemora.org/blog/matematicas/wp-content/uploads/2013/02/TEMA8_PROBLEMAS_M%C3%89TRICOS.pdf [consultado 10 Jun 2017].

Valenzuela, J. P. y Abufhele, V. (2010). Sistemas de acreditación basados en estándares en el sistema educativo: mejorando la efectividad de los servicios ATE. Asistencia Técnica Educativa: de la Intuición a la Evidencia, 131.

Villella, J. (2001). Uno, dos, tres… Geometría Otra Vez. Buenos Aires: Aique.

Von Glaserfeld, E. (1990). Introducción al constructivismo radical. En P. Watzlawick y otros, La realidad inventada, pp. 20-37. Barcelona, España: Gedisa.

Weber, K. (2005). Student’s understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journa*l, 102, 2, pp. 144-147

Zabala, S., Zabala, S. y Reyes, J. (2013). Pedagogía Informacional: Nuevo paradigma para educar en la sociedad de la información.

Zill, D., & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3rd ed.).

# Apéndice

Dentro de este apartado se muestra el material utilizado durante la propuesta didáctica, además de material adicional que se utilizó durante el trabajo expuesto en el documento. El orden seguido en el apéndice es el siguiente:

Apéndice 1: Guías de trabajo

Apéndice 2: Desafíos didácticos

Apéndice 3: Textos de trabajo

Apéndice 4: Ejercicios post clase

Apéndice 5: Evaluaciones del modelo

Apéndice 6: Rúbricas de evaluaciones

Apéndice 7: Material extra

Apéndice 8: Encuesta de validación

Además, en los documentos que se encuentran disponibles en Google Forms se encuentra el link de acceso.

## Apéndice 1: Guías de trabajo

**Apéndice 1.1: Guía 1:** Pitágoras

# **Guía 1**: Pitágoras

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 3 integrantes y desarrollen dos ejercicios de la guía que el profesor les designará.
2. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberá subir los ejercicios resueltos (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de ejercicio de la clase 1, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

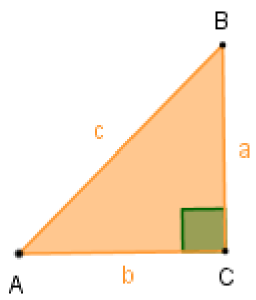
**Objetivos:**

- Aplicar el teorema de Pitágoras a problemas con contexto.
- Verificar la validez del teorema de Pitágoras, utilizando múltiples figuras geométricas

**Recuerda que**

El teorema de Pitágoras nos señala que en todo triángulo rectángulo se tiene que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa:

$$a^2 + b^2 = c^2$$




Los números naturales a, b y c que cumplen con la relación $a^2 + b^2 = c^2$ se llaman tríos pitagóricos. Ejemplo: 3, 4 y 5.

**Actividad[2]: Resuelve los siguientes ejercicios**

1. En la figura 1 siguiente, los triángulos ABC, ACD, ADE y AEF son rectángulos en los vértices B, C, D y E respectivamente. Con la información entregada en la figura, determina las longitudes de $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ y $\overline{AF}$.

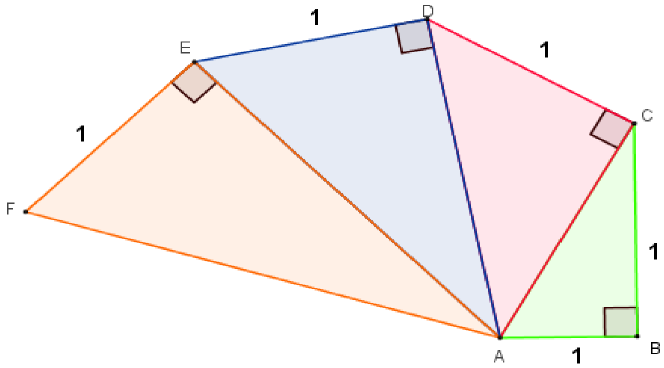



Figura 1

2. Una escalera de 4,5 metros de largo, se coloca contra una pared. La base de la escalera está a 2 metros de la pared. ¿A qué altura del suelo está la parte más alta de la escalera?

3. Si un volantín ha quedado enredado en un poste de 6 metros de altura y el niño que lo tenía ha dejado el carrete en el suelo a 50 metros de este, ¿Cuánto hilo pierde si lo corta? Haz un bosquejo con los datos

4. Observe la figura 2 y determina una expresión que permita calcular la diagonal de la caja OA

   a. ¿Cuándo mide la diagonal OA de una caja con dimensiones 3x4x7 cm?

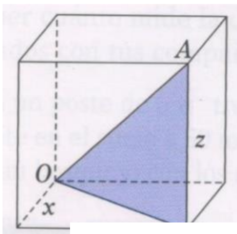



Figura 2

5. Un teleférico hace un paseo recorriendo el ancho total de una isla. Como se indica en la figura 3, partiendo desde A hacia B pasando por C. Si sabemos que los cables de la instalación forman un ángulo recto y miden 1 km y 0,8 km, ¿Cuál es el ancho de la isla?

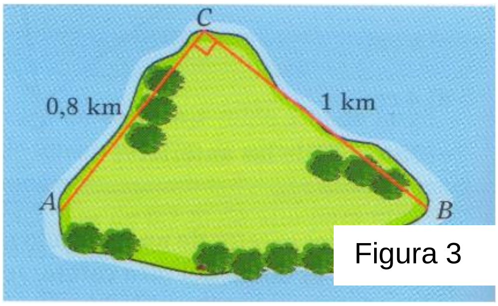



Figura 3

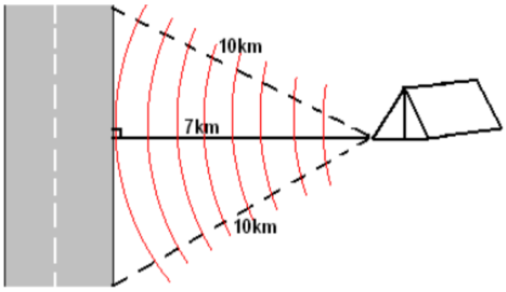
6. Para afianzar una antena de 24 m de altura se van a tender, desde su extremo superior, cuatro tirantes que se amarrarán en tierra a 10 m de la base de la antena. ¿Cuántos metros de cable se necesitan para los tirantes?

7. Una equilibrista camina por un cable tensado entre dos edificios que se encuentran a 21 metros de distancia. Al llegar a la mitad de su recorrido la

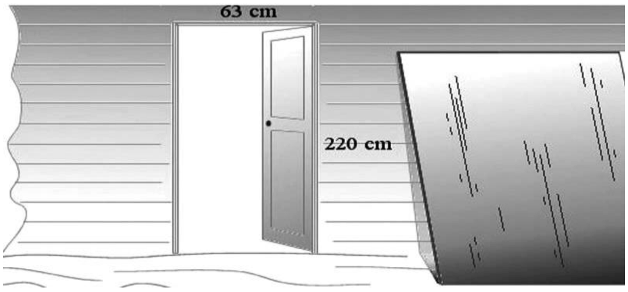
[2] Extraído de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

equilibrista se detiene y se puede observar que el cable se ha estirado y desplazado de su centro 1,5 metros hacia abajo ¿cuánto se estiró el alambre?

8. Un grupo de amigos acampa a 7 km de la carretera y tiene un equipo de radio de banda civil cuyo alcance es de 10km. Con este pretende comunicarse con los camioneros que circulan por la carretera. ¿Hasta cuántos kilómetros de carretera alcanza la onda de radio?




9. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener el lado menor de una plancha de madera para hacerla pasar por una puerta cuya altura es de 220 cm y el ancho es de 63 cm?




10. El triángulo ABC de la figura 4 es rectángulo en C. En cada uno de los lados del triángulo se construyeron semicircunferencias cuyos diámetros corresponden a las longitudes de los lados respectivos. Verifica que la suma de las áreas de las semicircunferencias I y II es igual al área de la semicircunferencia III. (Usa como radio la mitad de cada lado)

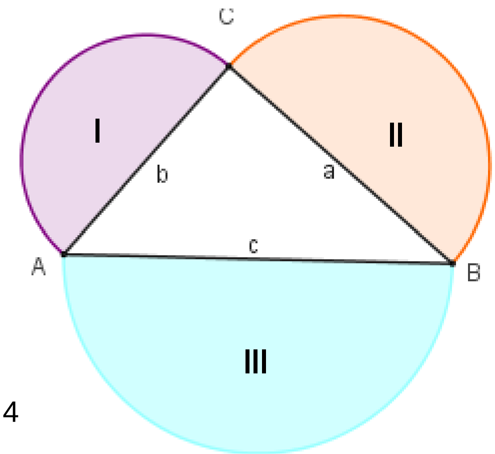



Figura 4

11. El triángulo ABC de la figura 5 es rectángulo en C. En cada uno de los lados del triángulo se construyeron triángulos equiláteros cuyos lados tiene la misma longitud del cateto o la hipotenusa sobre la que están construidos. Verifica que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros I y II es igual al área del triángulo equilátero III.

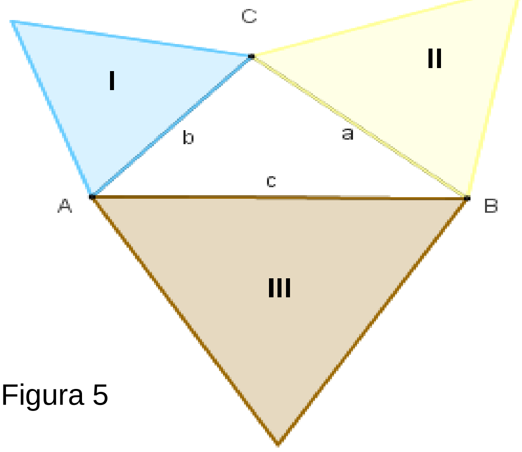



Figura 5

12. El triángulo ABC de la figura 6 es rectángulo en C. En cada uno de los lados del triángulo se construyeron hexágonos cuyos lados tiene la misma longitud del cateto sobre el que están construidos. Verifica que la suma de las áreas de los hexágonos I y II es igual al área del hexágono III.

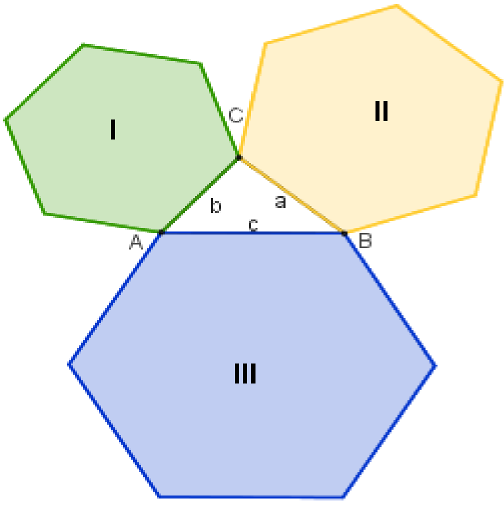
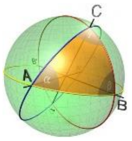



Figura 6




# **Guía 2**: Historia y tablas trigonométricas

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 3 integrantes y realiza las actividades de la guía.
2. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberá subir los ejercicios resueltos (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de ejercicio de la clase 4, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivos:**

- Identificar en una línea de tiempo los hitos más importantes de la historia de la trigonometría.
- Determinar las razones trigonométricas básicas de diversos triángulos rectángulos semejantes
- Inferir la invariabilidad de las razones trigonométricas básicas en triángulos rectángulos semejantes

**Recuerda que**

La trigonometría, del griego treis (tres), gono (ángulo) y metrón (medida), se define como el estudio de las relaciones numéricas entre los elementos que forman los triángulos.
Las razones trigonométricas son proporciones que se forman a partir de los catetos de un ángulo agudo presente en un triángulo rectángulo.
Las tres razones trigonométricas básicas son Seno, Coseno y Tangente.


**S** $\frac{O}{H}$ | **C** $\frac{A}{H}$ | **T** $\frac{O}{A}$

$sen\alpha = \frac{O}{H}$ | $cos\alpha = \frac{A}{H}$ | $tan\alpha = \frac{O}{A}$

**IMPORTANTE**: Los nombres de los catetos siempre dependen del ángulo de referencia, por lo que las razones trigonométricas siempre estarán asociadas a un ángulo.

**Actividad 1: Historia de la trigonometría**

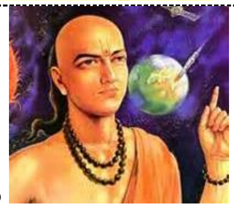
1. Realiza una línea de tiempo con las hojas de block y plumones entregados por el profesor.
2. Recorta las imágenes y los hitos que se observan a continuación.
3. Considera que las imágenes se encuentran en orden, pero los hitos históricos están desordenados.

1


2


3


4


5


6


7


Los árabes tomaron de la cultura india las razones conocidas, construyeron sus valores recíprocos y agregaron la razón tangente y su recíproca, describieron cada una de ellas y demostraron varios teoremas de trigonometría plana y esférica. **Nasir Al–Din Al–Tusi** (1207 – 1274) escribió la obra “la figura transversal”, que se convirtió en el primer estudio de la trigonometría cono ciencia matemática independiente.

**La cultura egipcia, babilónica y griega antigua** (2000 a.C.) hicieron logros anecdóticos en la trigonometría, sin embargo, no tenían una teoría matemática que les respaldase. Los descubrimientos de estas culturas se limitan a especulaciones a partir de los movimientos de los astros. Los babilonios crearon la unidad sexagesimal para la medición de ángulos, la cual fue perfeccionada por los egipcios y utilizada posteriormente por los griegos.

Durante el siglo XII aparecen por primera vez manuscritos de astronomía en Europa, donde el astrónomo y matemático **Johann Müller** (1436 – 1476), conocido como **Regiomontanus**, realiza las traducciones del Al Magesto, posteriormente publica su propia obra “De triangulis”, que consistió en cinco libros tanto de trigonometría plana como esférica.

En el siglo II a.C. el astrónomo **Hiparco de Nicéia** (190 – 120 a.C.) utilizó los conocimientos del mundo antiguo para realizar una tabla de razón trigonométrica, que se asemeja mucho a la tabla del seno que conocemos hoy en día. Entre otras creaciones Hiparco elaboró el primer catálogo celeste con más de 850 estrellas, que se utiliza hasta el día de hoy. Muchos historiadores consideran a Hiparco el fundador de la trigonometría, a pesar de solo ocuparla para la astronomía.

Durante el siglo II d.C. el alejandrino **Claudius Ptolomeo** publicó su obra “Sintaxis matemática”, en ella dio muchos ejemplos sobre cómo calcular elementos desconocidos de un triángulo a partir de elementos conocidos. La obra fue tan preciada para los árabes que la llamaron Al Magesto, que significa La gran colección.

Con la llegada del conocimiento sobre la medida de los ángulos y el movimiento de los astros a la cultura griega, **Aristarco de Samos** (310 – 230 a. C.) utilizó sin saberlo las razones trigonométricas para relacionar las distancias entre la Tierra, el Sol y la Luna.

A los finales del siglo X d. C. **Los astrónomos indios** consideraron un sistema trigonométrico, sin embargo, este no refería a proporciones, sino a longitudes a partir de valores de triángulos rectángulos dados, así construyeron los valores de las razones seno y coseno.

## Actividad 2[3]: Tablas trigonométricas

Los orígenes de lo que hoy conocemos como trigonometría aparecen en la antigüedad y se fue desarrollando gracias al aporte de numerosos cultores, con motivaciones principalmente astronómicas. Entre ellos, los pueblos más destacados los babilonios y egipcios.

Por razones religiosas y prácticas, la astronomía tenía una gran importancia en la antigüedad. La búsqueda de precisión para predecir eclipses y la construcción de calendarios eficientes llevó a una matematización y posterior sistematización de las observaciones astronómicas. Los trabajos de Aristarco de Samos, Eratóstenes, Hiparco de Nicéia y Ptolomeo, en el siglo II d.C., llevaron a la construcción de instrumentos astronómicos, catálogos de estrellas, descripción de eclipses y tablas trigonométricas (bastante minuciosas) que fueron construidas manualmente.

Pero, ¿Cómo construyeron dichas tablas?, ¿Qué patrones encontraron?, ¿Qué valores entregan las calculadoras actuales? ¿Se mantendrán constante estas razones al cambiar el tamaño del triángulo de estudio?

La siguiente actividad te permitirá buscar, y esperamos encontrar, las **regularidades** en los resultados que se producen al **calcular las razones entre las medidas de lados homólogos en triángulos rectángulos con un ángulo en común**. Este trabajo se asemeja al que matemáticos y astrónomos hicieron hace más de veinte siglos.

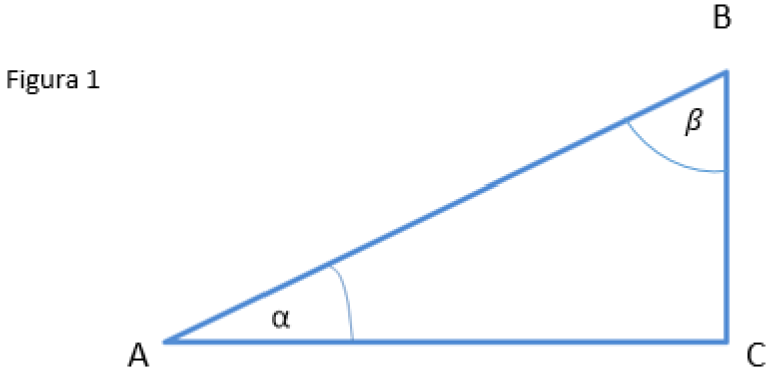
Para ello, necesitamos:

- Triángulos de goma eva
- Regla graduada en centímetros
- Transportador de 180°

Procedimiento:

1. Observa los triángulos entregados por el profesor, ubica cada triángulo **como muestra la figura 1**, de tal manera que el **ángulo recto se ubique en el vértice C**. Enumera los triángulos entregados por el profesor.

[3] Adaptado de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.




2. **Mide el ángulo alfa y beta**

$\alpha =$ ________

$\beta =$ ________

3. Con la ayuda de la regla, **mide** los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ Y $\overline{BA}$, efectuando **3 mediciones para cada triángulo**. Anota los resultados en las tablas correspondientes. Luego de efectuar las mediciones, obtenga el **promedio** de cada una, anótelas en la tabla que corresponde.

| Triángulo 1 | | | |
|---|---|---|---|
| | AC | BC | BA |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| Promedio | | | |

| Triángulo 2 | | | |
|---|---|---|---|
| | AC | BC | BA |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| Promedio | | | |

| Triángulo 3 | | | |
|---|---|---|---|
| | AC | BC | BA |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| Promedio | | | |

| Triángulo 4 | | | |
|---|---|---|---|
| | AC | BC | BA |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| Promedio | | | |

4. Calcula las **tres razones trigonométricas básicas** de cada triangulo considerando los datos medidos anteriormente. Anota los datos en la tabla, si trabaja con decimales, considere **tres cifras** significativas.

| Triángulo | $sen\ \alpha$ | $cos\ \alpha$ | $tan\ \alpha$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

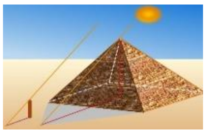
| Triángulo | $sen\ \beta$ | $cos\ \beta$ | $tan\ \beta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

5. ¿Existe alguna regularidad en los valores de las relaciones calculadas? Explique.
6. ¿De qué manera están relacionados los valores de las razones con el ángulo de estudio?
7. Utiliza la calculadora para averiguar los valores de las tres razones trigonométricas del ángulo alfa y beta, luego anótalos en la tabla, utiliza tres cifras significativas.

| Valores en calculadora | | |
|---|---|---|
| $sen\ \alpha$ | $cos\ \alpha$ | $tan\ \alpha$ |
| | | |

| Valores en calculadora | | |
|---|---|---|
| $sen\ \beta$ | $cos\ \beta$ | $tan\ \beta$ |
| | | |

8. ¿Qué relación existe entre los valores obtenidos mediante la calculadora y los obtenidos a partir de las razones? Justifica tu respuesta
9. ¿Existe alguna diferencia en las razones al cambiar el tamaño de los triángulos elegidos?
10. ¿Cuáles son las características de dichos triángulos para que se mantenga la regularidad de los valores calculados?
11. Con los resultados obtenido en los puntos 4 y 7, ¿cuáles son las igualdades trigonométricas que se producen?



# **Guía 3:** Aplicaciones trigonométricas en contexto

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 3 integrantes y realiza las actividades de la guía.
2. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos en tu cuaderno.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberá subir un ejercicio de la actividad 3 que el profesor designe al grupo (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de ejercicio de la clase 5, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivos:**

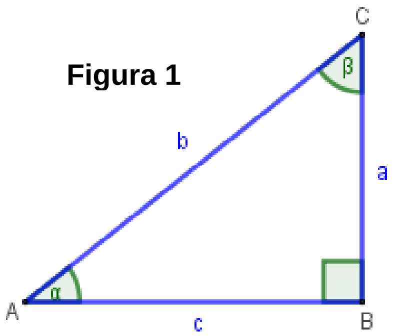
- Determinar las razones trigonométricas de los ángulos notables.
- Aplicar las razones trigonométricas, utilizando los ángulos de elevación y depresión, a problemas en contexto.

**Recuerda que**

En un triángulo ACB, rectángulo en C cuyos lados miden a, b y c, como muestra la figura 2. Recordemos que, si tomamos de dos en dos estas medidas, existen sólo seis formas posibles de establecer razones entre ellas:

$$\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{a} \quad \frac{c}{b} \quad \frac{b}{a}$$

**Figura 1**



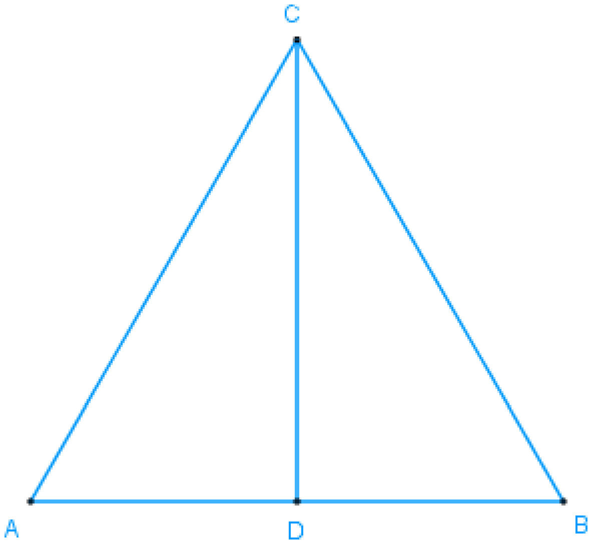

Estas razones son constantes si se mantienen fijos los ángulos α y β, no importando el tamaño del triángulo.

En la siguiente tabla se resumen las razones trigonométricas básicas para el ángulo α.

| Nombre | Definición | Valor |
|---|---|---|
| **Seno** | $\text{Sen}(\alpha) = \dfrac{\text{medida cateto opuesto}}{\text{medida hipotenusa}}$ | $\dfrac{a}{c}$ |
| **Coseno** | $\text{Cos}(\alpha) = \dfrac{\text{medida cateto adyacente}}{\text{medida hipotenusa}}$ | $\dfrac{b}{c}$ |
| **Tangente** | $\text{Tan}(\alpha) = \dfrac{\text{medida cateto opuesto}}{\text{medida cateto adyacente}}$ | $\dfrac{a}{b}$ |

**Actividad 1:**

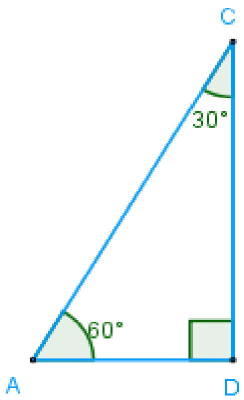
1. Considera el triángulo equilátero ABC de lados “a”, al trazar la altura del vértice C, esta intersecta al segmento $\overline{AB}$ formando el punto D, tal como muestra la figura




Cuál es el valor de…

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AD} =$ | $\overline{DB} =$ | $\overline{BC} =$ |
| $\overline{AC} =$ | $\overline{CD} =$ | $\overline{AB} =$ |
| $m(\measuredangle ACD) =$ | $m(\measuredangle CDA) =$ | $m(\measuredangle DCB) =$ |
| $m(\measuredangle CBD) =$ | $m(\measuredangle BDC) =$ | $m(\measuredangle DAC) =$ |

2. Como te habrás dado cuenta, tenemos dos triangulo rectángulos en D con los ángulos 60° y 30°, determina:

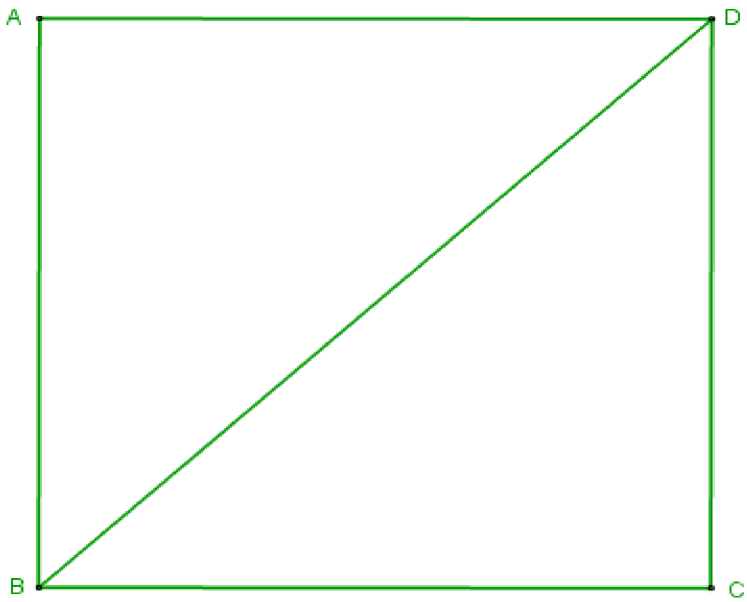



| **Razones para el ángulo 60°** | **Razones para el ángulo 30°** |
|---|---|
| $\sin 60° =$ | $\sin 30° =$ |
| $\cos 60° =$ | $\cos 30° =$ |
| $\tan 60° =$ | $\tan 30° =$ |

**IMPORTANTE:** Racionaliza las expresiones si es necesario

**Actividad 2:**

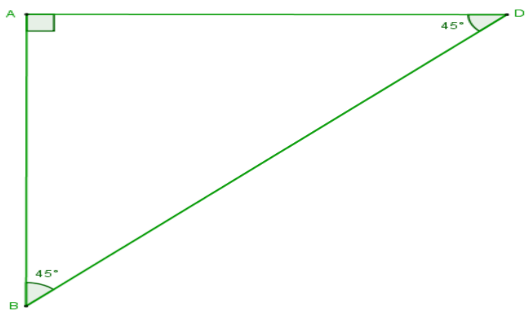
1. Considera el cuadrado ABCD de lados “a”, si trazamos la diagonal $\overline{BD}$, obtenemos lo que se muestra en la siguiente figura




Cuál es el valor de…

| | | |
|---|---|---|
| $\overline{AD} =$ | $\overline{DB} =$ | $\overline{BC} =$ |
| $\overline{BD} =$ | $\overline{DC} =$ | $\overline{AB} =$ |
| $m(\measuredangle ADB) =$ | $m(\measuredangle BDC) =$ | $m(\measuredangle DCB) =$ |
| $m(\measuredangle BAD) =$ | $m(\measuredangle ABD) =$ | $m(\measuredangle CBD) =$ |

2. Como te habrás dado cuenta, tenemos dos triangulo rectángulo isósceles, el triángulo BAD y el triángulo BCD, con ángulos rectos en A y C, respectivamente. Siendo los dos ángulos restantes de 45°, determina:




| Razones para el ángulo 45° |
|---|
| $\sin 45° =$ |
| $\cos 45° =$ |
| $\tan 45° =$ |

**IMPORTANTE:** Racionaliza las expresiones si es necesario

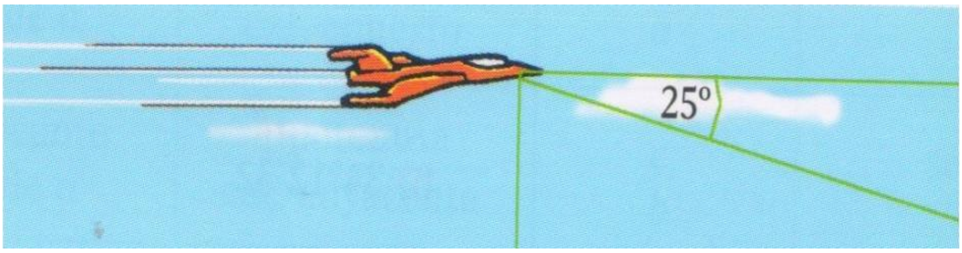
**Resumiendo:**

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| **Sen** | | | |
| **Cos** | | | |
| **Tan** | | | |

**Actividad 3[4]: Resuelvan los siguientes problemas**

1. Un volantín queda atrapado en la rama más alta de un árbol. Si el hilo del volantín forma un ángulo de 30° con el suelo y mide 8 metros (m), estima la altura a la que quedó atrapado el volantín.

2. Un avión se encuentra a 2300 metros de altura cuando comienza su descenso para aterrizar ¿Que distancia debe recorrer el avión antes de tocar la pista si baja con un ángulo de depresión de 25°?




3. El guardián del faro Trilco, ubicado en la región del Maule, observa un barco con un ángulo de depresión de 20°. El faro está a 58,2 metros sobre el nivel del mar ¿Qué distancia hay entre el guardián del faro y el barco?

4. La cima del Monte Fuji de Japón mide aproximadamente 12,400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, situado a varias millas del monte, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y la cima es de 30°. Estima la distancia del estudiante al Monte Fuji

---

[4] Extraído de:
- Sepúlveda, G., Velásquez, J., & Solabarrieta, P. (2001). Matemática Educación Media III. Chile: Santillana.
- Huircán, M., & Carmona, K. (2013). Guía de Aprendizaje N°4 Geometría y trigonometría: Herramientas para resolver problemas. Chile.

5. Un muro divisorio del jardín de una casa tiene 2 metros de alto. Para alcanzar la parte superior de éste es necesario utilizar una escalera que forme un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál deberá ser la longitud mínima de la escalera para llegar a la parte superior del muro?

6. Un estudiante que mide 1,50 metros, está observando la parte más alta de la torre Eiffel a una distancia de 66 metros de su base con un ángulo de elevación de 79°, ¿Cuál es la altura de la torre Eiffel?

7. La constructora “Pagamos bien” tiene que construir edificios en las dos aceras de una avenida de 30 m de ancho (véase figura 1). El municipio le exige que los rayos solares lleguen hasta el final de la vereda, tal que la altura del Sol sobre el horizonte sea de 40° hasta que se encuentra a 50° del ocaso, de modo que el primer piso de cada edificio tenga el máximo de rayos solares. Halla la altura máxima permitida de los edificios.

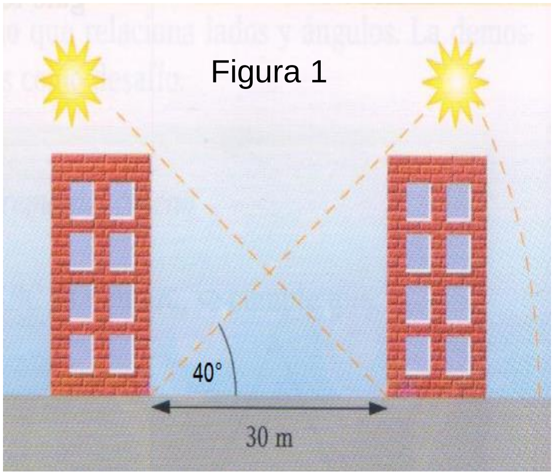


Figura 1

8. Desde lo alto de un acantilado de 1.500 m de altura los ángulos de depresión de dos embarcaciones que están situadas al sur del observador son de 25° y 85°, respectivamente. Halla la distancia entre esas embarcaciones.

9. Manuel, un astrónomo principiante, midió el ángulo que se muestra en la figura 2 para calcular la distancia que hay entre los centros de la Luna y la Tierra. Considerando que el radio de la Tierra es 6380 km ¿qué resultado obtuvo Manuel?

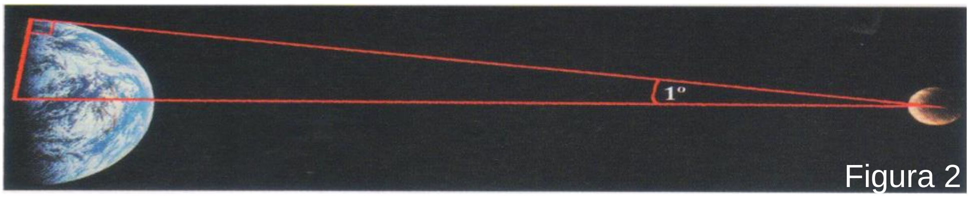
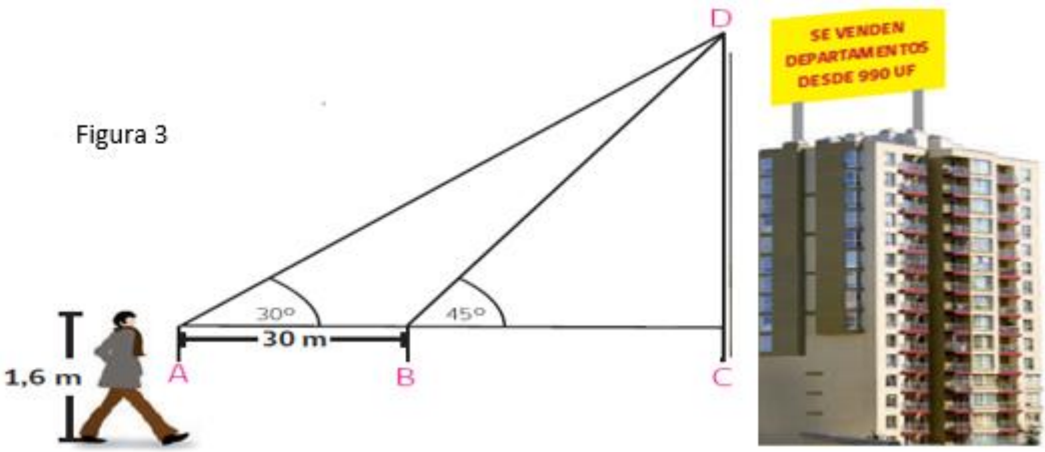


Figura 2

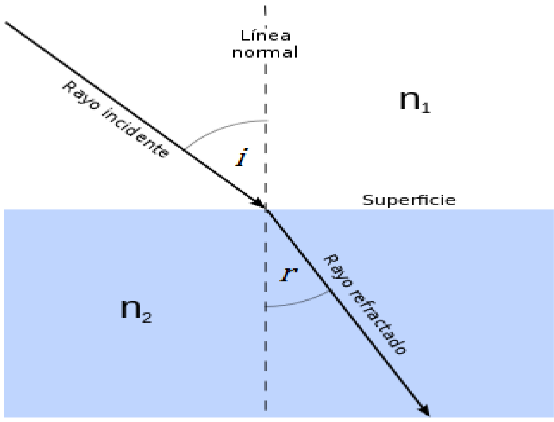
10. Una persona observa un letrero publicitario ubicado en la punta de un edificio con un ángulo de elevación de 30°. Avanza 30 metros y observa nuevamente el letrero, con un ángulo de elevación de 45°, como se muestra en la figura 3. ¿A qué altura se encuentra el letrero?

Figura 3




11. Cuando un rayo de luz pasa de un medio trasparente a otro, sufre una desviación que depende del ángulo con que incide la luz, del color de esta y de los índices de refracción de ambos medios. Este efecto óptico se ha cuantificado lográndose la siguiente relación matemática:

$$n_i \operatorname{sen} i = n_r \operatorname{sen} r$$




a. Considera un rayo de luz que pasa del aire al agua con un ángulo de incidencia de 30°. Si el índice de refracción en el aire $n_i$ es 1 y el ángulo de refracción (r) en el agua es 22,6°, calcula el índice de refracción ($n_r$) en el agua.
b. Calcula el índice de refracción de un tipo de vidrio, si un rayo de luz que pasa del aire al vidrio con un ángulo de incidencia de 30° se refracta en un ángulo de 13°.

**Apéndice 1.4: Guía 4:** Preparando la evaluación

# **Guía 4**: Preparando la evaluación

**Instrucciones:**
Esta guía te ayudará a preparar las evaluaciones que tendremos en la unidad. Cualquier duda puedes consultar a través de la plataforma (señalando el número del ejercicio) o en la clase.

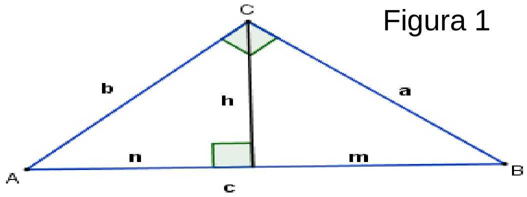
**Objetivo:** Aplicar el teorema de Euclides, Pitágoras, los criterios de semejanza de triángulos y las razones trigonométricas a diversos contextos.

## Ítem 1[5]: Teorema de Euclides y Pitágoras

1. Considerando el triángulo ABC de la figura 1, rectángulo en C y h altura respecto al vértice C, calcula lo pedido en cada caso

   a) h, a, b y c si n=10 cm y m=4 cm
   b) h, c, b y n si a=9 cm y m=7 cm
   c) a, b, n y h si c=12 cm y m=9 cm

Figura 1




2. La longitud reglamentaria de una mesa de ping-pong es de 2,74 metros. Se sabe que la diagonal es, aproximadamente, de 3,14 metros ¿Cuál es el ancho reglamentario de una mesa de ping-pong?

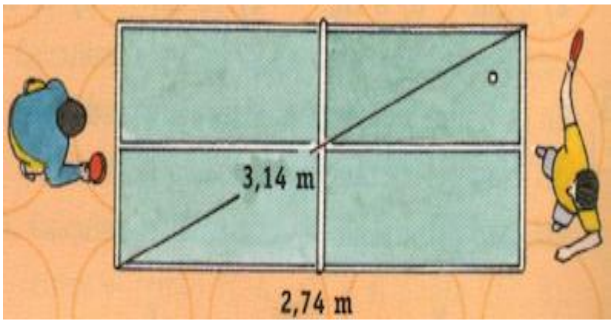



Figura 2

[5] Extraído de:
- Maldonado, L., Marambio, V., & Galasso, B. (2017). Texto del estudiante Matemática 1° Medio. Chile.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (13th ed., pp. 378-455). Sergio Cervantes.

3. Calcula el perímetro del siguiente rombo, sabiendo que sus diagonales (altura y anchura) miden 16 y 12 centímetros, respectivamente.

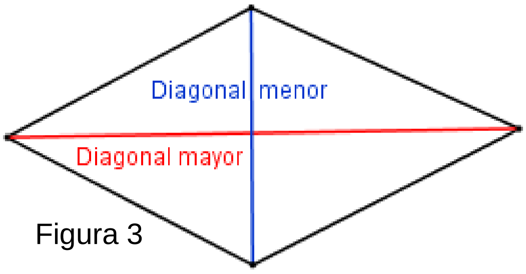



Figura 3

4. Al mostrar la parte trasera de un camión que pasa por un túnel con la forma de medio cilindro, la imagen bidimensional muestra el túnel con forma de semicírculo. El triángulo ABC está inscrito en la semicircunferencia de radio 5,5 m. ¿Cuál es la altura máxima del camión (x)?

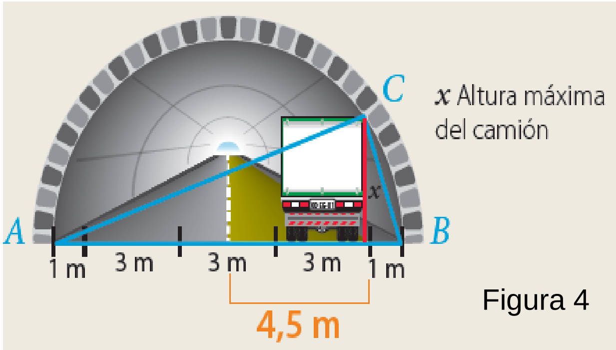


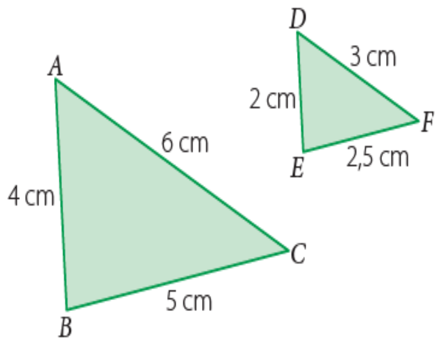

Figura 4

5. Un automóvil recorre 15 km hacia el norte, dobla hacia la derecha en ángulo recto y continúa 5 km más. Posteriormente, dobla hacia el norte y recorre otros 10 km, terminando con 14 km hacia la izquierda en ángulo recto ¿a qué distancia se encuentra del punto original?

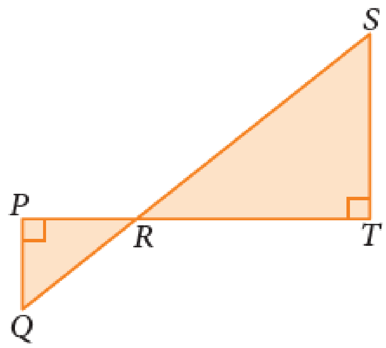
### Ítem 2: Semejanza

1. Determina qué criterio permite explicar la semejanza entre cada par de triángulos. Justifica tu respuesta.

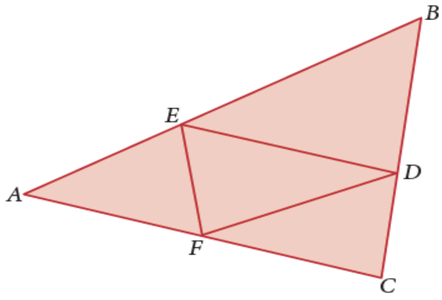
a)




b)



2. Calcula la medida de $\overline{EF}$ y la medida de $\overline{DF}$, si:




$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$AB = 12$ cm

$BC = 8$ cm

$AC = 10$ cm

$DE = 6$ cm

3. Si la persona de la imagen mide 1,6 m, ¿cuál es la altura del edificio?

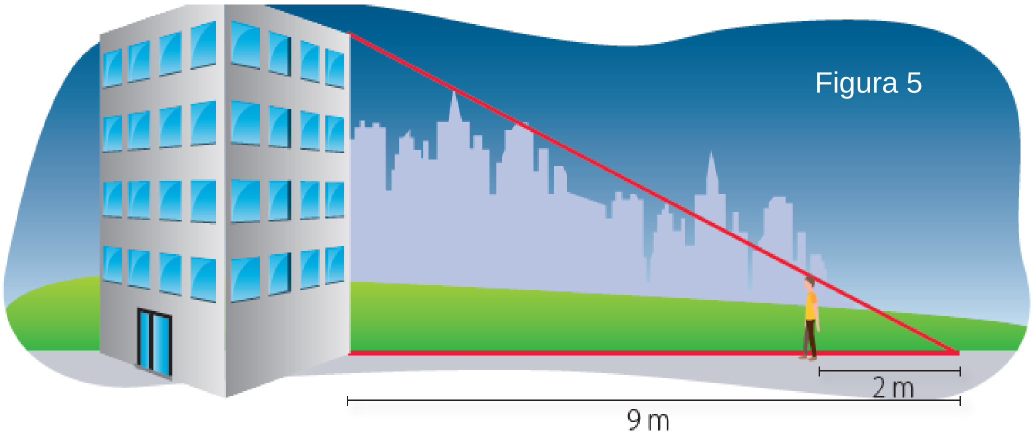
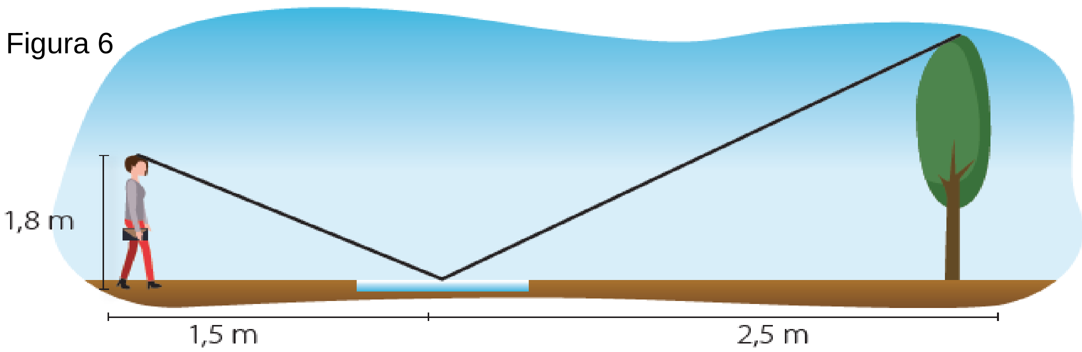



Figura 5

4. Existe un método para calcular la altura de un objeto, el cual consiste en colocar un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se refleje la parte más alta del objeto en el espejo. En la figura 6, ¿cuál es la altura del árbol?

Figura 6



## Ítem 3: Razones trigonométricas

1. La figura 7 muestra un triángulo ABC, rectángulo en B, con los datos de la figura determina:

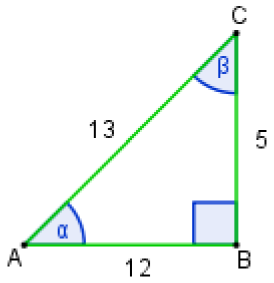



Figura 7

a. sen (α)=
b. cos (α)=
c. tan (α)=
d. cot (α)=
e. sec (α)=
f. csc (α)=
g. sen (β)=
h. cos (β)=
i. tan (β)=
j. cot (β)=
k. sec (β)=
l. csc (β)=

2. La figura 8 muestra un triángulo HIG, rectángulo en I, con los datos de la figura determina:

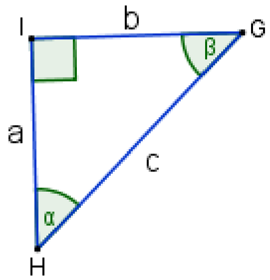



Figura 8

a. sen (α)=
b. cos (α)=
c. tan (α)=
d. cot (α)=
e. sec (α)=
f. csc (α)=
g. sen (β)=
h. cos (β)=
i. tan (β)=
j. cot (β)=
k. sec (β)=
l. csc (β)=

3. Con los resultados obtenidos en los puntos 1 y 2 anteriores, determina cuáles son las igualdades trigonométricas que se producen:

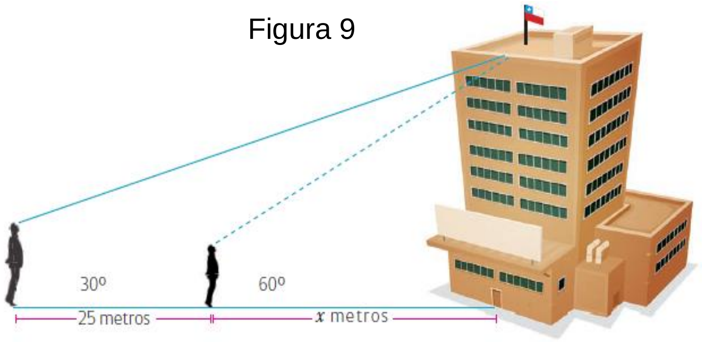
| | |
|---|---|
| sen (α) ◯ | ◯ sen (β) |
| cos (α) ◯ | ◯ cos (β) |
| tan (α) ◯ | ◯ tan (β) |
| cot (α) ◯ | ◯ cot (β) |
| sec (α) ◯ | ◯ sec (β) |
| csc (α) ◯ | ◯ csc (β) |

4. Un cable está sujeto a lo alto de una antena de radio y a un punto en el suelo horizontal que está a 40 m de la base de la antena. Si el alambre hace un ángulo de 58° con el suelo, encuentra la longitud del alambre.

5. Desde la parte alta de una torre vertical de 120 m de altura, se observa un objeto con un ángulo de depresión de 34° en el mismo plano horizontal de la base de la torre. ¿Qué tan lejos está el objeto del pie de la torre? ¿A qué distancia del observador está el objeto?

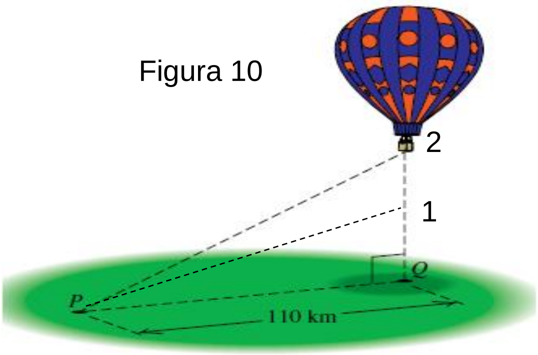
6. Una persona observa el borde superior de la cornisa de un edificio con un ángulo de elevación de 30°, luego avanza aproximadamente 25 m en línea recta hacia la entrada del edificio y observa la cornisa con un ángulo de elevación de 60°. Considerando que la vista del observador está a 1,60 m del suelo, ¿cuál es la altura aproximada del edificio?

Figura 9




7. Cuando un globo de aire caliente sube verticalmente, su ángulo de elevación, desde un punto P en el nivel del suelo a 110 kilómetros del punto Q directamente debajo del globo, cambia de 30° a 45° (como se observa la figura 10). Aproximadamente ¿Cuánto sube el globo durante este periodo?

Figura 10



**Apéndice 1.5: Guía 5:** Círculo goniométrico

# **Guía 5**: Círculo Goniométrico

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 3 integrantes y realiza las actividades de la guía.
2. En la actividad 2, exprésate de forma clara y anota todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra, dirígete al manual de GeoGebra presente en la plataforma.
4. Al terminar la clase, deberás subir una impresión de pantalla de la construcción de tu círculo goniométrico, además de la actividad 2 (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 7, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberán entregar al docente al final de la clase.

**Objetivos:**

- Construir un círculo goniométrico utilizando GeoGebra.
- Identificar los valores característicos de las razones trigonométricas utilizando el circulo goniométrico.
- Determinar el seno y coseno de un ángulo en el círculo goniométrico.

**Recuerda que**

Llamaremos círculo goniométrico a un círculo de radio uno cuyo centro está ubicado en el origen del sistema coordenado cartesiano. La figura 1 muestra un ejemplo de círculo goniométrico. El sistema cartesiano divide al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes y las enumera en sentido anti horario.
También podemos caracterizar los cuadrantes indicando la medida de los ángulos que pueden estar sobre ellos:

Primer cuadrante (I): Ángulos de 0° a 90°

Segundo cuadrante (II): Ángulos de 90° a 180°

Tercer cuadrante (III): Ángulos de 180° a 270°

Cuarto cuadrante (IV): Ángulos de 270° a 360°

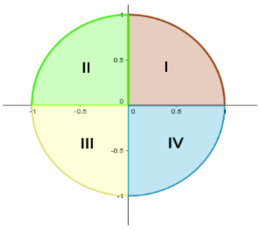


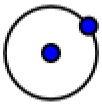
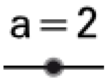
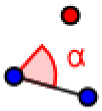
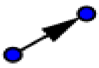
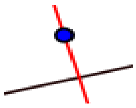
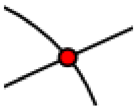
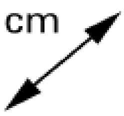
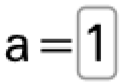

**Figura 1**

## Actividad 1: **Círculo goniométrico en GeoGebra**

Preparación

- Abre una nueva ventana en GeoGebra
- Oculta la cuadrícula haciendo clic derecho en cualquier parte de la Vista Gráfica que no contenga un Objeto Matemático y en el menú contextual selecciona cuadrícula.

Construcción

| | | |
|---|---|---|
| **1** |  | En la Barra de Herramientas selecciona **Aproximar.** Luego haz clic en la Vista Gráfica hasta que se vea el 1 y el -1 en los ejes cartesianos. Ayúdate con la herramienta **Desplaza Vista Gráfica.** |
| **2** |  | Utiliza la herramienta **Circunferencia (Centro, punto)**. El centro de la circunferencia será el origen del plano cartesiano, es decir, el punto (0,0) y el segundo punto será el (1,0). Estos puntos se llamarán A y B. |
| **3** |  | En la Barra de Herramienta selecciona **Deslizador**, luego haz clic en cualquier parte de la gráfica y va aparecer una ventana secundaria. En esta, selecciona **ángulo**, mínimo (**Mín**) igual a 0°, máximo(**Máx**) igual a 360° e **incremento** 1°, para luego presionar ok. Con esto se creará un deslizador que permite variar el ángulo al mover el punto sobre este. |
| **4** |  | Selecciona en la Barra de Herramienta **ángulo dado su amplitud**. Presiona sobre el punto B y luego en el punto A, con ello, va aparecer una ventana emergente. En ella, ingresa en **ángulo** "α", selecciona **sentido anti horario y** presiona ok. Con esto se creará el punto B´ que está sobre la circunferencia que creaste en el punto 2. |
| **5** |  | Utilizando la herramienta **vector**, une el punto A y el punto B´, formando el Vector(A,B´). |
| **6** |  | A continuación, selecciona la herramienta **Perpendicular**. Luego haz clic en el punto B´ y después en el eje x. Listo ello, haz clic en el punto B´ y después en el eje y. |
| **7** |  | Utilizando la herramienta **Intersección**, haz clic en la recta perpendicular con el eje x y en recta perpendicular con el eje y, formando los puntos C y D, respectivamente. |
| **8** |  | De la barra de herramientas selecciona **Distancia o Longitud**. Haz clic en el punto A y luego en el punto B´. Después haz clic en el punto B´ y luego en el punto C. Por último, haz clic en el punto A y luego en el punto C.<br>Con ayuda de **Elige y Mueve**, puedes colocar los textos de las longitudes en una posición que te acomode. |
| **9** |  | Selecciona la herramienta **Casilla de entrada**, haz clic sobre la parte gráfica, con ello va aparecer una ventana emergente. En **título** ingresa "α=" y en **objeto vinculado** selecciona α. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Presiona ok y aparecerá una casilla de entrada en la que puedes ingresar un ángulo entre 0° y 360°. |

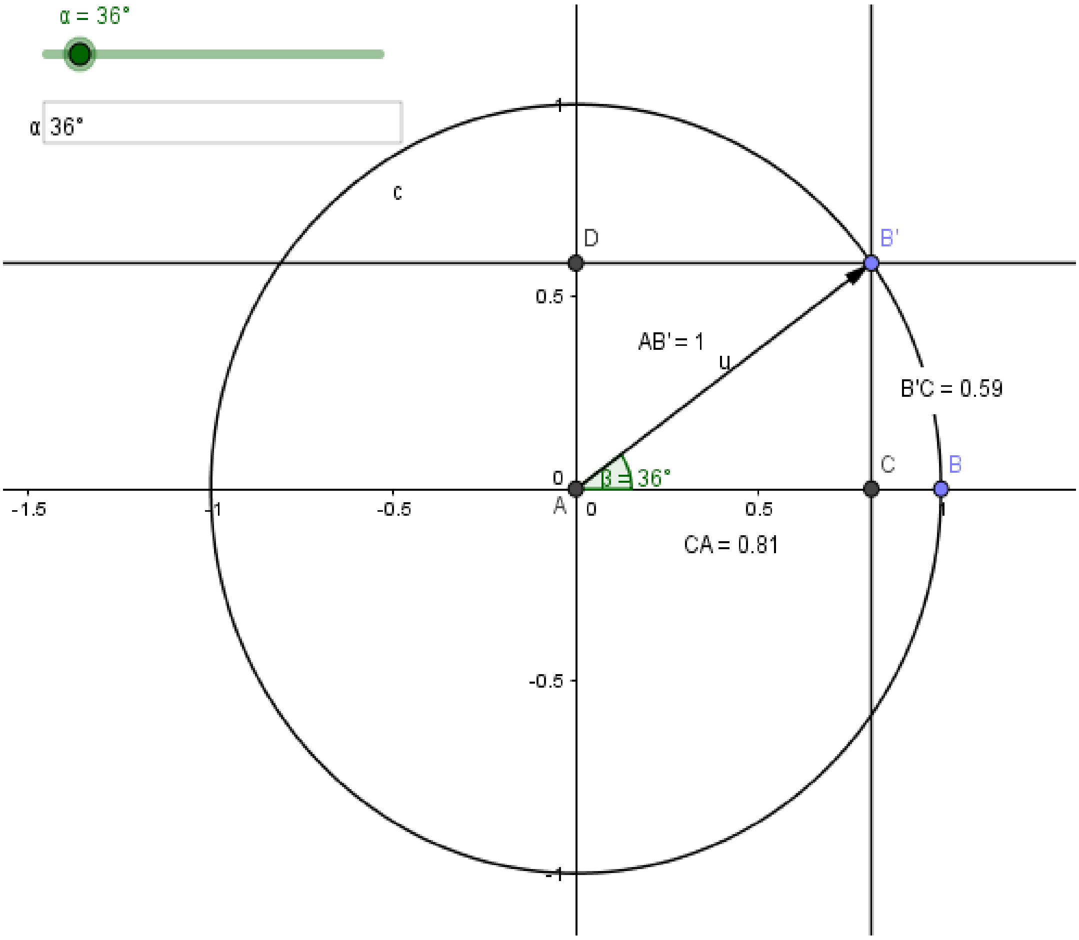
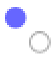



**Figura 2** “Resultado final de la construcción”

Ayudas:

- Los botones  **Deshacer** y **Rehacer** están en la esquina superior derecha.
- Para ocultar un objeto debemos hacer clic derecho sobre él y en el menú que se despliega quitamos el ticket  **Mostrar objeto.**
- Puedes insertar valor y nombre a un punto o a un ángulo haciendo clic derecho sobre ellos, luego eligen propiedades, eligen la pestaña básica y en esta seleccionan etiqueta: Nombre y valor. Si se dirigen a la pestaña color o estilo, pueden cambiar el diseño del objeto matemático.

**Actividad 2: Cálculo de algunas razones trigonométrica en el círculo goniométrico**

I. Usando el applet recién construido, determina el seno y coseno de los siguientes ángulos y escribe las coordenadas del punto P respectivo, para ello debes ingresar los valores pedido en la casilla de entrada.

1. $\alpha = 30°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
2. $\alpha = 90°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
3. $\alpha = 150°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
4. $\alpha = 180°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
5. $\alpha = 225°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
6. $\alpha = 270°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
7. $\alpha = 300°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)
8. $\alpha = 360°$ $\sin\alpha =$ ________ $\cos\alpha =$ _________ P=(______,______)

II. Responda:

1. ¿En qué cuadrante el seno es positivo y negativo?
2. ¿En qué cuadrante el coseno es positivo y negativo?
3. ¿En qué ángulo el seno es cero?
4. ¿En qué ángulo el seno es uno?
5. ¿En qué ángulo el coseno es cero?
6. ¿En qué ángulo el coseno es uno?

# **Guía 6**: Funciones trigonométricas e inversas

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

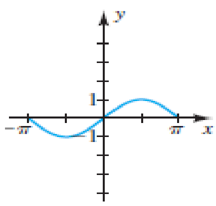
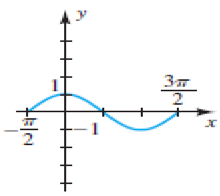
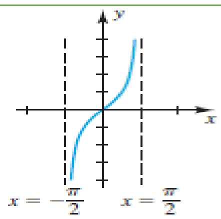
1. Formar grupos de 3 integrantes y desarrollen la guía asignada por el docente.
2. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberá subir los ejercicios resueltos (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de ejercicio de la clase 9, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivos:**

- Relacionar el circulo goniométrico con las funciones trigonométricas.
- Identificar las características de la gráfica de la función seno y coseno.
- Determinar la función trigonométrica inversa en problema en contexto.

**Recuerda que**

Diremos que una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de números reales, tal que a cada número "x" en el dominio, le corresponde un número "y" en el rango. En el caso de las funciones trigonométricas, el número x del dominio es el valor del ángulo presente en la razón trigonométrica y el número y es el valor de dicha función.

| Característica | y = sen x | y = cos x | y = tan x |
|---|---|---|---|
| Gráfica (un periodo) |  |  |  |
| Dominio | Todos los números reales | Todos los números reales | Todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ |
| Rango | Todos los números reales entre -1 y 1, incluidos ambos | Todos los números reales entre -1 y 1, incluidos ambos | Todos los números reales |

**Guía A:**

## I. Trabajando con la función seno[6]:

Ingresa al Geogebra “Función Seno”, este applet muestra cómo se obtiene el valor del seno de un ángulo. Debes tener en consideración que:

A. El punto Azul está a una distancia α (medida en grados) del centro del circulo goniométrico, el cual puedes variar moviendo el deslizador, fíjate cómo varia el segmento morado y el valor del seno de α.
B. Las coordenadas del punto morado (x, y) representan el valor de α (medido en grados) y valor de sen(α), respectivamente.

Prueba el applet con varios ángulos de los distintos cuadrantes, para luego responder las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué ángulo el valor del seno es cero?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
2. ¿Para qué ángulo el valor del seno es 1?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
3. ¿Para qué ángulo el valor del seno es -1?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
4. Si probaste con ángulos de los cuatro cuadrantes te deberías haber dado cuenta que a veces el valor del seno es negativo, tal como mostró el applet. ¿Para qué rango o intervalo de ángulos (desde ... hasta...) el valor del seno es positivo?, ¿por qué?
5. ¿Para qué rango o intervalo de ángulos el valor del seno es negativo?, ¿por qué?
6. Se dice que las funciones trigonométricas son periódicas, comprobémoslo con la función seno. Utilizando la calculadora determina el seno de los siguientes ángulos.

| Ángulo | Seno del ángulo |
|---|---|
| 30° | |
| 390° | |
| 750° | |
| 1110° | |
| 1470° | |

| Ángulo | Seno del ángulo |
|---|---|
| 1830° | |
| 2110° | |
| 2550° | |
| 2910° | |
| 3270° | |

¡Epa!, hay uno que falla. ¿Por qué? ¿Por qué ángulo debiese reemplazarse el que entrega un valor del seno distinto, para que la tabla quede uniforme?

7. La función seno oscila entre valores positivos y negativos. ¿Cuáles son los valores extremos de la función seno?, es decir, ¿cuál es su valor mínimo y máximo?

En resumen:

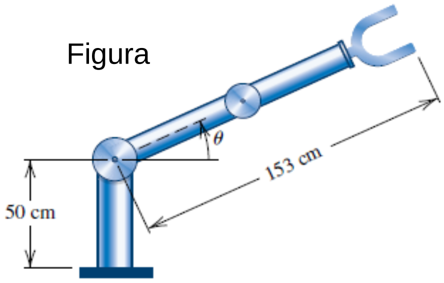
a. Los valores angulares para los que el valor del seno es **cero** son: ___________
b. Los valores **máximo** y **mínimo** de la función seno son: _____________
c. La función seno es **positiva** para ángulos que van de ______ grados hasta los ________ grados.

[6] Adaptado de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

d. La función seno es **negativa** para ángulos que van de ______ grados hasta los ________ grados.
e. La función seno cambia de signo en ______ y _______ grados.
f. Se le llama **amplitud** de la función seno a la distancia que va de cero hasta el máximo de la función. Entonces la amplitud en este caso es ______.
g. Se le llama **periodo** de la función al valor angular donde se comienzan a repetir los valores de la función trigonométrica. En este caso, el período de la función seno es de _________ grados.

## II. Aplicando las funciones trigonométricas[7]

Figura




Suponga que la articulación del hombro de un robot está motorizada de modo que el ángulo ϴ aumenta a una razón constante de 10° por segundo a partir de un ángulo inicial de ϴ = 0.

Suponga que la articulación del codo se mantiene siempre recta y que el brazo tiene una longitud constante de 153 centímetros, como se ve en la figura 1. Si h es igual 50 cm, cuando ϴ = 0, construye una tabla que enumere el ángulo ϴ y la altura h de la mano del robot en cada segundo mientras $0 \leq \theta \leq 90°$.

## III. Aplicando las funciones trigonométricas inversas[8]

Un puente levadizo mide 7.5 m de orilla a orilla, cuando se abre por completo forma un ángulo de α con la horizontal y el extremo superior del puente queda a 6 metros de altura de la orilla del puente (Véase la figura 2). Cuando el puente se cierra, el ángulo de depresión de la orilla a un punto en la superficie del agua bajo el extremo opuesto es β, estando a una distancia de 4 metros la orilla de la superficie del agua (véase figura 3). Determine el ángulo α y β

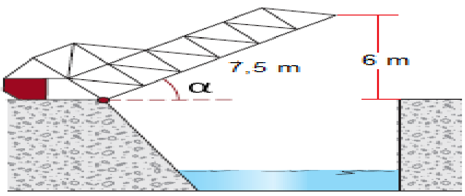



Fig. 2 Puente abierto

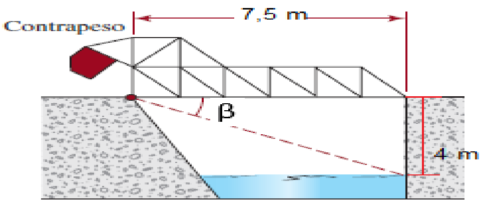



Fig. 3 Puente cerrado

[7] Extraído de: Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (13th ed., pp. 378-455). Sergio Cervantes.
[8] Adaptado de: Zill, D., & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3rd ed.).

**Guía B:**

## I. Trabajando con la función coseno[9]:

Ingresa al Geogebra “Función Coseno”, este applet muestra cómo se obtiene el valor del coseno de un ángulo. Debes tener en consideración que:

A. El punto Azul está a una distancia α (medida en grados) del centro del circulo goniométrico, el cual puedes variar moviendo el deslizador, fíjate cómo varia el segmento morado y el valor del coseno de α.
B. Las coordenadas del punto morado (x, y) representan el valor de α (medido en grados) y valor de cos(α), respectivamente.

Prueba el applet con varios ángulos de los distintos cuadrantes, para luego responder las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué ángulo el valor del coseno es cero?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
2. ¿Para qué ángulo el valor del coseno es 1?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
3. ¿Para qué ángulo el valor del coseno es -1?, ¿hay más de uno?, ¿por qué?
4. Si probaste con ángulos de los cuatro cuadrantes te deberías haber dado cuenta que a veces el valor del coseno es negativo, tal como mostró el applet. ¿Para qué rango o intervalo de ángulos (desde ... hasta...) el valor del coseno es positivo?, ¿por qué?
5. ¿Para qué rango o intervalo de ángulos el valor del coseno es negativo?, ¿por qué?
6. Se dice que las funciones trigonométricas son periódicas, comprobémoslo con la función coseno. Utilizando la calculadora determina el coseno de los siguientes ángulos.

| Ángulo | Coseno del ángulo |
|---|---|
| 30° | |
| 390° | |
| 750° | |
| 1110° | |
| 1470° | |

| Ángulo | Coseno del ángulo |
|---|---|
| 1830° | |
| 2110° | |
| 2550° | |
| 2910° | |
| 3270° | |

¡Epa!, hay uno que falla. ¿Por qué? ¿Por qué ángulo debiese reemplazarse el que entrega un valor del coseno distinto, para que la tabla quede uniforme?

7. La función coseno oscila entre valores positivos y negativos. ¿Cuáles son los valores extremos de la función coseno?, es decir, ¿cuál es su valor mínimo y máximo?

En resumen:

a. Los valores angulares para los que el valor del coseno es **cero** son: __________.
b. Los valores **máximo** y **mínimo** de la función coseno son: ____________.

[9] Adaptado de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

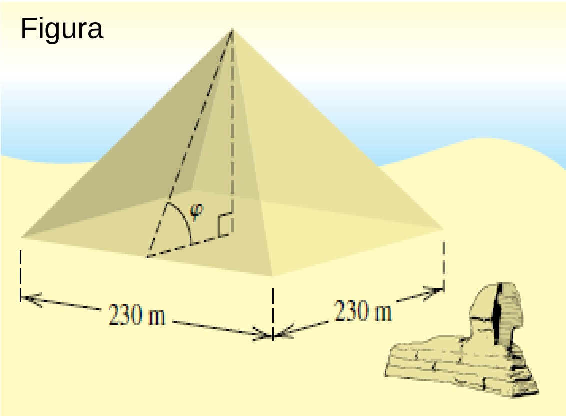
c. La función coseno es **positiva** para ángulos que van de ______ grados hasta los ________ grados.
d. La función coseno es **negativa** para ángulos que van de ______ grados hasta los ________ grados.
e. La función coseno cambia de signo en ______ y _______ grados.
f. Se le llama **amplitud** de la función coseno a la distancia que va de cero hasta el máximo de la función. Entonces la amplitud en este caso es ______ .
g. Se le llama **periodo** de la función al valor angular donde se comienzan a repetir los valores de la función trigonométrica. En este caso, el período de la función coseno es de _________ grados.

## II. Aplicando las funciones trigonométricas

El 17 de marzo de 2005 en Valdivia, Región de Los Lagos, la temperatura en grados Celsius se puede describir mediante la función $T(t) = -12\,cos\,(15t) + 16$, en tanto que la humedad relativa porcentual se puede expresar mediante $H(t) = 20\,cos\,(15t) + 60$. Donde t esta en horas t = 0 corresponde a las 6 a.m. Construir una tabla que haga una lista de la temperatura y humedad relativa cada tres horas, comenzando y terminando a media noche.

## III. Aplicando las funciones trigonométricas inversas[10]

La Gran Pirámide de Egipto mide 147 metros de altura, con una base cuadrada de 230 metros por lado (vea la figura 1). Calcule el ángulo $\varphi$ formado cuando un observador está de pie en el punto medio de uno de los lados y ve la cima de la pirámide (redondea el valor del ángulo)




[10] Extraído de: Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Décimo Segunda edición Earl W. Swokowski; Jeffery A. Cole © D.R. 2009 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

**Apéndice 1.7: Guía 7:** Identidades trigonométricas


# **Guía 7**: Identidades trigonométricas

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 3 integrantes
2. De la actividad 1 deben desarrollo dos ejercicios que les asignara el docente. En cambio, la actividad 2 y 3 las deberán realizar completa.
3. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
4. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
5. Al terminar la clase, deberá subir los ejercicios resueltos (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de ejercicio de la clase 10, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
6. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivos:**

- Demostrar las identidades trigonométricas básicas y pitagóricas.
- Comprobar igualdades a partir de las identidades trigonométricas.
- Determinar las razones trigonométricas a partir de las identidades básicas y pitagóricas.

**Recuerda que**

Una identidad trigonométrica es una relación de igualdad entre expresiones trigonométricas que son verdaderas para todas las medidas angulares para las cuales están definidas.

La manera de demostrar o verificar la identidad se logra al comenzar con un miembro de la ecuación dada (por lo común el que contiene la expresión más complicada), para llegar a otro miembro por medio de identidades fundamentales apropiadas y de manipulaciones algebraicas. La selección de la identidad fundamental apropiada para obtener el resultado deseado se aprende solo con la experiencia y mucha práctica.

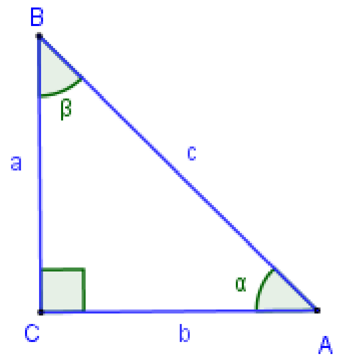
Estas identidades no deberán memorizarse sino conocerse (del mismo modo en que usted conoce su nombre en lugar de haberlo memorizado)

**Actividad 1: Vamos a demostrar**

Ejemplo:

Demostrar la identidad trigonométrica $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Hipótesis: Sea ABC un triángulo rectángulo en C, entonces se cumple que:




- $sen\ \alpha = \frac{a}{c}$
- $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$
- $tan\ \alpha = \frac{a}{b}$

Tesis: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

| PASOS | JUSTIFICACIÓN |
|---|---|
| $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$ | Por hipótesis |
| $= \frac{a}{c} * \frac{c}{b}$ | Por propiedades de división de fracciones, se invierte el denominador para multiplicar las expresiones fraccionarias |
| $= \frac{a}{c} * \frac{c}{b}$<br>$= \frac{a}{b}$ | Simplificando c en el numerador y denominador, y resolviendo. |
| $\tan\alpha$ | Por Hipótesis |

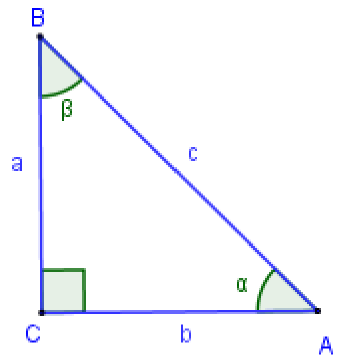
∴ Se concluye que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

## AHORA USTEDES DEBEN INTENTARLO

1. Demostrar la identidad trigonométrica $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

Hipótesis:

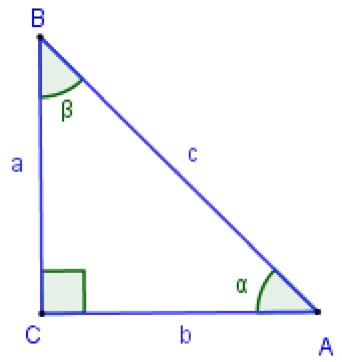
Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
| --- | --- | --- |
| | |  |

2. Demostrar la identidad trigonométrica $\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

Hipótesis:

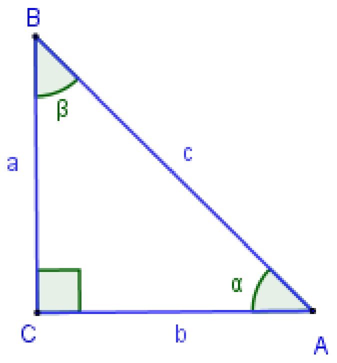
Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
| --- | --- | --- |
| | |  |

3. Demostrar la identidad trigonométrica $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

Hipótesis:

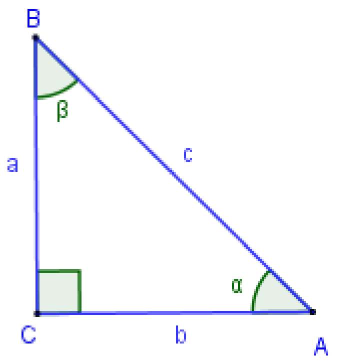
Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
|---|---|---|
| | |   |

4. Demostrar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\alpha * \csc\alpha = 1$

Hipótesis:

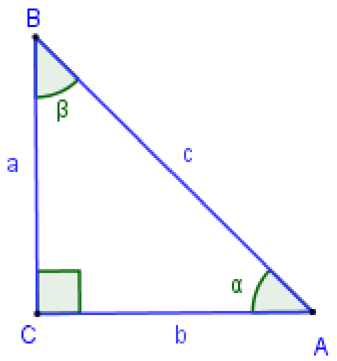
Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
|---|---|---|
| | |   |

5. Demostrar la identidad pitagórica $tan^2\,\alpha\ +\ 1 = sec^2\alpha$

Hipótesis:

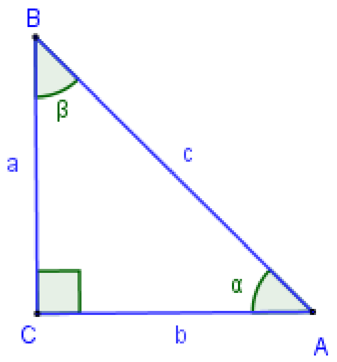
Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
|---|---|---|
| | |  |

6. Demostrar la identidad pitagórica $cot^2\,\alpha\ +\ 1 = csc^2\alpha$

Hipótesis:

Tesis:

| PASOS | JUSTIFICACION | FIGURA BASE |
|---|---|---|
| | |  |

### Actividad 2: Verificando la igualdad

La operatoria para el desarrollo de la verificación de una igualdad tiene tres variantes que uno puede ocupar para verificar:

a) **Partiendo del primer** miembro se llega al segundo por aplicación de operatoria y reemplazo de identidades.

b) **Partiendo del segundo** miembro se llega al primero por aplicación de operatoria y reemplazo de identidades
.

c) **Se opera con los dos miembros** por aplicación de la operatoria y el reemplazo de identidades hasta llegar a una igualdad evidente.

Vamos a los ejercicios…

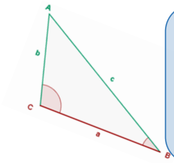
1. $\cos\theta * \tan\theta = sen\ \theta$
2. $sen\ \gamma * \sec\gamma\ = \tan\gamma$
3. $sen\ x * \tan x + \cos x = \sec x$
4. $\frac{\csc\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \cos\alpha$

### Actividad 3: Ocupando las identidades trigonométricas[11]

1. Dado que $sen\ \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ y $cos\ \theta = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, Ɵ es un ángulo agudo, encuentra el valor de las funciones trigonométricas restante de Ɵ.
2. Dado $tan\ \theta = \frac{1}{2}$, Ɵ es un ángulo agudo, encuentra el valor exacto de las funciones trigonométricas restante de Ɵ.

[11] Adaptado de: Zill, D., & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3rd ed.).

**Apéndice 1.8: Guía 8:** Aplicando el teorema del seno y coseno



# **Guía 8**: Aplicando el teorema del seno y coseno

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. La primera actividad se realiza de forma individual, en su cuaderno (esta no la tendrás que subir a la plataforma). El profesor te dará uno de los dos teoremas para que los realices.
2. Forma grupos de 3 integrantes para desarrollar la actividad 2.
3. Deben desarrollar 4 ejercicios asignado por el docente.
4. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
5. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
6. Al terminar la clase, deberás subir el desafío resuelto (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 11, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
7. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

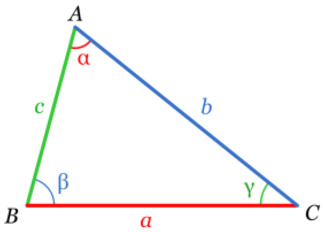
**Objetivo:**

- Demostrar el teorema del seno y coseno.
- Aplicar el teorema del seno y el teorema del coseno a diversos contextos.

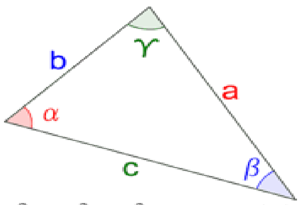
**Recuerda que:**

Los triángulos oblicuos son aquellos que no tienen ángulos interiores de 90°, por lo que no se pueden utilizar las razones trigonométricas para calcular los valores de dicho triángulo, por ello se necesitan de otros teoremas para dar con las respuestas pedidas.

El teorema del seno es una proporción realizada entre cada lado y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, estas tres relaciones son iguales entre sí. Tal como muestra la imagen.




$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Por otro lado, el teorema del coseno es una igualdad que se realiza a partir de los lados y el coseno de un triángulo, tal como se ve en la imagen adjunta.

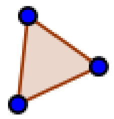
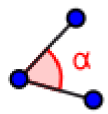
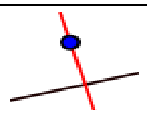
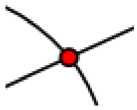
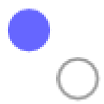
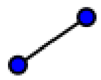
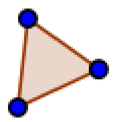
**Actividad 1: Demostrando los teoremas**

**Guía A: El teorema del seno**

Preparación

- Abre una nueva ventana en GeoGebra
- Oculta la cuadrícula haciendo clic derecho en cualquier parte de la Vista Gráfica que no contenga un Objeto Matemático y en el menú contextual selecciona cuadrícula.

Construcción

| | | |
|---|---|---|
| **1** |  | Utiliza la herramienta **Polígono** para crear un triángulo cualquiera. |
| **2** |  | Con la herramienta **Ángulo**, presiona el punto A, luego el B y por último el C, para marcar el ángulo en el vértice B. Repite el procedimiento para marcar los ángulos de los vértices A y C. |
| **3** |  | Utiliza la herramienta **Perpendicular** y selecciona uno de los vértices del triángulo (B, por ejemplo) y luego su lado opuesto. |
| **4** |  | Utilizando la herramienta **Intersección** haz clic en la recta perpendicular y luego en el lado del triángulo donde topa la recta. Esto formará el punto D. |
| **5** |  | **Oculta la recta perpendicular** haciendo clic derecho en ella, luego quita la casilla **objeto visible.** |
| **6** |  | Forma un **Segmento** con el punto del vértice escogido (B, por ejemplo) y el punto D. |
| **7** |  | Usando la herramienta **Polígono**, **crea dos triángulos**, uno con los puntos A, B (por ejemplo) y D; y el otro con los puntos C, D y B (por ejemplo). Considera que hay dos vértices que los triángulos tienen en común (así como el lado) |
| **8** | | **Calcula el seno de los dos ángulos** cuyos vértices no comparten los triángulos (en el caso del ejemplo, serían los ángulos de los vértices A y C), considera que el segmento perpendicular es el lado común, por lo que tiene la misma medida. |

¡Ahora estamos listos para demostrar el teorema del seno!

| **Hipótesis:** | **Tesis:** |
|---|---|
| | |

| **Pasos:** | **Justificación:** | **Bosquejo:** |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**Reflexiona:**

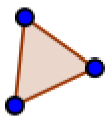
¿La igualdad será la misma si utilizamos otro vértice para realizar el cálculo?

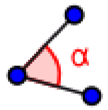
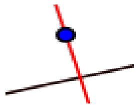
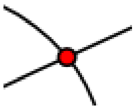
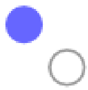
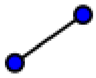
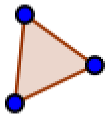
**Guía B: El teorema del coseno**

Preparación

- Abre una nueva ventana en GeoGebra
- Oculta la cuadrícula haciendo clic derecho en cualquier parte de la Vista Gráfica que no contenga un Objeto Matemático y en el menú contextual selecciona cuadrícula.

Construcción

| | | |
|---|---|---|
| **1** |  | Utiliza la herramienta **Polígono** para crear un triángulo cualquiera. |

| | | |
|---|---|---|
| **2** |  | Con la herramienta **Ángulo**, presiona el punto A, luego el B y por último el C, para marcar el ángulo en el vértice B. Repite el procedimiento para marcar los ángulos de los vértices A y C. |
| **3** |  | Utiliza la herramienta **Perpendicular** y selecciona uno de los vértices del triángulo (B, por ejemplo) y luego su lado opuesto. |
| **4** |  | Utilizando la herramienta **Intersección** haz clic en la recta perpendicular y luego en el lado del triángulo donde topa la recta. Esto formará el punto D. |
| **5** |  | **Oculta la recta perpendicular** haciendo clic derecho en ella, luego quita la casilla **objeto visible.** |
| **6** |  | Forma un **Segmento** con el punto del vértice escogido (B, por ejemplo) y el punto D. |
| **7** |  | Usando la herramienta **Polígono**, crea **dos triángulos**, uno con los puntos A, B (por ejemplo) y D; y el otro con los puntos C, D y B (por ejemplo). Considera que hay dos vértices que los triángulos tienen en común (así como el lado). |
| **8** | | Calcula el teorema de Pitágoras con cada triángulo, considera que en un triángulo el segmento que tiene en común al punto D medirá una distancia m y el otro punto medirá c - m |

¡Ahora estamos listos para demostrar el teorema del coseno!

| **Hipótesis:** | **Tesis:** |
|---|---|
| | |

| **Pasos:** | **Justificación:** | **Bosquejo:** |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**Reflexiona:**

¿La igualdad será la misma si utilizamos otro vértice para realizar el cálculo?

**Actividad 2: Resuelve los siguientes ejercicios aplicando el teorema del seno o del coseno según corresponda[12]**

1. La figura 1 es un cartel de una campaña publicitaria contra el tabaco. ¿Cuánto mide el cigarro que aparece en él?

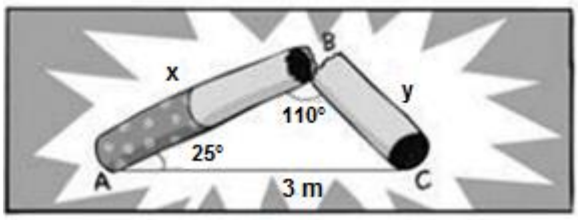



Figura 1

2. Una ambulancia está socorriendo a los heridos de un accidente de tráfico. Observa el mapa (figura 2) y señala cuál de los dos hospitales se encuentra más cerca del lugar del accidente.

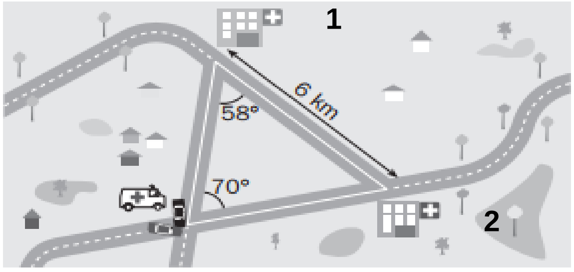
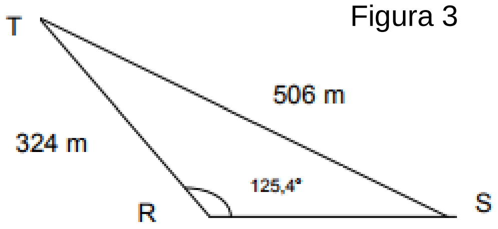



Figura 2

3. Dos corredoras entrenan a una velocidad de 9 kilómetros por hora. Llegan juntas a un cruce de caminos que forman entre sí un ángulo de 60° y cada una toma un camino. ¿Qué distancia las separará dentro de una hora?

4. Una parcela triangular con vértices R, S y T se delimita por una cerca, pero se advierte la ausencia de la marca del lindero en S. Del título de propiedad, se sabe que la distancia de T a R es 324 m, la distancia de T a S es 506 m y el ángulo en R del triángulo mide 125,4°, tal como muestra la figura 3. Determina la ubicación de S calculando la distancia de R a S.

Figura 3



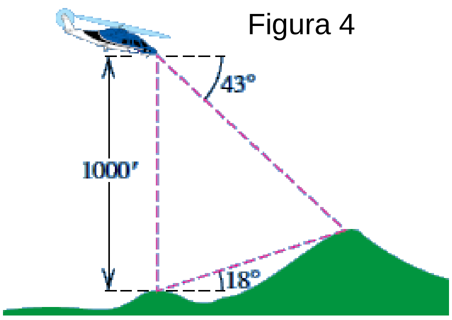

---

[12] Extraído de:

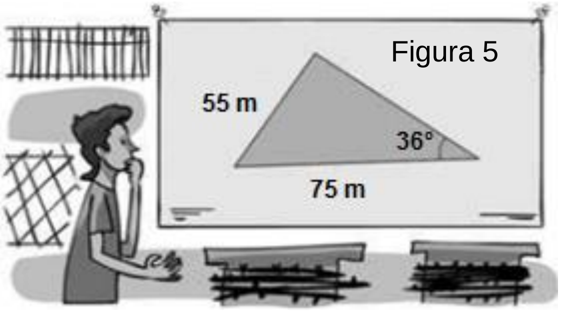
- Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (13th ed., pp. 378-455). Sergio Cervantes.Valdemora J. G., (2013). Tema 8: Problemas métricos. [jgvaldemora.org] de: http://jgvaldemora.org/blog/matematicas/wp-content/uploads/2013/02/TEMA8_PROBLEMAS_M%C3%89TRICOS.pdf [consultado 10 Jun 2017].
- Llopis J., (2010). Teorema del coseno o de los cosenos. [matesfacil.com] de: https://www.matesfacil.com/BAC/trigonometria/teorema/coseno/teorema-del-coseno-ejemplos-ejercicios-problemas-resueltos-aplicacion-triangulos-lados-angulo-demostracion-trigonometria.html [consultado 11 Jun 2017]

5. Un helicóptero permanece en posición fija a una altitud que es de 1000 pies sobre la cima de una montaña de 5210 pies, como se ve en la figura 4; una segunda cima más alta se ve desde la cima de la montaña y el helicóptero. De este último, el ángulo de depresión es 43° y desde la cima de la montaña el ángulo de elevación es 18°.
   a. Calcule la distancia de cima a cima.
   b. Calcule la altitud de la cima más alta.

Figura 4




6. Álvaro tiene que vallar una parcela triangular. Fíjate en el croquis que ha hecho con las medidas de la parcela (figura 5) ¿Tiene suficientes datos para calcular los metros exactos de alambrada que va a necesitar? Justifica tu respuesta.




7. Carlos y Felipe deciden competir en carreras alrededor de un parque. El parque tiene forma de triángulo con vértices A, B y C, ángulos α = 57° y γ = 76° y lados AC = 52 m y AB = 45 m. Carlos parte del vértice A y Felipe parte del vértice B. La meta para ambos es el vértice C, pero cada uno debe pasar por el vértice del cual partió el otro antes de dirigirse hacia C. Si los dos corren a la misma velocidad y salen al mismo tiempo, ¿cuál de los dos amigos ganará la competición?

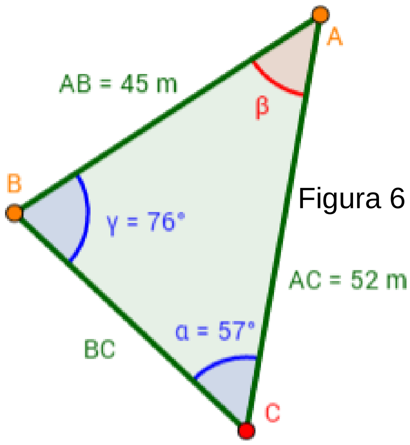



Figura 6

8. Carlos y Pedrito salen con sus motos al mismo tiempo desde un cruce de carreteras que forman un ángulo de 55°. Carlos circula a 80 kilómetros por hora, y Pedrito lo hace a 90 kilómetros por hora. ¿Qué distancia le separará al cabo de media hora?

9. Cuando en la sucursal bancaria de la figura 7 suena una alarma, la señal se recibe en las dos comisarías más cercanas. Los policías de la comisaría "A" acuden al banco a una velocidad de 90 kilómetros por hora, y los de la comisaría "B" lo hacen a 100 kilómetros por hora. ¿Qué policías llegarán primero?

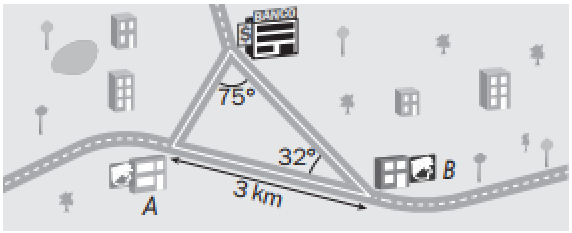


Figura 7

10. Diseño de un avión caza a reacción, que se muestra en la figura 8, es un plano para la parte superior del ala de este avión.
    a. Calcule el ángulo φ
    b. Calcule el área del triángulo ABC.

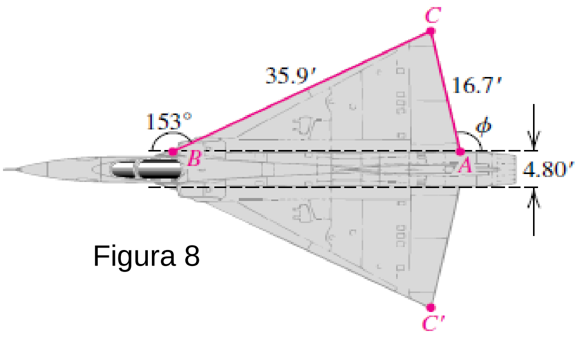


Figura 8

11. Observa las distancias señaladas en el mapa de la figura 9 y calcula la distancia que separa la cueva del tesoro.

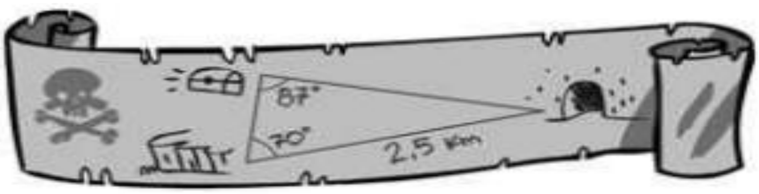
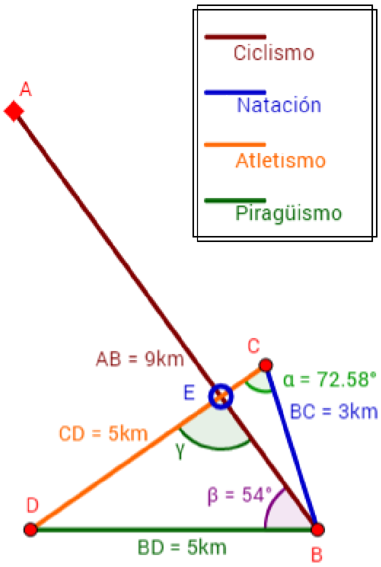


Figura 9

12. El trayecto de un cuadriatlón (competición deportiva de cuatro disciplinas) está trazado entre cinco puntos (o vértices): A, B, C, D y E. El tramo AB son 9 km de ciclismo, el tramo BC son 3 km de natación, el tramo CD son 5 km de atletismo y el tramo BD son 5 km de piragüismo. En el vértice E hay una parada para tomar agua, la distancia entre los vértices C y E es de 0.95km y los ángulos α y β miden 72.58° y 54° respectivamente.




Calcula:

a. ¿Cuál es la distancia del tramo EB y del tramo DE?
b. ¿Cuál es la distancia del inicio a la parada para tomar agua (tramo AE)?
c. ¿Cuál es el valor del ángulo γ?

**Apéndice 1.9: Guía 9:** Preparando la evaluación

# **Guía 9:** Preparando la evaluación

**Instrucciones:**

Esta guía te ayudará a preparar las evaluaciones que tendremos en la unidad. Cualquier duda puedes consultar a través de la plataforma (señalando el número del ejercicio) o en la clase.

**Objetivo:** Aplicar las razones trigonométricas, las identidades trigonométricas, las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas, y el teorema del seno y coseno.

## Ítem 1: Las razones trigonométricas[13]

1. El kiosco de diarios del señor Matias, ubicado en la calle Manuel Montt con Caupolicán, en la ciudad de Temuco, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60°, ¿cuál es la altura del kiosco?

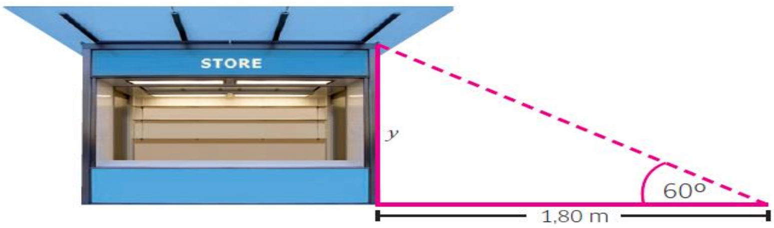


Figura 1

2. Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1,5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de 58° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

3. Un motosierrista debe talar un viejo canelo, para que no caiga con el viento y bloque el camino o se desplome encima de las casas aledañas. Para dirigir su caída debe estimar su altura, ubicándose aproximadamente a 51 metros del pie del árbol. Desde el punto de ubicación, el motosierrista mira la parte superior del árbol con un ángulo de elevación de 30°. La estatura del motosierrista es de 1,8 m aproximadamente. Con estos datos ayúdele a estimar la altura del canelo.

---

[13] Extraído de:
- Huircán, M., & Carmona, K. (2013). Guía de Aprendizaje N°4 Geometría y trigonometría: Herramientas para resolver problemas. Chile.
- Swokowski, E., & Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica (13th ed., pp. 378-455). Sergio Cervantes.

4. Un avión viaja en dirección Este con una rapidez crucero de 500 km/h. Durante el vuelo sopla el viento con dirección Sur a 100 km/h.
    a. Haz un bosquejo de la situación.
    b. ¿Con que velocidad relativa se desplaza el avión?
    c. ¿Cuál es el ángulo de desviación producto del viento?

5. En la figura 2 se muestra parte de un diseño para un tobogán acuático. Encuentre la longitud total del tobogán al pie más cercano.

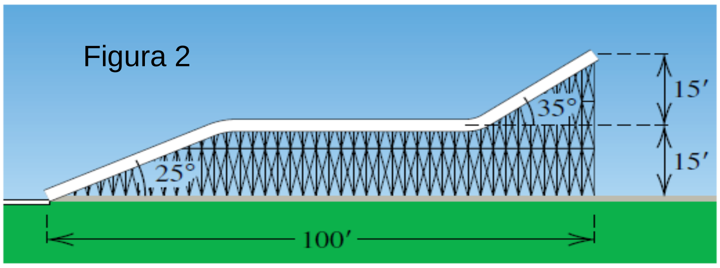


Figura 2

6. Dos personas ubicadas en los puntos A y B esperan subir al globo aerostático que se encuentra en el aire con otro pasajero, como se muestra en figura 3, si la distancia que separa a ambas personas es de 100 metros y los ángulos de elevación son 60° y 30°, respectivamente, calcula la altura a la cual se encuentra el globo.

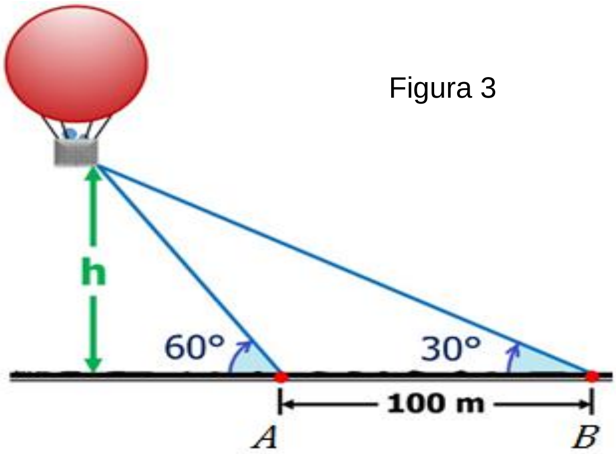


Figura 3

7. Un globo aerostático está situado a 3000 pies sobre el nivel del mar. Hay dos barcos estacionados en el mar. El tripulante del globo mide un ángulo de depresión hacia el primer barco de 40° y otro de 25° hacia el segundo barco. ¿Cuál es la distancia entre los dos barcos?

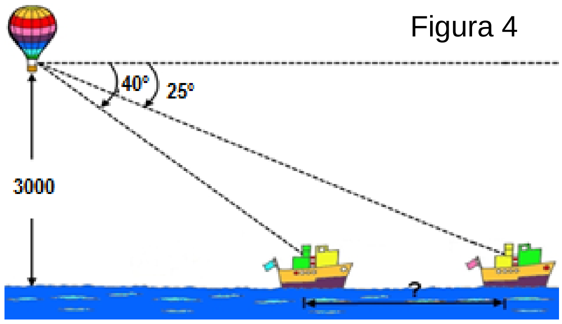


Figura 4

8. Un puente levadizo mide 150 pies de largo cuando se tiende de un lado a otro de un río. Como se ve en la figura, las dos secciones del puente se pueden girar hacia arriba un ángulo de 35°.

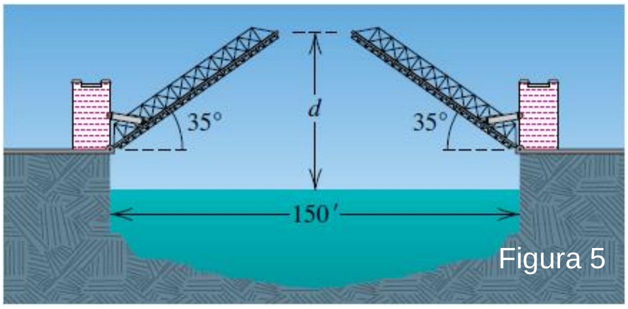


Figura 5

   a) Si el nivel del agua está 15 pies abajo del puente cerrado, encuentre la distancia d entre el extremo de una sección y el nivel del agua cuando el puente está abierto por completo.
   b) ¿Cuál es la separación aproximada de los extremos de las dos secciones cuando el puente está abierto por completo?

**Ítem 2: Funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas[14]**

1. Un faro de 66 metros de altura observa un velero aproximarse a la orilla, si la distancia que separa al velero de la base del faro (d) es de 85 metros, calcula el ángulo de depresión con el que el faro observa al velero.

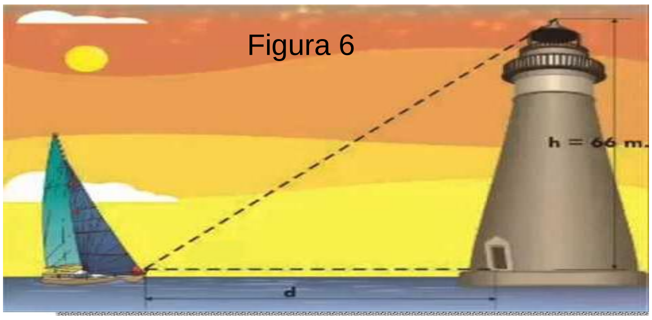


Figura 6

2. En la construcción de caminos se debe dar una cierta inclinación a las curvas (peralte) para minimizar la acción de la fuerza centrífuga sobre los automóviles. El ángulo óptimo para lograr este objetivo está dado por:

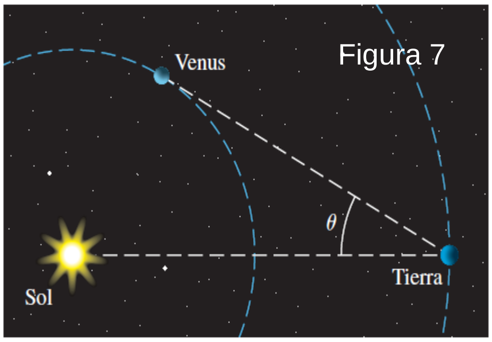
$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

v: Velocidad del vehículo
R: es el radio de la curva
g: Aceleración de gravedad

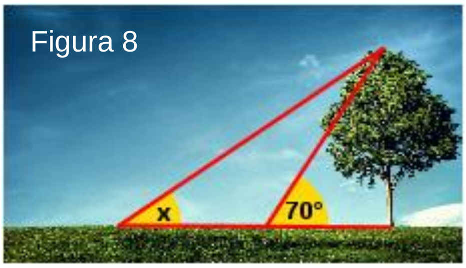
   a. De acuerdo con esto calcula qué ángulo de inclinación que deberá tener una curva de radio 8 m donde la velocidad promedio es de 70 km/h. Recuerda hacer un cambio de unidad de km/h a m/s.
   b. Si la misma curva la toma un automóvil a 100 km/h, ¿cuánto debe medir el ángulo del peralte? ¿Será posible una curva en la carretera con ese peralte?

- [14] Adaptado de: Sepúlveda, G., Velásquez, J., & Solabarrieta, P. (2001). Matemática Educación Media III. Chile: Santillana.

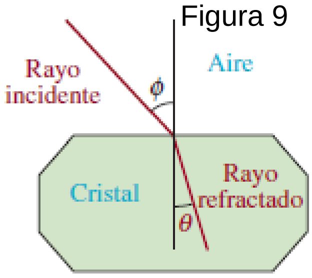
3. La elongación del planeta Venus se define como el ángulo $\theta$ determinado por el Sol, la Tierra y Venus, como se muestra en la figura 7. La máxima elongación de Venus ocurre cuando la Tierra está en su mínima distancia $D_t$ del Sol y Venus está en su máxima distancia $D_v$ del Sol. Si $D_t$= 91.500.000 millas y $D_v$= 68.000.000 millas, calcule la máxima elongación $\theta_{máx}$ de Venus. Suponga que la órbita de Venus es circular.




4. Al colocarse a cierta distancia del pie de un árbol, se ve la punta del árbol con un ángulo de elevación de 70° ¿Bajo qué ángulo se verá el árbol al alejarse el triple de la distancia inicial?




5. Un rayo de luz pasa de un medio (como el aire) a otro (como un cristal). Sean ∅ el ángulo de incidencia y Ɵ el ángulo de refracción. Como se ve en la figura 9, esos ángulos se miden respecto de una línea vertical. De acuerdo con la ley de Snell, hay una c constante, que depende de los dos medios, tal que $\frac{sen\ \emptyset}{sen\ \theta} = c$. Suponga que cuando la luz pasa de aire a un cristal, por lo cual c = 1.437. Si a las dies de la mañana el ángulo de incidencia es de 45° y a medio dia el ángulo de incidencia es de 15°, ¿Cuánto vario el ángulo refractado en el cristal?

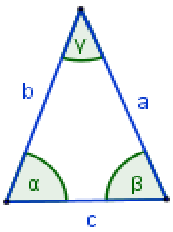



**Ítem 3: El teorema del seno y coseno[15]**

1. En el triángulo de la figura 10 resuelve y entrega los valores de los lados y ángulos que faltan.

a. α=50°; b=12; c=10
b. β=120°; a=8; c=10
c. γ=70°; b=6; c=10

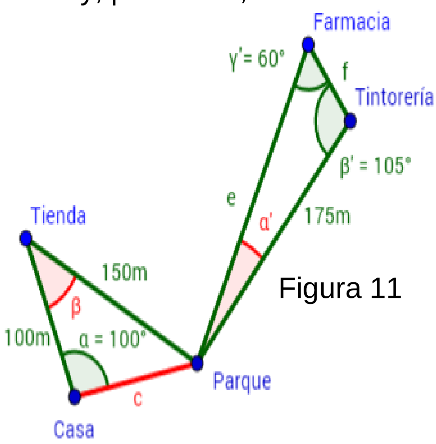
Figura 10



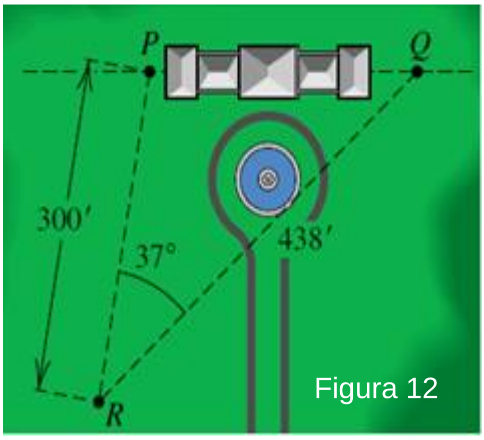

2. ¿Cuál es el perímetro y el área de un triángulo isósceles cuyo ángulo no basal mide 30° y su base mide 25 cm?

[15] Extraído de: Llopis J., (2010). Teorema del seno o de los senos. [matesfacil.com] de: https://www.matesfacil.com/BAC/trigonometria/teorema/seno/teorema-del-seno-ejemplos-ejercicios-problemas-resueltos-aplicacion-triangulos-lado-angulo.html [consultado 30 Jun 2017]

3. Los lunes, miércoles y viernes, Alejandro hace un recorrido en el cual parte de su casa. Primero va a la tienda, luego a la tintorería y, por último, a la farmacia para después regresar a su casa. El recorrido empieza y termina en su casa y sólo pasa una vez por los otros tres lugares (**elige el camino más corto**). Sabemos que hay un parque en medio de los cuatro lugares mencionados. De la casa a la tienda, hay una distancia de 100 metros; de la tienda al parque, 150 metros; y de la farmacia a la tintorería, 175 metros. Si los ángulos α, β' y γ' miden 100°, 105° y 60° respectivamente, ¿cuántos metros en total camina Alejandro a la semana?




4. Dos puntos P y Q al nivel del terreno están en lados opuestos de un edificio. Para hallar la distancia entre los puntos, un topógrafo selecciona un punto R que está a 300 pies de P y a 438 de Q y luego determina que el ángulo PRQ mide 37° (vea la figura 12). Calcule la distancia entre P y Q.




**Ítem 4: Las identidades trigonométricas,**

1. Demuestra las siguientes igualdades

   a. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cot x * \cos x$
   b. $sen\ x * \tan x + \cos x = \sec x$
   c. $sen\ \alpha * \csc \alpha = 1$

2. Utilizando las identidades trigonométricas, determina:

   a. Dado $tan\ \theta = \frac{3}{4}$, ϴ es un ángulo agudo, encuentra el valor exacto de las funciones trigonométricas restante de ϴ.

## Apéndice 2: Desafíos didácticos

**Apéndice 2.1: Desafío 1:** Aplicando a Euclides

# **Desafío 1**: Aplicando a Euclides

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 5 integrantes.
2.Exprésate de forma clara, anotando todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberás subir el desafío resuelto (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 2, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivo:**

- Diseñar una estrategia de resolución de una situación propuesta.
- Determinar la altura de objetos por medio del teorema de Euclides.
- Analizar situaciones en las que se pueda aplicar el teorema de Euclides.

**Sabías que**

Euclides fue un matemático y geómetra griego (325 a. C. – 265 a. C.). Se le conoce como "El Padre de la Geometría". De su vida solo se conoce que vivió en Alejandría (ciudad al norte de Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Ciertos autores árabes barajan tres hipótesis sobre quien fue Euclides:

- Euclides fue un matemático histórico que escribió los Elementos y otras obras atribuidas a él.
- Euclides fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría. Todos ellos contribuyeron a escribir las obras completas de Euclides, incluso firmando los libros con el nombre de Euclides después de su muerte.
- Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría quienes tomaron el nombre Euclides del personaje histórico Euclides de Mégara, que había vivido unos cien años antes.

Reflexiona:

*¿Quién fue Euclides?*

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

**Sosteniendo el poste**

En ciertos lugares de las carreteras, los postes de la luz no se pueden anclar excavando un hoyo de gran profundidad, por lo cual para anclarlo se utilizan cables que sostengan al poste (como se ve en la imagen).

Los ingenieros que realizan esta labor utilizan la menor cantidad de cable posible para abaratar costos de construcción, de tal manera de que se forme un ángulo de 90° entre los dos cables.

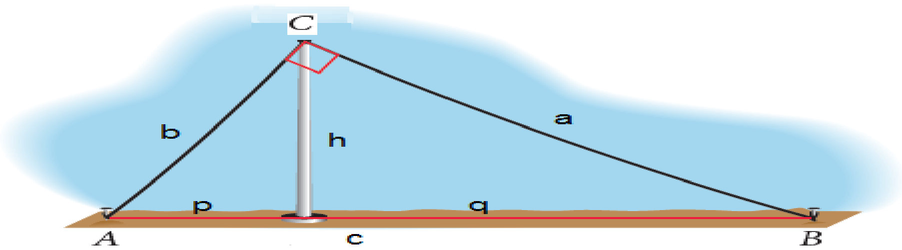
**¿Cómo podríamos el mínimo de cable que necesitamos para colocar de pie el poste?**

1. Plantea como grupo una hipótesis y una forma de demostrar lo que están proponiendo. Haz un dibujo de tu propuesta y explica la matemática que hay detrás de ella.

**Te propongo lo siguiente:**

Utilizando una plumavit, chinches e hilo, intenta poner de pie el palo de maqueta (en un ángulo de 90°) y optimizando la cantidad de hilo NO se puede enterrar el palo de maqueta en la plumavit, solo puedes utilizar los materiales enunciados anteriormente.

2. Traza una línea horizontal a lo largo de la plumavit
3. Sobre esta ubica los chinches y el palo de maqueta
4. Cuando hayan puesto de pie el palo de maqueta, verifica que el ángulo que se forma entre los cables es de 90°.
5. Guíate con la figura 1, para designar los nombres de cada lado de tu maqueta.



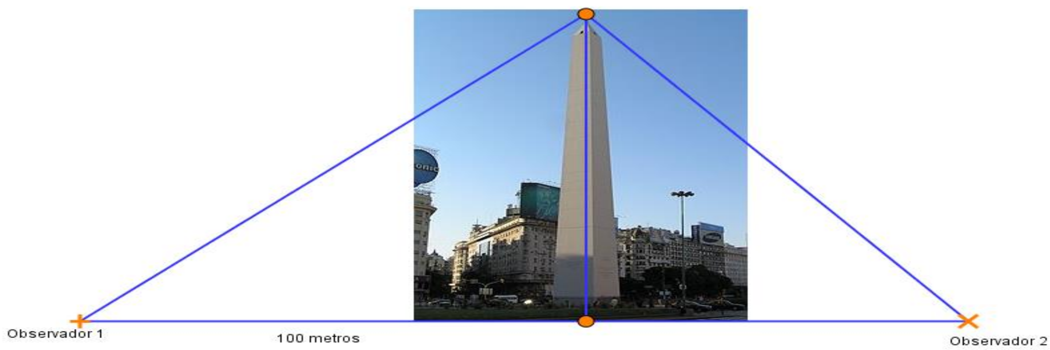

6. Busca la medida en la que tengas la menor cantidad de hilo y que en C se forme un ángulo de 90°

7. Mide el largo del palo de maqueta (h) y la distancia desde el palo hasta los chiches ¿Cuánto hilo necesitas para colocar de pie al poste?
8. Comprueba tus resultados, tomando las medidas de los lados.
9. ¿Qué pasaría si variamos el largo del palo de maqueta? Pon aprueba tu idea cortando el palo de maqueta entregado por el docente.
10. Si no supiéramos el largo del palo de maqueta, pero si el largo de cada hilo y la distancia entre el punto A y el punto B, ¿Cómo podríamos determinar la altura del palo de maqueta?

**Aplicando lo aprendido: El obelisco de Buenos Aires**[16]

La ciudad de Buenos Aires tiene símbolos que la hacen conocida en el mundo. Uno de ellos es el Obelisco, que se ubica en el cruce de las Avenidas Corrientes y 9 de Julio. Con una altura de casi 67 metros y 7 por 7 metros de base, se erige en la Plaza de la Republica, en pleno centro porteño, desde el año 1936. Simboliza las dos fundaciones de Buenos Aires y el izamiento por primera vez de la bandera nacional. Fue obra del arquitecto argentino Alberto Prebish. Son numerosos los obeliscos levantados en épocas remotas que perduran emplazados en distintas ciudades del mundo, pero los más famosos, tanto por su importancia histórica como por sus líneas, apenas superan la media docena. En Egipto, por ejemplo, los obeliscos eran principalmente de carácter religioso y estaban formados de un solo bloque de piedra

Supón que un observador 1 se encuentra a 100 metros del pilar central en la base del Obelisco estando en uno de los extremos de la Plaza de la República. En el otro extremo se encuentra un segundo observador que está en línea con la base del obelisco y el primer observador. Al mirar ambos observadores la punta del obelisco se forma un ángulo recto, ¿a qué distancia debería está el observador 2?




[16] Extraído de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

**Apéndice 2.2: Desafío 2:** Aplicando semejanza

# **Desafío 2:** Aplicando semejanza

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 5 integrantes.
2. El docente te designara un desafío que debes resolver con tu grupo
3. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
3. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
4. Al terminar la clase, deberás subir el desafío resuelto (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 3, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
5. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

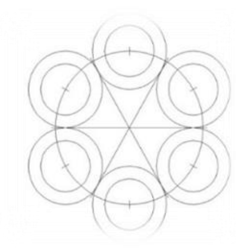
**Objetivo:** Resolver problemas relacionados con la altura de un objeto por medio de los criterios de semejanza.

**Sabías que…**

Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque es muy probable que si lo estuviesen.
La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza.

**Reflexiona:**

*¿Por qué todas las circunferencias son semejantes?*



________________________________________
________________________________________
________________________________________
________________________________________

**Actividad previa: Determinando alturas con semejanza**

Al encumbrar un volantín cerca de los árboles, se corre el riesgo de que quede atrapado entre sus ramas. Esto puede deberse a diversos factores, como el viento, la tirantez del hilo o la proximidad con el árbol.
Sin embargo, se puede minimizar este problema al conocer la altura de los árboles cercanos, ya que al encumbrar el volantín sobre el árbol habrá mejor viento para maniobrarlo y evitas que se quede atrapado entre sus ramas.

**¿Cómo podemos saber la altura del árbol utilizando la semejanza de triángulos?**

1. Plantea como grupo una hipótesis y una forma de demostrar lo que están proponiendo. Haz un dibujo de tu propuesta y explica la matemática que hay detrás de ella.

**Desafío 1: Cuaderno métrico[17]**

Materiales:
- Cuaderno con espirales
- Hilo
- Tuerca
- Cinta masking

Instrumentos
- Huincha de medir
- Regla
- Calculadora

Construcción del cuadrado métrico:
1. Amarra el hilo a la tuerca
2. El extremo libre del hilo, pásalo entre medio de los espirales de cuaderno (por lo menos 5 espirales) y amárralo a este.
3. Fija la regla con cinta masking a la tapa del cuaderno (guíate por la figura 1).

[17] Adaptado de: Espinoza R., (2014). Proyecto de geometría: Semejanza de triángulos [es.slideshare.net] de: https://es.slideshare.net/CarlosRubenEspinozaYaez/proyecto-de-geometria-4to-ao-semejanza-de-tringulos [consultado 30 mayo 2017]

Procedimiento:

1. Escoge un edificio o poste ubicado en un lugar de fácil acceso a su base para poder hacer las mediciones necesarias.
2. Observa a través de la espiral la parte alta del poste elegido. Asegúrate que la arista contraria al contrapeso siempre se encuentre en la misma línea, tal como indica la figura 2.
3. Mide el dato tomado con la regla, a este le llamaremos R.

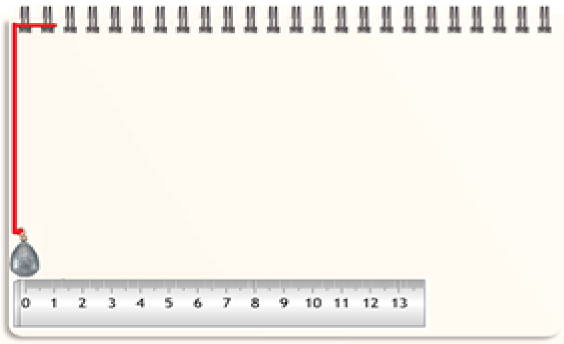
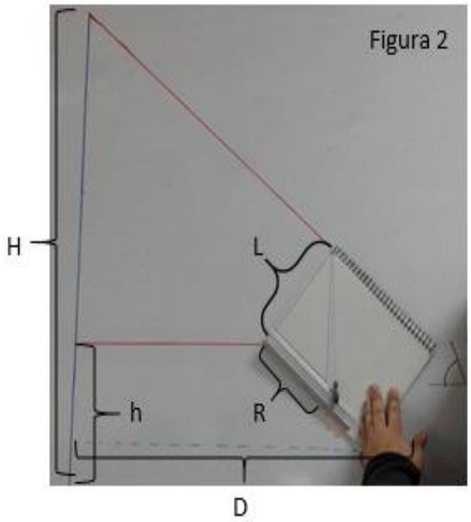



Figura 1: cuadrado para medir alturas

4. Realiza tres mediciones del valor de R (deben ser realizadas por la misma persona)




5. Mide la distancia desde el objeto hacia la persona, a esta la llamaremos D.
6. Mide la altura de tu compañero desde el suelo hasta los ojos, le llamaremos h.
7. Mide el ancho del cuaderno desde la regla hasta los espirales del cuaderno. Este valor lo llamaremos L.
8. El triángulo pequeño formado en el cuaderno con respecto al triángulo de la figura 2, ¿Cómo están relacionados?
9. ¿Qué criterio de semejanza aplica en estos dos triángulos?
10. Sabiendo que son semejantes ambos triángulos. Determina la altura H, armando una proporción entre sus lados.

**Desafío 2: Método del ingeniero[18]**

Julio Verne describió en su novela “La isla misteriosa” una forma de medir objetos de gran altura:

> – Hoy vamos a medir la altura del acantilado de Vista Lejana – dijo el ingeniero.
> – ¿Necesitamos algunos instrumentos? – preguntó Gebert.
> – No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.
> El joven, caminó desde el acantilado hasta la orilla. Cogió un jalón[19] de 12 pies de longitud, el ingeniero comprobó la medida con su estatura, la cual conocía bien. Gebert entregó una plomada[20] al ingeniero; ésta no era más que una piedra atada al extremo de una cuerda. Situándose a 500 pies del

[18] Extraído de: Omatos A., (2015). Método de Julio Verne para medir alturas [mates.aomatos.com] de: http://mates.aomatos.com/372/ [consultado 22 junio 2017]

[19] Jalón es una varilla que se utiliza para realizar mediciones topográficas.

[20] Plomada es Instrumento, formado por una pesa de metal colgada de una cuerda, que sirve para señalar la línea vertical.

acantilado vertical, el ingeniero clavó el jalón verticalmente en la arena, con la ayuda de la plomada, enterrándola a dos pies de profundidad. Luego se alejó del jalón, hasta que tumbándose en el suelo pudo ver el extremo saliente del jalón y la cresta del acantilado en línea recta (Figura 3). Marcó este punto con una estaca.

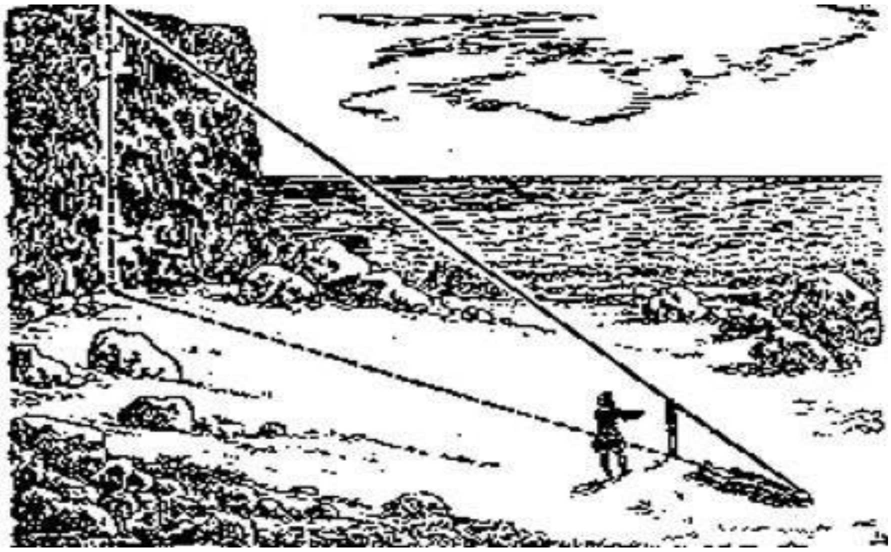


*Figura 3. Cómo encontraron la altura de un acantilado los personajes de Julio Verne*

Procedimiento:

1. Conociendo el método del ingeniero, elige un edificio del establecimiento ubicado en un lugar de fácil acceso a su base.
2. Mide la altura de tu compañero que realizará las mediciones, desde el ojo hasta los pies. Este mismo compañero es quien se acostará en el suelo para ser el observador, tal como muestra la figura 4.
3. Utiliza una varilla u otro instrumento alargado para colocarlo en los pies de tu compañero. La persona acostada debe observar que la punta de la varilla (punto A) coincida con la punta del edifico elegido (punto C).
4. Mide la varilla (L) y la distancia de la varilla al edificio (B) (figura 4)

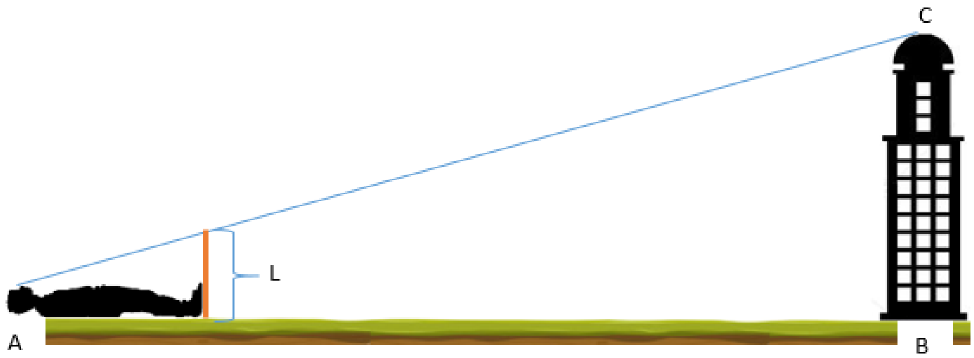



*Figura 4. El método del ingeniero.*

5. ¿Cómo se relacionan los triángulos formados por la persona con la varilla y el triángulo ABC?
6. ¿Qué criterio de semejanza aplica en estos dos triángulos?
7. Sabiendo que ambos triángulos son semejantes, determina la altura del edificio (BC)

# **Desafío 3:** Midiendo alturas

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 5 integrantes
2. El docente te designara un desafío que debes resolver con tu grupo
3. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
4. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
5. Al terminar la clase, deberás subir el desafío resuelto (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 6, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
6. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivos:**

- Resolver problemas utilizando un instrumento de medición de ángulos
- Determinar la altura de un edificio utilizando los ángulos de elevación o de depresión.

**Sabías que…**

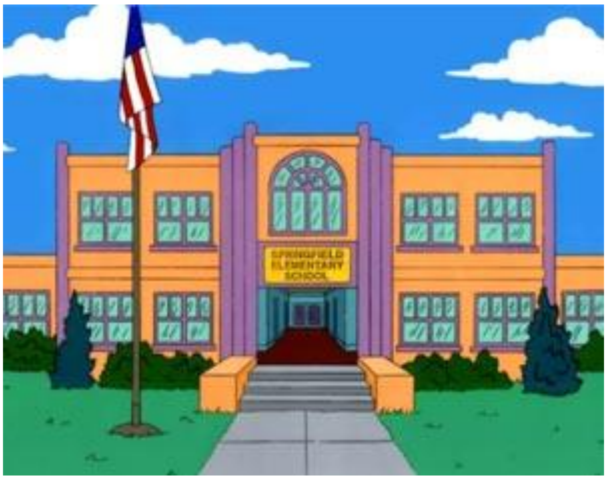
Se cree que las primeras aplicaciones de la trigonometría provienen de la navegación, la astronomía y la geodesia (una ciencia que busca determinar la figura y magnitud del globo terrestre y construir mapas con ese conocimiento). En todas estas ciencias, el problema común era determinar una distancia que no podía ser medida directamente, como la distancia entre la Tierra y la Luna. Más tarde, se comenzó a utilizar para calcular distancias o alturas observables a simple vista, por ejemplo, determinar la altura de una edificación cercana o lejana.

**Reflexiona:**

*¿Cómo podrías determinar la altura de un edificio sin medirlo directamente?*

________________________________________
________________________________________
________________________________________
________________________________________
________________________________________

**Actividad previa:**



Te has preguntado **¿cuánto miden los edificios que están en el establecimiento escolar?**
**¿A qué altura está el aro de básquetbol?**
**¿Qué tan alto es el arco de fútbol?**
**¿Cuánto mide un póster de luz?**
**¿Qué altura tienen las escaleras del colegio?**

Son cuestionamientos que quizás no te has hecho, pero te invito a que escojas una de ellas y te plantees cómo podríamos determinar la altura de este objeto.

1. Plantea como grupo una hipótesis y una forma de demostrar lo que están proponiendo. Haz un dibujo de tu propuesta y explica la matemática que hay detrás de ella.

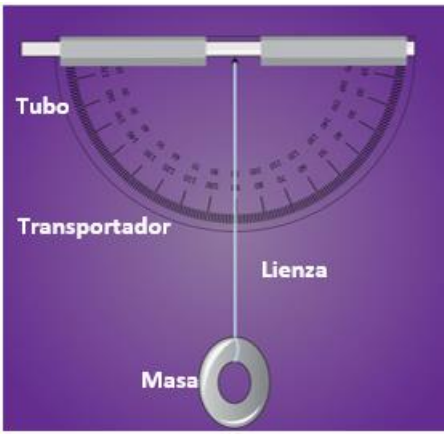
**Materiales:**

- Trozo de cartón de 15 x 15 cm
- Hoja de papel con transportador
- Bombilla
- Cinta masking
- Masa
- Lienza

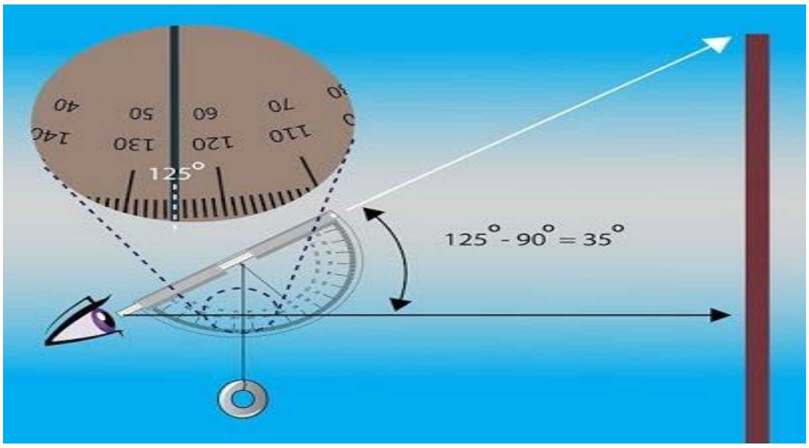
**Procedimiento:**

El propósito de este proyecto es aproximar la altura de un edificio, para ello vamos a construir un goniómetro. El goniómetro es un instrumento muy antiguo utilizado para medir ángulos, sus aplicaciones llevan implícito los conceptos matemáticos desarrollados por los antiguos griegos.

I. Coloca en uno de los lados del trozo de cartón la bombilla, utilizando la cinta masking.
II. Pega el transportador de papel en una de las caras del trozo de cartón, procura que el 0° y el 180° queden justo con la bombilla.
III. En el origen del transportador realiza un agujero, pasa por este la lienza y haz un nudo. En el extremo libre de la lienza, amarra una masa.



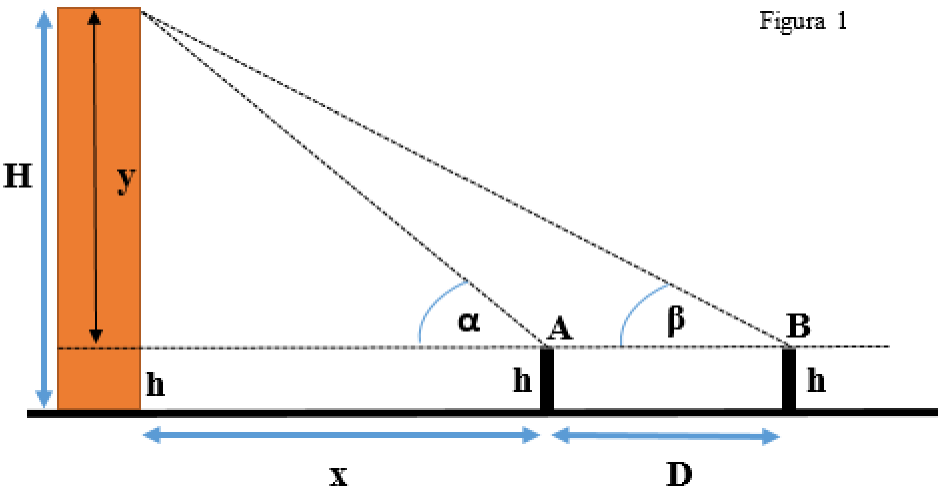
**¡Muy Importante!**




El goniómetro mide el ángulo de elevación, por lo cual, si el ángulo que tú encuentras es 125° le debes restar 90° y así obtendrás el ángulo de elevación correspondiente a la altura que estás midiendo.

**Desafío 1: Edificio lejano**

1. Elige uno de los edificios que se encuentren fuera del establecimiento, es importante que no tengas acceso a su base.
2. Escoge dos puntos A y B, desde donde se puedan hacer las mediciones. Es importante que ambos puntos estén en una misma línea recta, como se observa en la figura 1




3. Mide la distancia D entre los puntos escogidos A y B. Para ello hay que establecer una estrategia. Por ejemplo, contar pasos desde un punto a otro y luego transformar a metros de acuerdo a la medida de los pasos. Otra forma sería utilizar un hilo o cuerda de largo que permita desplazarse y registrar la distancia entre los puntos para luego medir.
4. Con ayuda del goniómetro mide el ángulo α y β. Para ello, un estudiante debe manipular el goniómetro y otro debe ubicarse frontal a este. Considera que siempre
   α tiene que ser mayor a β.
5. Mide la altura de la persona que manipuló el goniómetro desde el suelo hasta los ojos, a esta le llamaremos h.
6. Usando un esquema gráfico, como el de la figura 1, transfiere los valores medidos y determina la altura del edificio (H).
7. ¿Es coherente el resultado que obtuvieron? Explica

**Desafío 2: A una distancia de la base**

1. Elige un aro de básquetbol, un poste, una luz o el arco de fútbol del establecimiento.
2. Elegido el objeto, retírate lo suficiente como para enfocar la parte más alta del objeto utilizando el goniómetro. Llamaremos B a la ubicación del observador con el goniómetro.
3. Con ayuda del goniómetro mide el ángulo β. Para ello, un estudiante debe manipular el goniómetro y otro debe ubicarse frontal a este.
4. Toma una foto de la situación y en esta haz la representación de la figura 2, mide el ángulo β en la foto, utilizando transportador ¿es distinto al ángulo medido por el goniómetro?
5. Mide la distancia (D) desde el observador hasta la base del objeto que estás midiendo.
6. Mide la altura (h) del observador, desde el suelo hasta los ojos de este.

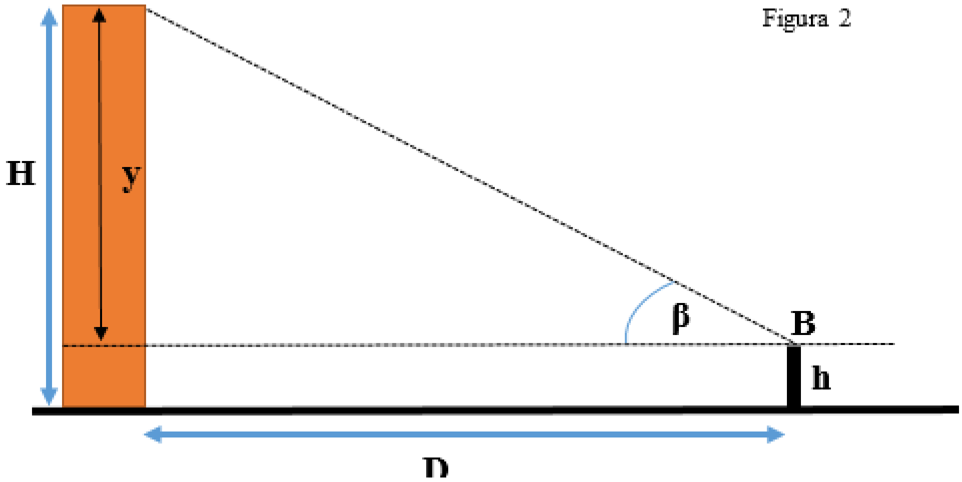



Figura 2

8. Usando un esquema gráfico, como el de la figura 2, transfiere los valores medidos y determina la altura del objeto (H).
9. Averigua la altura del objeto de estudio ¿es coherente el resultado obtenido con el que averiguaste? Explica
10. Si existe diferencia en los valores, ¿a qué crees que se deben?

**Desafío 3: Altura entre los pisos de un edificio**

1. Elige una escalera que conecte el primer y segundo piso de uno de los edificios del establecimiento.
2. Uno de los integrantes debe ubicarse en el segundo piso a la orilla del último peldaño con el goniómetro, a esta ubicación la llamaremos A.
3. Con ayuda del goniómetro determina el ángulo β. Para ello, el estudiante que se ubicó en el segundo piso debes mirar el extremo del primer peldaño de la escalera, llamaremos a este punto B.
4. Mide la altura del primer peldaño (h)
5. Con una huincha de medir, determina el largo de la escalera (D)
6. Con ello, determina la altura “y” entre los pisos del edificio y súmale h.
7. ¿Cuál es la altura entre los pisos del edificio (H)?
8. Amarra una masa a un hilo y luego cuélgalo desde el segundo piso hasta el primero.

9. Mide el largo del hilo del punto anterior ¿Cuál es la altura entre los pisos del edificio?
10. Si existe una diferencia entre los resultados ¿a qué crees que se debe? Explica

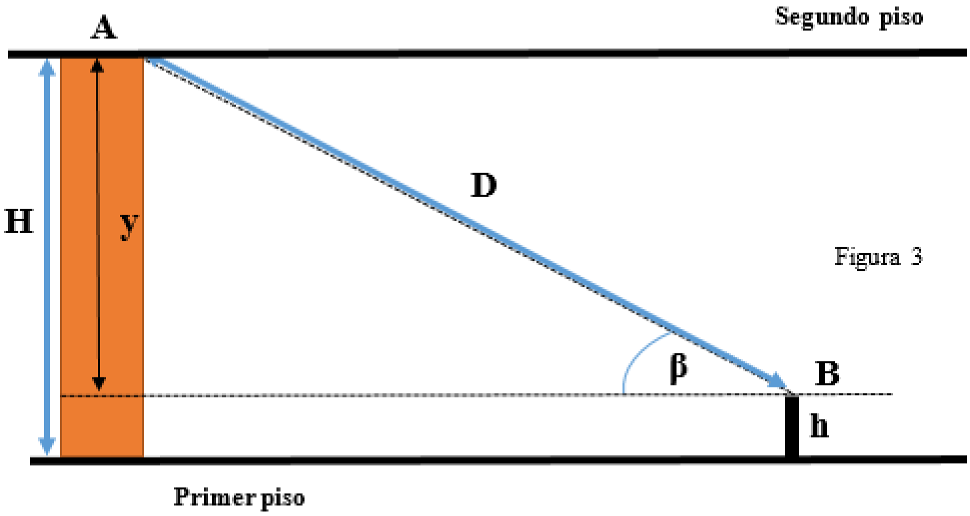



Figura 3

**Apéndice 2.4: Desafío 4:** Teorema del seno y coseno

# **Desafío 4**: Teorema del seno y coseno

**Instrucciones: ¿Cómo trabajo mi guía?**

1. Forma grupos de 5 integrantes
2. El docente te designara un desafío que debes resolver con tu grupo
3. Exprésate de forma clara y anotando todos los cálculos realizados.
4. Si requieres buscar información extra para resolver el problema, puedes utilizar tu celular. Después documenta el hecho en la guía.
5. Al terminar la clase, deberás subir el desafío resuelto (escaneando o tomando una foto) a la carpeta de la clase 12, para ello debes crear una carpeta que lleve como nombre los apellidos de los integrantes de tu grupo.
6. Cada integrante deberá completar la autoevaluación, que deberá subir a la asignación creada por el docente en la plataforma.

**Objetivo:**

- Determinar la distancia entre los objetos utilizando el teorema del seno o coseno.

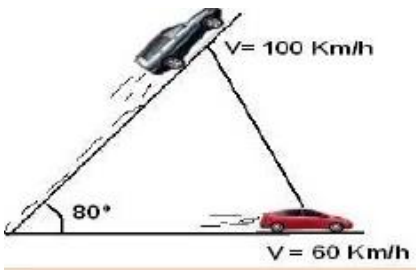
**Sabías que…**

La ley plana de los senos fuera descrita por Nasir Al-Dín Al-Tusi en el siglo XIII. Sin embargo, se dice que la ley de los senos como la conocemos hoy en día está basada en Regiomontanus, en sus soluciones de triángulos rectángulos en el Libro IV, y estas soluciones fueron a su vez las bases de sus soluciones de los triángulos generales.

Por otro lado, el teorema del coseno, denominado también como ley de cosenos, es una generalización del teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos que se utiliza, normalmente, en trigonometría. El teorema del coseno relaciona un lado de un triángulo cualquiera con los otros dos y con el coseno del ángulo formado por estos dos lados.

Ambos teoremas fueron hechos para calcular los ángulos y lados de triángulos que no fueran rectángulos.

**Reflexiona:**




*¿Para qué situaciones de la vida cotidiana pueden funcionar dichos teoremas? Justifica*

**Actividad previa para el desafío 1 y 2**

En el precalentamiento que hacen los jugadores de futbol, en ocasiones se juntan tres jugadores y comienzan a darse pases entre ellos, formando un triángulo, donde los jugadores serían los vértices de este.

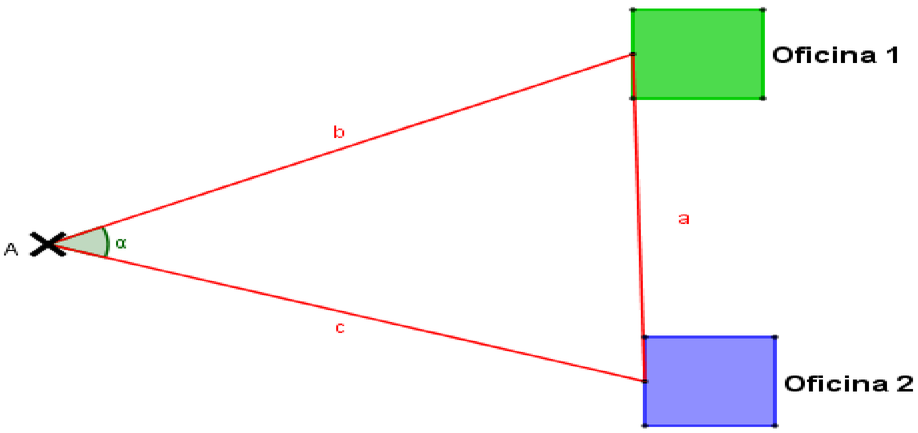
**¿Cómo podríamos determinar la distancia que hay entre cada uno? Y ¿Cuál es el ángulo con que sale el balón desde cada jugador?**

Plantea como grupo una hipótesis y una forma de demostrar lo que están proponiendo. Haz un dibujo de tu propuesta y explica que matemática ocuparías para determinar la cantidad de cable.

**Desafío 1: Determinando la distancia entre las oficinas**

Vamos a determinar la distancia entre dos oficinas del establecimiento, para ello se utilizará un trasportador hecho en cartulina, que te entregará el profesor.

1. Elegir dos oficinas del establecimiento, ya sea la inspectoría, la enfermería o una sala de clase, etcétera.
2. Uno de los integrantes va a ubicarse a una distancia en la cual pueda visualizar ambas oficinas y a una distancia que se pueda determinar de cada una, que llamaremos punto A.
3. Bajo este se debe ubicar el transportador, para medir el ángulo α entre la oficina 1 y 2. Deben tener en consideración que la vista del estudiante que está midiendo debe centrarse en un punto medio de cada oficina.
4. Desde la ubicación del integrante que está midiendo el ángulo, determina la distancia desde este a la oficina 1 (b) y luego a la oficina 2 (c).



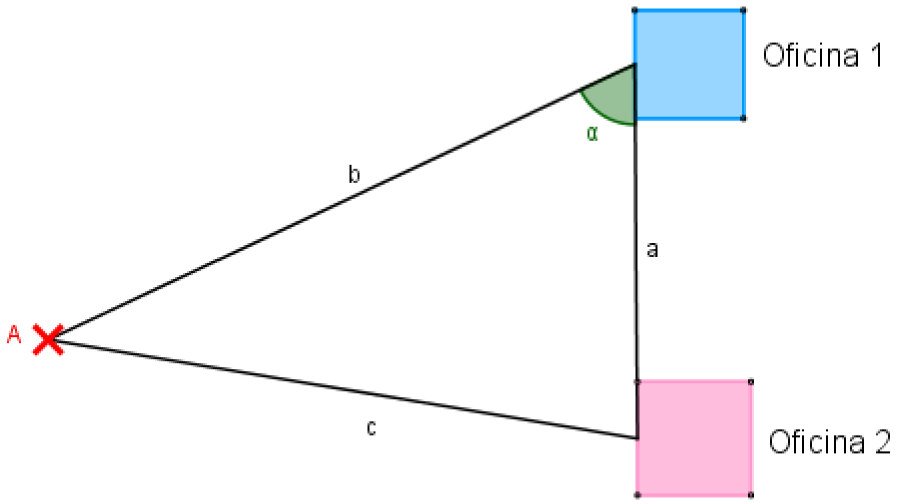

5. En base a los datos recaudados, ¿crees que es posible determinar la distancia entre las oficinas? Justifica tu respuesta.
6. ¿Qué teorema te servirá para determinar la distancia entre las oficinas (a)?

7. Aplica el teorema que señalaste en la pregunta 6 y determina la distancia entre las oficinas.
8. Determina la dirección a la que está la persona en el punto A de ambas oficinas.

**Desafío 2: Determinando la distancia entre las oficinas**

Vamos a determinar la distancia entre dos oficinas del establecimiento, para ello se utilizará un trasportador hecho en cartulina, que te entregará el profesor.

1. Elige dos oficinas del establecimiento, ya sea la inspectoría, la enfermería o una sala de clase.
2. Uno de los integrantes va a ubicarse a una distancia en la cual pueda visualizar ambas oficinas, dicha distancia puede ser determinada fácilmente, a este llamaremos punto A.
3. Mide el ángulo α que se forma entre el estudiante que mira ambas oficinas y la línea entre la oficina 1 y 2, para ello debe utilizar el transportador entregado por el profesor. Debes ubicar el transportador justo entre medio de la orilla de la oficina.
4. Desde la ubicación del integrante que está midiendo el ángulo, determina la distancia desde este a la oficina 1 (b) y luego a la oficina 2 (c).




5. En base a los datos recaudados, ¿crees que es posible determinar la distancia entre las oficinas? Justifica tu respuesta.
6. ¿Qué teorema te servirá para determinar la distancia entre las oficinas (1 y 2)?
7. Aplica el teorema que señalaste en la pregunta 6 y determina la distancia entre las oficinas.
8. Determina la dirección a la que está la persona en el punto A de ambas oficinas.

**Desafío 3: ¿Cuánto han recorrido?[21]**

**Presentación:**

Una de las regiones más hermosas para aventurar es la X región, con sus grandes y hermosos lagos, a los que debe su nombre. Esta es una de las regiones más visitadas por los turistas aventureros, es así que en muchas ocasiones se ven miles de turistas en bicicleta recorriendo las rutas alrededor del lago o en bote, disfrutando de sus dulces y tranquilas aguas.
Uno de sus lagos es el Llanquihue que está rodeado por varios pueblos: Puerto Octay, Frutillar, Ensenada y Puerto Varas entre otros. Todos ellos con tradiciones alemanas heredadas de generación en generación. Pero, en un lago tan grande, a veces cuesta ubicar y ubicarse.

**¿Cómo podrías saber la ubicación (distancia y dirección) de uno de estos pueblos conociendo la distancia entre dos de ellos y los ángulos que forman con el tercero?**

1. Plantea como grupo una hipótesis y una forma de demostrar lo que están proponiendo

Supongan que un decidieron disfrutar sus vacaciones cruzando en lancha el lago Llanquihue en la X región. Un día, muy temprano en la mañana salieron desde Puerto Octay para llegar hasta Ensenada, en donde recorrieron gran parte del lugar. Luego, continúan su viaje hacia Frutillar.


2. Con una regla mide la distancia entre Frutillar y Puerto Octay, con lo cual haz una escala, sabiendo que la distancia real es de 25 Km.

[21] Adaptado de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

3. Mide el ángulo entre Ensenada, Frutillar y Puerto Octay.
4. Mide el ángulo entre Ensenada, Puerto Octay y Frutillar.
5. Con estos datos recaudados, ¿Qué teorema puedes utilizar para determinar la distancia entre Ensenada y Puerto Octay, y entre Ensenada y Frutillar?
6. Aplica el teorema que señalaste en la pregunta 5 y determina la distancia que se te señalaron anteriormente.
7. ¿Cuál es la distancia que recorren en bote?
8. ¿Cuál es la dirección que debe tomar en Ensenada para llegar a Frutillar?

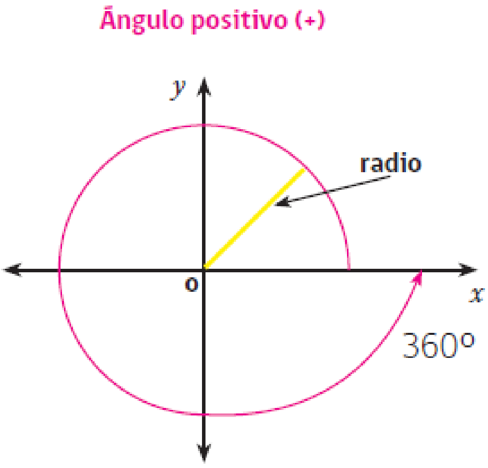
## Apéndice 3: Textos de trabajo

**Apéndice 3.1: Texto 1:** Medición de ángulos

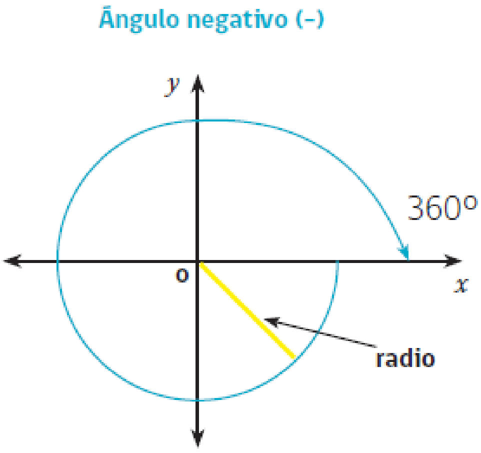
# **Texto 1:** Medición de ángulos

El ángulo es la amplitud de rotación de un segmento de recta llamado radio en torno a un punto llamado centro[22].

Midiendo ángulo sentido horario

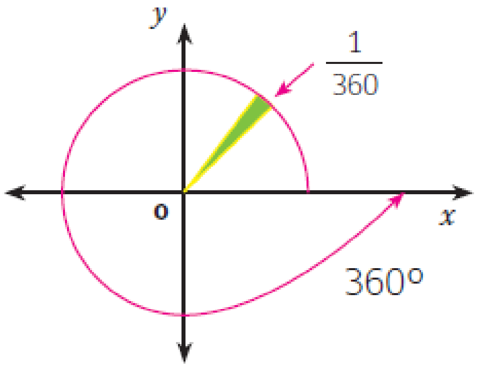



Midiendo ángulo sentido anti horario




Usualmente se utilizan dos unidades para medir los ángulos, los grados **sexagesimales** y los **radianes.**

**Grado sexagesimal:** Un grado sexagesimal (1°) es la medida del ángulo del centro que subtiende un arco igual a una trescientos sesenta – ava parte $\left(\frac{1}{360}\right)$ de la circunferencia. Al mismo tiempo, si 1° se divide en 60 partes iguales, tendremos minutos (1’) y si este lo dividimos nuevamente en 60 partes iguales, obtendremos los segundos (1’’)




**Radianes**: Un radián (1 rad) es la medida de un ángulo del centro de circunferencia que subtiende un arco de longitud igual a la del radio.

[22] Adaptado de: Huircán, M., & Carmona, K. (2013). Guía de Aprendizaje N°4 Geometría y trigonometría: Herramientas para resolver problemas. Chile.

Por ejemplo, en la figura 3 el ángulo β mide 1 rad.

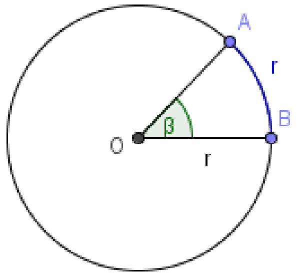


Figura 3

En el caso de la figura 4, el ángulo β mide 2π rad, ya que el perímetro de una circunferencia es 2πr. La figura 4 permite presentar la proporción:
360° = 2π rad. De esta manera podremos establecer transformaciones de unidades, tal como se muestra a continuación.

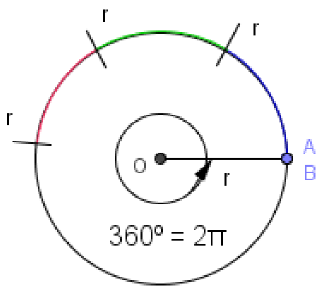


Figura 4

Para transformar de grados sexagesimales a radianes:

$$\frac{\boldsymbol{medidas\ en\ radianes\ de\ \alpha}}{\boldsymbol{medida\ de\ grados\ de\ \alpha}} = \frac{\boldsymbol{\pi[rad]}}{\boldsymbol{180°}}$$

No se te olvide tomar nota en tu cuaderno de lo que has leído

**Ejercitemos:**

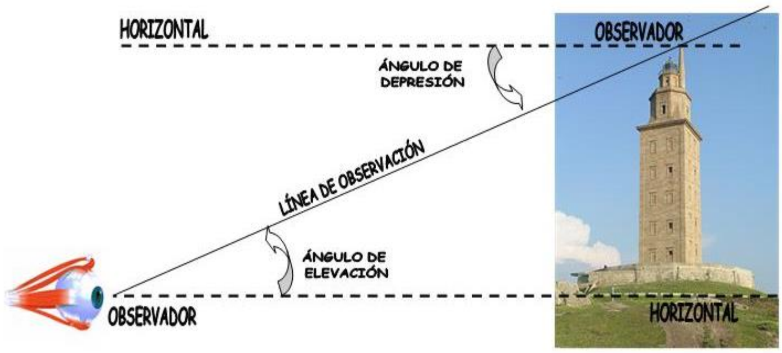
Completa la tabla con las transformaciones pedidas

| Ángulos sexagesimales | Ángulos radianes |
|---|---|
| **30°** | |
| | $\frac{\pi}{2}$ |
| **60°** | |
| | $\frac{\pi}{4}$ |

**Apéndice 3.2: Texto 2:** Ángulo de elevación y depresión

# **Texto 2:** Ángulo de elevación y depresión

Son aquellos ángulos que se forman con respecto a la línea horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira hacia el objeto observado, esta línea de mira puede ser por sobre la línea del horizonte (elevación) o por debajo del horizonte (depresión)[23].

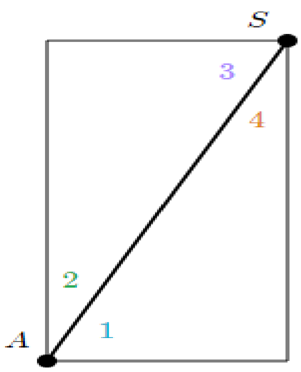



Con respecto a un observador, los ángulos de elevación y de depresión constituyen ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto, sus medidas son iguales.

No se te olvide tomar nota en tu cuaderno de lo que has leído

**Problema de práctica**

Woody está en el punto A, mirando al cielo y ve pasar a Buzz Lligthyear por el punto S.




1. ¿Cuál es el ángulo de elevación de Woody hacia Buzz?

a. $\measuredangle 1$
b. $\measuredangle 2$
c. $\measuredangle 3$
d. $\measuredangle 4$

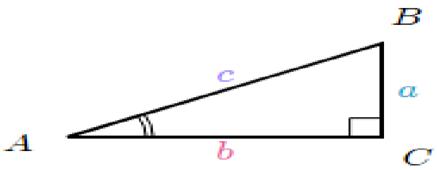
2. ¿Cuál es el ángulo de depresión de Buzz a Woody?

a. $\measuredangle 1$
b. $\measuredangle 2$
c. $\measuredangle 3$
d. $\measuredangle 4$

[23] Adaptado de: Ángulos de elevación y depresión. (2017). Khan Academy. De https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-modeling-with-right-triangles/a/angles-of-elevation-and-depression.

# **Texto 3:** Razones trigonométricas reciprocas

Ya hemos aprendido las razones trigonométricas básicas:




$$\sin(A) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(A) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(A) = \frac{a}{b}$$

Pero hay otras tres razones más a considerar:

- En lugar de $\frac{a}{c}$, podemos considerar $\frac{c}{a}$.
- En lugar de $\frac{b}{c}$, podemos considerar $\frac{c}{b}$.
- En lugar de $\frac{a}{b}$, podemos considerar $\frac{b}{a}$.

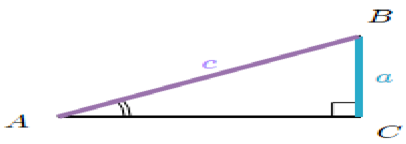
Estas nuevas razones son las **razones trigonométricas recíprocas**[24], y en seguida aprenderemos sus nombres.

## La cosecante (csc)

La **cosecante** es el recíproco del seno. Es la razón de la hipotenusa entre el lado opuesto al ángulo dado en un triángulo rectángulo.

$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

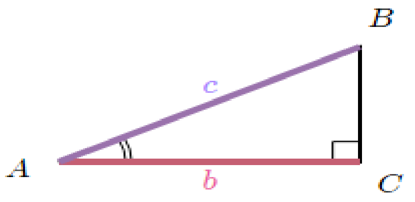
$$\csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{a}$$




## La secante (sec)

La **secante** es el recíproco del coseno. Es la razón de la hipotenusa entre el lado adyacente al ángulo dado en un triángulo rectángulo.

[24] Obtenido de: Razones trigonométricas recíprocas. (2017). Khan Academy. De https://es.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles/reciprocal-trig-ratios/a/reciprocal-trig-ratios




$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

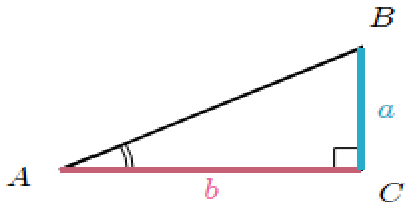
$$\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{b}$$

**La cotangente (cot)**

La **cotangente** es el recíproco de la tangente. Es la razón del lado adyacente entre el lado opuesto al ángulo en un triángulo rectángulo

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$

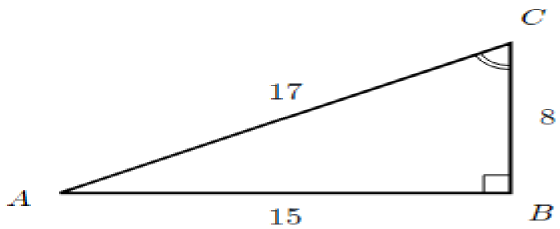
$$\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}$$




No se te olvide tomar nota en tu cuaderno de lo que has leído

**Estudiemos un ejemplo.**

1. En el siguiente triángulo, determina csc(C), sec(C) y cot(C)

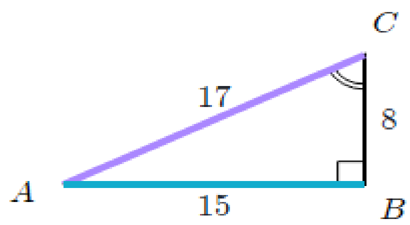



**Solución:**

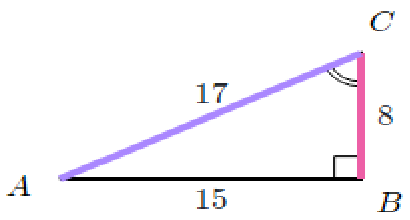
**Determinar la cosecante (es el *recíproco de seno).***
Puesto que el seno es la razón del opuesto entre la hipotenusa, la cosecante es la razón de la hipotenusa entre el opuesto.

$$\csc(C) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

$$= \frac{17}{15}$$




**Determinar la secante (es el *recíproco de coseno*)**
Puesto que el coseno es la razón del adyacente entre la hipotenusa, la secante es la razón de la hipotenusa entre el adyacente.



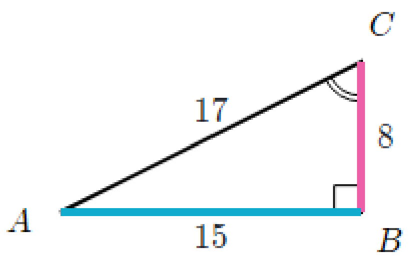

$$\sec(C) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$= \frac{17}{8}$$

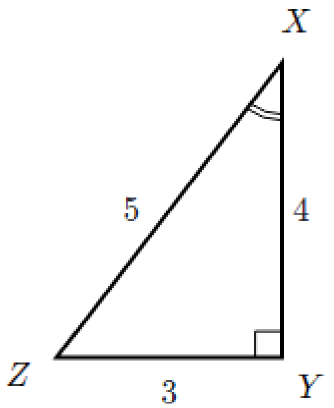
**Determinar la cotangente (es el recíproca de tangente)**
Puesto que la tangente es la razón del opuesto entre el adyacente, la cotangente es la razón del adyacente entre el opuesto.

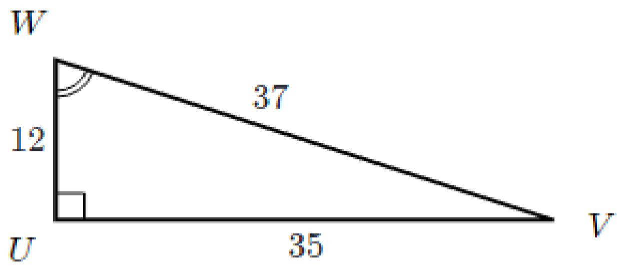
$$\cot(C) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

$$= \frac{8}{15}$$




**¡Inténtalo tú mismo!**




1. **Determina:**

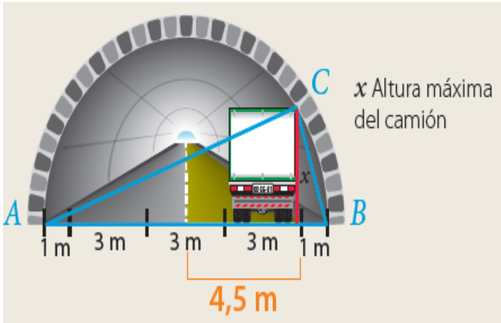
a. SEC(X)=
b. CSC (X)=
c. COT (X)=

2. **Determina:**

a. SEC(W)=
b. CSC (W)=
c. COT (W)=

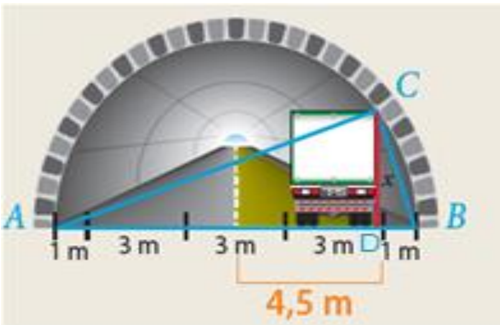
# Texto 4: Ejercicios Resueltos

1. Al mostrar la parte trasera de un camión que pasa por un túnel con la forma de medio cilindro, la imagen bidimensional muestra el túnel con forma de semicírculo. El triángulo ABC está inscrito en la semicircunferencia de radio 5,5 m. ¿Cuál es la altura máxima del camión (x)?




Desarrollo:

Observe que, si el triángulo ACB está inscrito en el semicírculo, se genera que en el vértice C se forma un ángulo de 90°, como tal la altura del camión (x) que se traza desde el vértice C al segmento $\overline{AB}$, formando el punto D, siendo la atura del triángulo ACB, por lo cual la $m(\measuredangle ADC)$ es de 90°. Y es por ello que podemos aplicar el teorema de Euclides.




De la imagen tenemos que q= 1m y como el radio de la semicircunferencia es de 5,5 m, podemos determinar que el valor de p= 5,5 +4,5, por lo tanto, p=10 m

Aplicando teorema de Euclides, es decir, $x^2 = p * q$

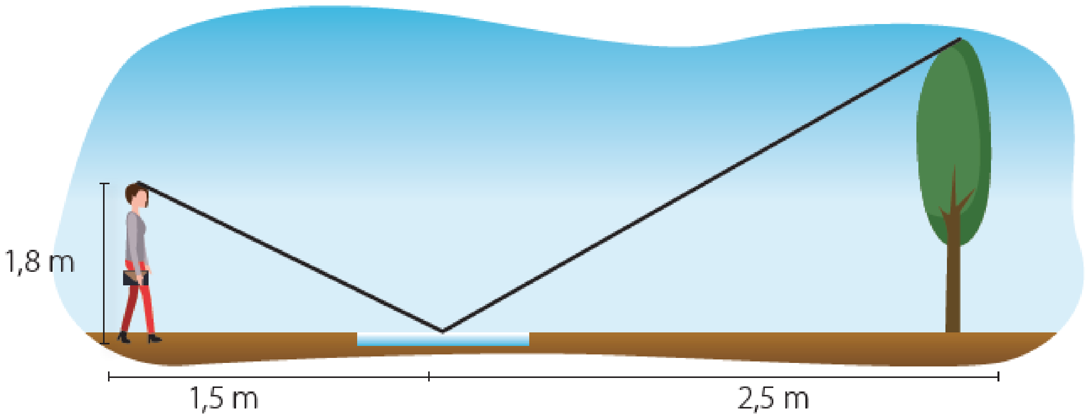
Reemplazando $x^2 = 10 * 1$

Resolviendo $x^2 = 10$

Aplicando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad tenemos que $x = \sqrt{10}$

Por lo tanto, **la altura máxima del camión es de 3,16 metros**

2. Existe un método para calcular la altura de un objeto, el cual consiste en colocar un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se refleje la parte más alta del objeto en el espejo. En la figura, ¿cuál es la altura del árbol?




Desarrollo:
Obsérvese que el triángulo formado por la persona es semejante al formado por el árbol, debido a que la persona y el árbol se encuentran con un ángulo de 90° respecto al suelo.
Por otro lado, los ángulos que se forman en el espejo son congruentes, ya que son opuesto por el vértice. Por lo cual, podemos concluir que los triángulos son semejantes debido al criterio AA (aunque también se pueden utilizar los otros criterios para afirmarlo), en tal caso podemos armar la siguiente proporción:

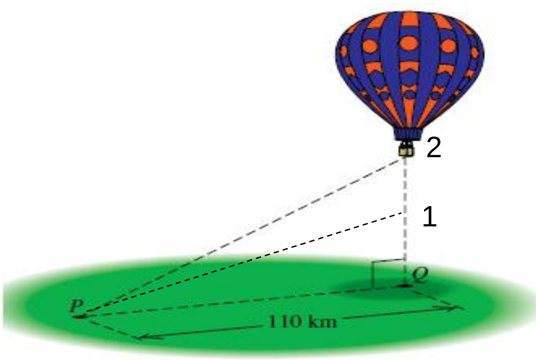
$$\frac{1{,}8}{1{,}5} = \frac{x}{2{,}5}$$

Despejando x obtenemos:

$$\frac{1{,}8 \ * 2{,}5}{1{,}5} = x$$

Calculando, encontramos que la **altura del árbol es de 3 metros**.

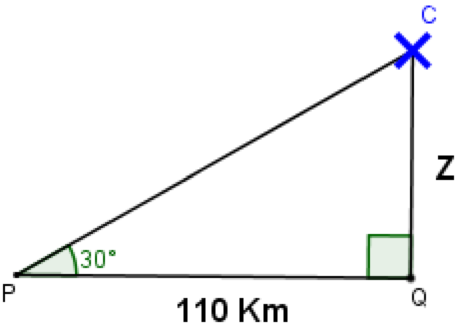
3. Cuando un globo de aire caliente sube verticalmente, su ángulo de elevación, desde un punto P en el nivel del suelo a 110 kilómetros del punto Q directamente debajo del globo, cambia de 30° a 45° (como se observa la figura). Aproximadamente ¿Cuánto sube el globo durante este periodo?

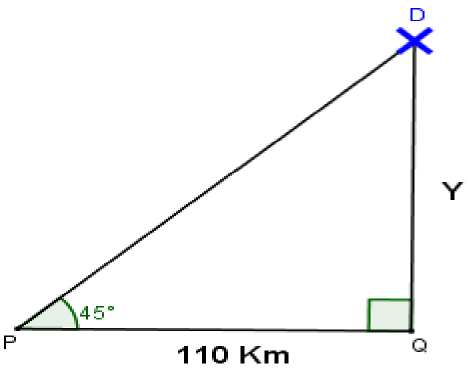


Desarrollo:

El primer triángulo, se forma con la altura 1, que será el punto C y el valor de la altura 1 la llamemos Z, por lo cual, si necesitamos determinar esta altura, vamos a tener:

$$\tan 30° = \frac{Z}{110}$$




El segundo triángulo, se forma con la altura 2, que será el punto D y el valor de la altura 2 la llamemos Y, por lo cual, si necesitamos determinar esta altura, vamos a tener:

$$\tan 45° = \frac{Y}{110}$$

Despejando ambas razones trigonométricas y calculamos:

$$\tan 30° = \frac{Z}{110} \qquad \tan 45° = \frac{Y}{110}$$

$$\tan 30° * 110 = Z \qquad \tan 45° * 110 = Y$$

Z=63,51 Km Y=110 Km

Por lo cual, el globo se elevaría Y - Z, es decir, el globo sube de su posición inicial 46,49 Km para llevar a la posición final.

# Texto 5: Identidades trigonométricas

En la práctica es frecuente encontrar problemas que involucran dos o más ángulos, que por lo general están relacionados con operaciones aritméticas. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas en tales combinaciones de ángulos es todo un desafío, en su desarrollo interviene el manejo y conocimiento de algunas identidades trigonométricas.

Una identidad trigonométrica[25] es una relación de igualdad entre expresiones trigonométricas que son verdaderas para todas las medidas angulares para las cuales están definidas.

## Identidades trigonométricas básicas

Las identidades básicas que podemos mencionar son:

7. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
8. $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
9. $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$
10. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

De las identidades anteriores se deducen, en forma inmediata, las siguientes:

$$\operatorname{sen}\alpha * \csc\alpha = 1 \qquad \cos\alpha * \sec\alpha = 1 \qquad \tan\alpha * \cot\alpha = 1$$

## Identidades pitagóricas

Se denominan así porque son todas aquellas que pueden ser deducidas de la aplicación del teorema de Pitágoras. Estas son:

$$cos^2\,\alpha \,+\, sen^2\alpha = 1 \qquad tan^2\,\alpha \,+\, 1 = sec^2\alpha \qquad cot^2\,\alpha \,+\, 1 = csc^2\alpha$$

## Identidades de sumas y diferencias

Sea α y β ángulos, que se suman o se resta. Si a estos se le aplica la función seno o coseno o tangente, se obtiene las siguientes identidades:

1. $sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha * \cos\beta + \cos\alpha * sen\,\beta$
2. $sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha * \cos\beta - \cos\alpha * sen\,\beta$

[25] Adaptado de: Referencia de identidades trigonométricas. (2017). Khan Academy. De https://es.khanacademy.org/math/precalculus/trig-equations-and-identities-precalc/using-trig-identities-precalc/a/trig-identity-reference

3. $cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha * \cos\beta - sen\,\alpha * sen\,\beta$
4. $cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha * \cos\beta + sen\,\alpha * sen\,\beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha * \tan\beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha * \tan\beta}$

## Identidades de ángulos dobles

Sea α ángulo, si se aplica las funciones trigonométricas al doble del ángulo, se cumple:

1. $sen\,(2\alpha) = 2 * sen\,\alpha * \cos\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = 2 * cos^2\,\alpha - 1$
3. $\tan(2\alpha) = \frac{2 * \tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

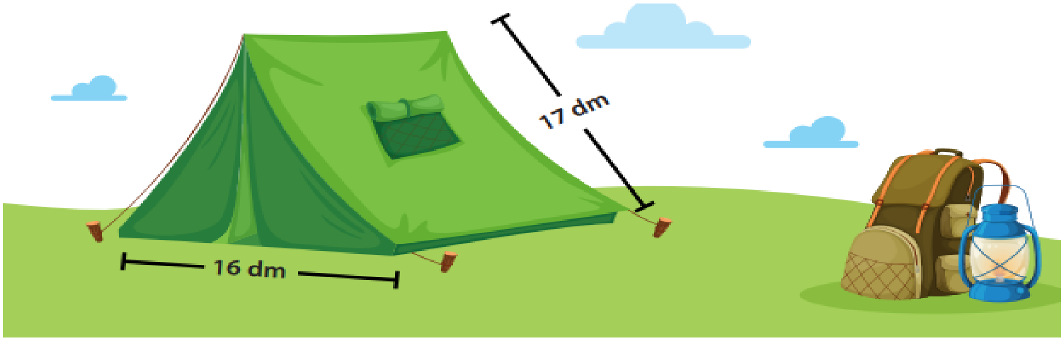
## Apéndice 4: Ejercicios post-clase

**Apéndice 4.1: Ejercicio 1:** Pitágoras

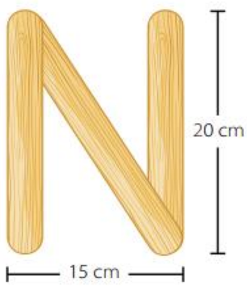
# **Ejercicios 1**: Pitágoras

**Resuelve los siguientes ejercicios**[26]

1. La cara frontal de una tienda de campaña es un triángulo isósceles cuya base mide 16 dm y cada uno de los lados iguales mide 17 dm. Calcula la altura en centímetros de esa tienda de campaña.




2. Una letra "N" se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separado 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?




**¡Recuerden!**
Que, si tienen alguna duda con algún ejercicio de la guía, publícala en el grupo de Edmodo, para que tus compañeros y el profesor te puedan ayudar.

[26] Extraído de: Colombia aprende. (2014). Guía del estudiante matemática, grado séptimo. Colombia. http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/plan_choco/mat7_b3_s8_est.pdf

**Apéndice 4.2: Ejercicio 2:** Euclides

# **Ejercicios 2**: Euclides

**Resuelve los siguientes ejercicios**[27]

1. Para sostener los asientos de una tribuna, se han puesto por debajo las columnas a y b, y las vigas c y d. Si las vigas forman entre sí un ángulo recto, ¿cuál será la altura de cada columna?

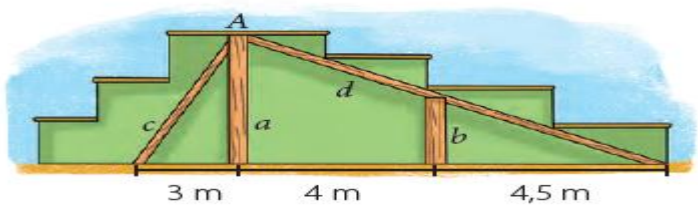



Figura 1

2. Una parcela rectangular que mide 200 m de ancho y 210 m de largo es cruzada diagonalmente por un río. Su dueño necesita construir una casa en uno de los vértices del terreno, además de un puente sobre el río. Si desea que el puente esté lo más cercano posible a su casa ¿A qué distancia de su casa estará el puente?

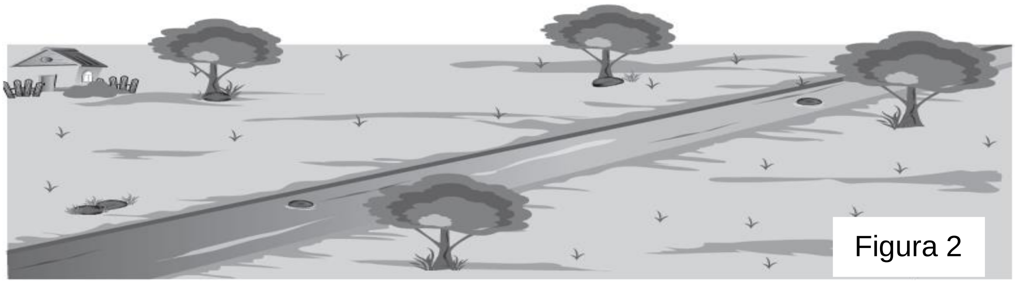


Figura 2

**¡Recuerden!**
Que, si tienen alguna duda con algún ejercicio de la guía, publícala en el grupo de Edmodo, para que tus compañeros y el profesor te puedan ayudar.

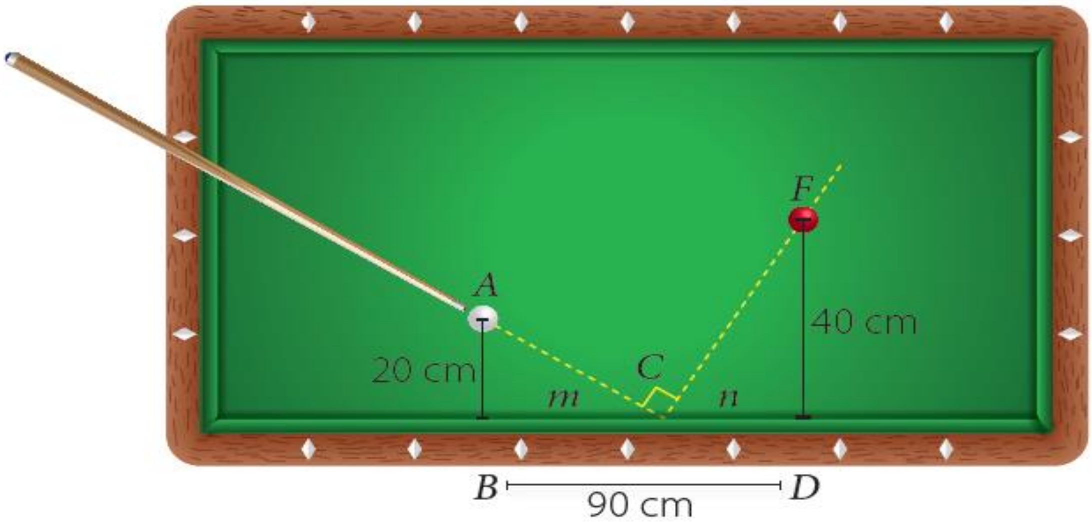
[27]Extraído de: Maldonado, L., Marambio, V., & Galasso, B. (2017). Texto del estudiante Matemática 1° Medio. Chile.

**Apéndice 4.3: Ejercicio 3:** Semejanza

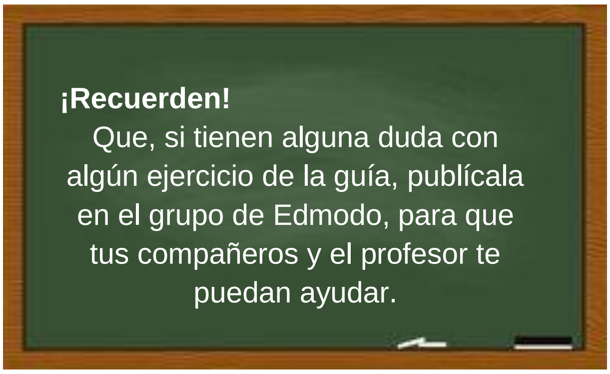
# **Ejercicio 3:** Semejanza

**Resuelve el siguiente problema**[28]

En la siguiente figura, se muestra un juego efectuado en una mesa de pool. C representa el punto en el cual rebota la bola blanca al ser golpeada sin efecto.




- Demuestra que ΔABC ~ ΔFDC.
- Calcula la medida de m y n.

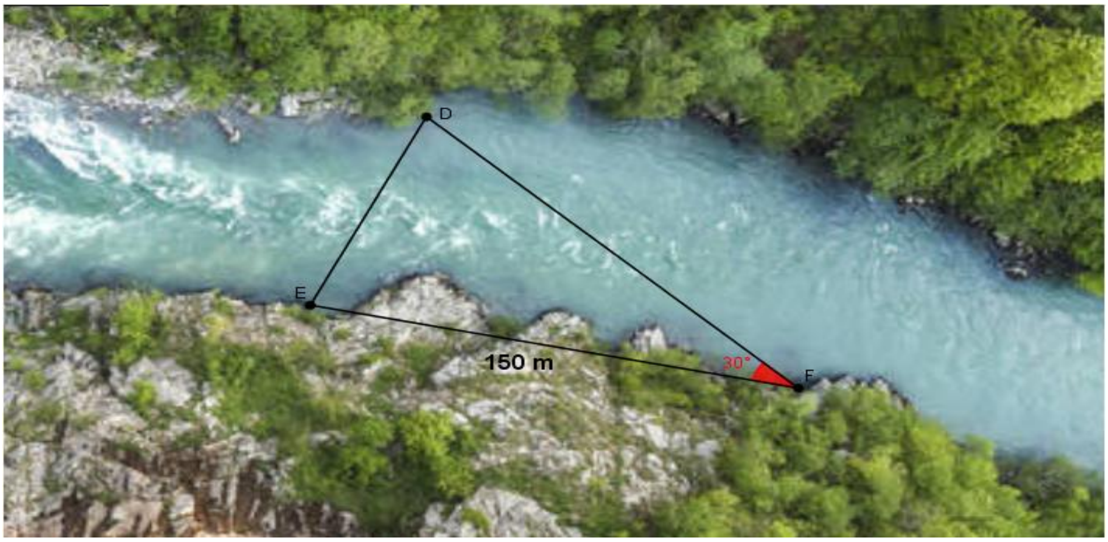



[28] Extraído de: Maldonado, L., Marambio, V., & Galasso, B. (2017). Texto del estudiante Matemática 1° Medio. Chile.

# **Ejercicio 4:** Razones trigonométricas

**Resuelva el siguiente ejercicio[29]:**

Para hallar la medida del ancho de un río, dos jóvenes clavan estacas en E y F, con referencia a un árbol de la ribera opuesta, D. EDF es un ángulo recto. La medida del ángulo DFE es 30°. Si la distancia de E a F es de 150 metros ¿Cuál es el ancho del río?



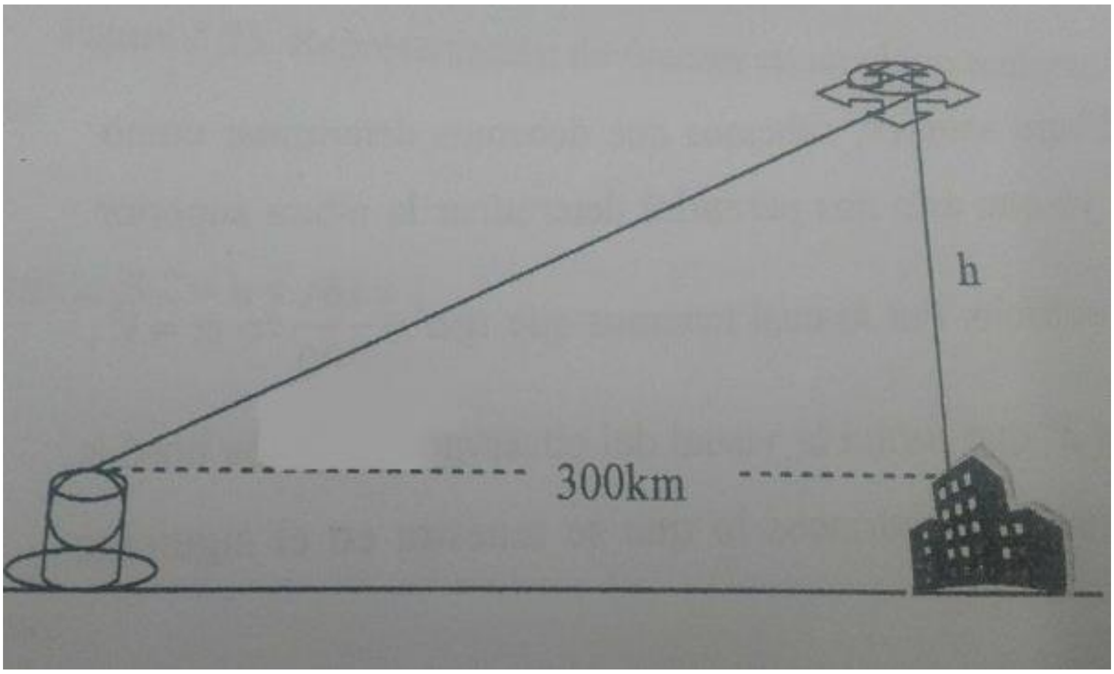

**¡Recuerden!**
Que, si tienen alguna duda con algún ejercicio de la guía, publícala en el grupo de Edmodo, para que tus compañeros y el profesor te puedan ayudar.

[29] Extraído de: Solis, D., & Marta, S. (1981). Monografía sobre la trigonometría para la enseñanza media (Profesor de Estado). Universidad de Santiago de Chile.

# **Ejercicio 5:** Ángulo de elevación y depresión

**Resuelva[30]:**

Un satélite artificial sobrevuela una ciudad y en ese instante, desde un observatorio situado a 300 kilómetros de ella, se le avista con un ángulo de elevación de 64°. ¿A qué altura de la ciudad se encuentra el satélite?




**¡Recuerden!**
Que, si tienen alguna duda con algún ejercicio de la guía, publícala en el grupo de Edmodo, para que tus compañeros y el profesor te puedan ayudar.

[30] Extraído de: Solis, D., & Marta, S. (1981). Monografía sobre la trigonometría para la enseñanza media (Profesor de Estado). Universidad de Santiago de Chile.

# Ejercicio 6: Funciones trigonométricas e inversas

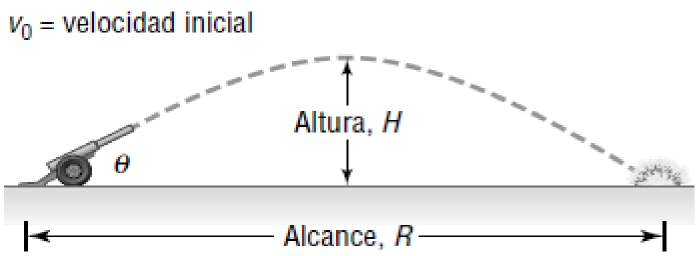
**Resuelve[31]:**

La trayectoria de un proyectil disparado con una inclinación ϴ respecto de la horizontal, con velocidad inicial $v_o$ es una parábola (vea la figura). El alcance R del proyectil, es decir, la distancia horizontal que recorre el proyectil, se encuentra usando la fórmula:

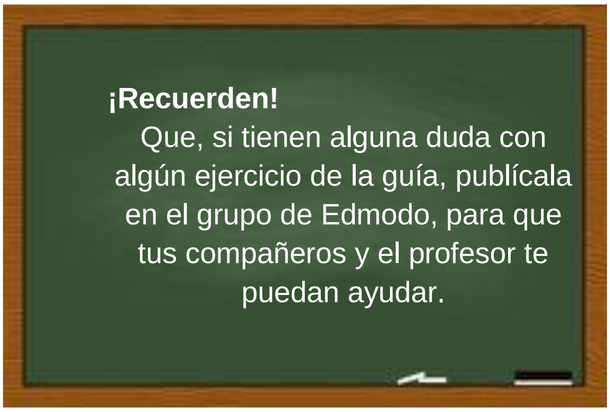
$$R = \frac{2 * v_o^2 * sen\theta * cos\theta}{g}$$

Donde g es la aceleración de gravedad ($g \approx 10\frac{m}{s^2}$). La máxima altura H del proyectil es:

$$H = \frac{v_o^2 * sen^2\theta}{2 * g}$$




a. Si el proyectil se dispara a un ángulo de 45° con la horizontal y con una velocidad inicial de 30 m/s ¿Cuál es el alcance y la altura que tiene el proyectil?
b. Si el proyectil alcanza una altura de 281,25 metros, saliendo de su origen con una velocidad de 150 m/s ¿Cuál es el ángulo de disparo?




[31] Extraído de: Sullivan, M. (2006). Álgebra y trigonometría (7th ed.). México.

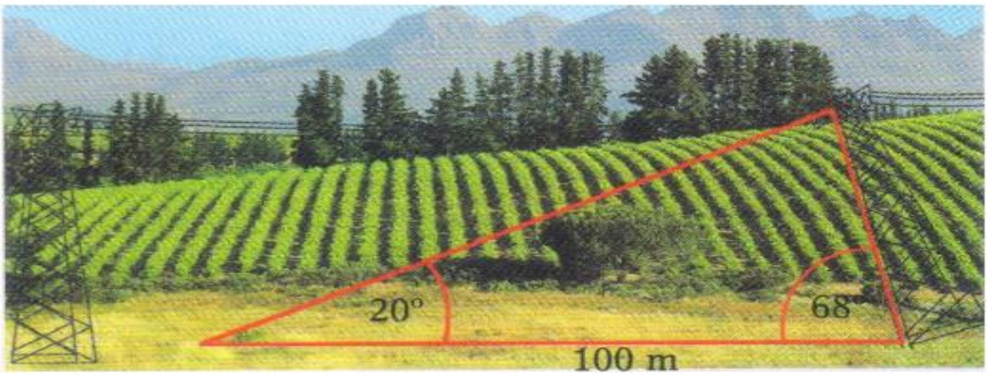
# Ejercicio 7: Identidades trigonométricas y Teorema del seno y coseno

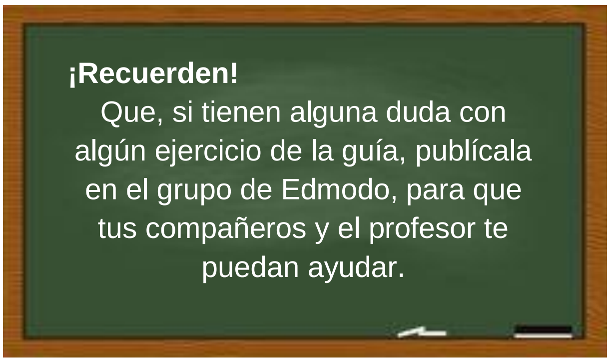
**Resuelva[32]:**

1. Comprueba que $\tan \alpha + \cot \alpha = \sec \alpha * \csc \alpha$

2. Dado $cot\ \alpha = \frac{1}{2}$, α es un ángulo agudo, encuentra el valor exacto de las funciones trigonométricas restante de α.

3. Un hombre mide el ángulo de elevación de una torre desde un punto situado a 100 metros de ella. Si el ángulo medido es de 20° y la torre forma un ángulo de 68° con el suelo, determina la altura de la torre.




[32] Extraído de: Sepúlveda, G., Velásquez, J., & Solabarrieta, P. (2001). Matemática Educación Media III. Chile: Santillana.

## Apéndice 5: Evaluaciones del modelo

**Apéndice 5.1: Diagnóstico[33]:** Conocimientos previos de trigonometría

**Diagnóstico**: Conocimientos previos de trigonometría

Nombre: ______________________________ Fecha: ______ Curso: ______

**Marca con una X la alternativa correcta**

1. La definición de rayo es:

   a) Conjunto de puntos limitados por sus extremos
   b) Un segmento
   c) Elemento especial de la circunferencia
   d) Trazo dirigido
   e) Ninguna de las anteriores

2. El valor reducido de la expresión: $\frac{2}{5} * \frac{15}{4}$

   a) $\frac{30}{10}$
   b) $\frac{3}{2}$
   c) 3
   d) 2
   e) $\frac{75}{8}$

3. Si x=0,14 y z=0,7 entonces z/x es:

   a) 5
   b) 0,2
   c) 0,4
   d) 0,5
   e) 2

4. El valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\right)*\frac{24}{3}}{\frac{13}{3}}$$

   a) 23
   b) 40
   c) $\frac{13}{23}$
   d) $\frac{23}{13}$
   e) $\frac{520}{9}$

[33] Puedes encontrar el diagnóstico en Google Forms accediendo en el siguiente link: https://goo.gl/forms/poqEDke7WVbOh1Vy2

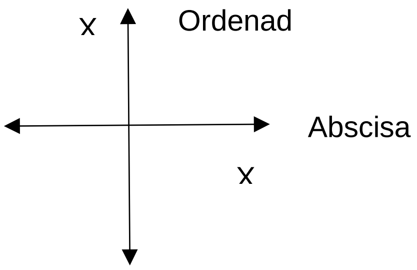
5. Las condiciones que debe cumplir una función para ser biyectiva es:

   I. Ser inyectiva
   II. Ser epiyectiva

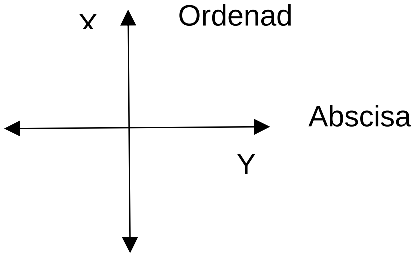
a) Solo I
b) Solo II
c) I o II
d) I y II
e) Ninguna de las anteriores

6. ¿Cuál es el gráfico que representa a los ejes coordenados?

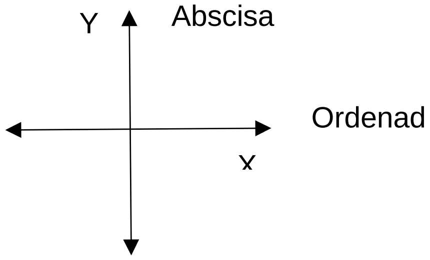
a)



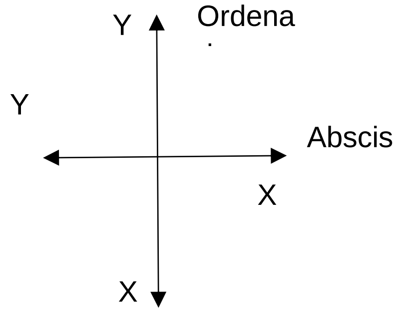

b)



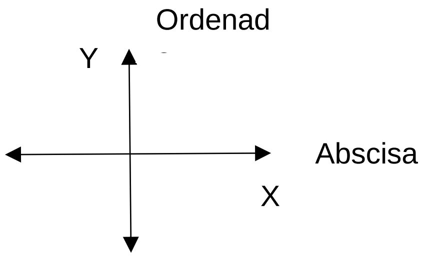

c)




d)



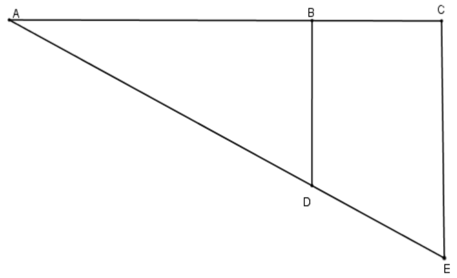

e)




7. $\frac{5\pi}{4}$ transformado a grados es

a) 225°
b) 112,5°
c) 450°
d) 337,5°
e) 312,5°

8. Diga cuál de las siguientes afirmaciones se cumplen en la figura si aplicamos el teorema de Thales (proporcionalidad)




a) $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}; \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$

b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}; \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$

c) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}; \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$

d) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}; \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

e) $\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}; \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$

**Apéndice 5.2 Autoevaluación[34]:** Clase 1

# Autoevaluación de la clase 1

Marca "si" si piensas que realizaste correctamente la afirmación, marca "no" si piensas que no realizaste correctamente la afirmación propuesta.

*Obligatorio

1. **Nombre completo:** *

2. **Nombre de los integrantes de tu grupo:** *

3. **Aporté ideas para desarrollar el ejercicio** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

4. **Participé de forma activa del desarrollo del ejercicio** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

5. **Presté atención al video puesto por el profesor** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

6. **Tomé apuntes del video puesto por el profesor** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

7. **Realicé los ejercicios propuestos por el video** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

[34] Puedes encontrar esta y las otras autoevaluaciones en Google Forms accediendo en el siguiente link:
https://drive.google.com/drive/folders/0B5riyb2f97_ATHF6S00zb0dTTWs?usp=sharing

**Apéndice 5.3: Evaluación formativa:** Demostrando lo aprendido

# Demostrando lo aprendido

Nombre: Fecha: Curso:

**Habilidades:** Resolución de problema, pensamiento crítico, toma de decisiones, colaboración, organización, análisis e interpretación de la información.

**Objetivos:**

- Aplicar el teorema de Pitágoras y Euclides a problemas en contexto.
- Aplicar los criterios de semejanza de triángulos a problemas en contexto.
- Aplicar las razones trigonométricas a problemas en contexto.
- Determinar la altura de un objeto.
- Determinar la distancia que se encuentra entre dos objetos.

**Instrucciones:**

1) En la parte 1 de la prueba tienes 30 minutos para resolver los problemas de forma individual.
2) En la parte 2 de la prueba tienes 50 minutos para resolver uno de los desafíos asignado a tu grupo, formado por cinco integrantes.
3) Se permite el uso de calculadora, pero no de celular.
4) Exprésate de forma clara y ordenada, una pregunta sin desarrollo invalidará tu respuesta.
5) Para la segunda parte de la evaluación puedes utilizar el goniómetro construido en clases anteriores.

**Parte 1:**

**I. Responde los siguientes problemas**

1. La figura 1 representa la fachada de una casa vista de frente. La techumbre tiene forma de triángulo rectángulo, si la altura (h) de la techumbre es 4/5 de la altura del muro (y), ¿Cuál es la altura del muro?

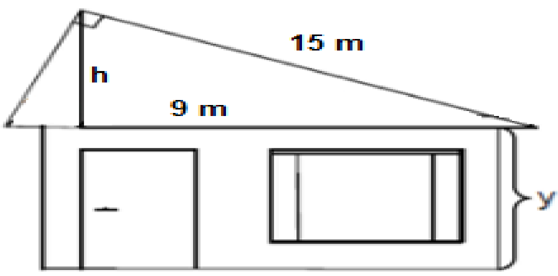
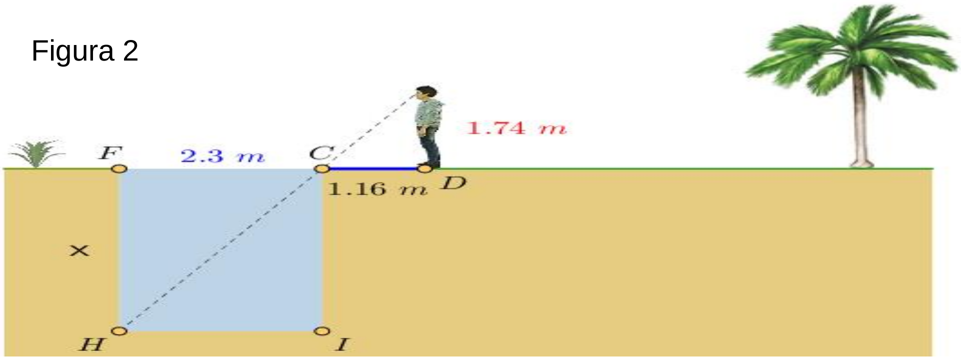



Figura 1

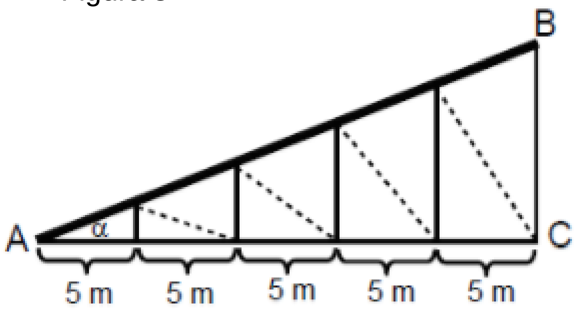
2. Martín está mirando la orilla de la piscina (C) a 1,16 metros de ella. Su línea de visión coincide con el fondo de la piscina (H), véase la figura 2. Si Martín mide 1,74 metros y el ancho de la piscina es de 2,3 metros ¿Cuál es la profundidad de la piscina?

Figura 2




3. Alrededor de un estadio se proyecta construir un techo, cuyo perfil se muestra en la figura 3. Para ello, se deben colocar sujeciones verticales cada 5 metros. Si AC se encuentra horizontal. ¿Cuál será la medida AB de dicho techo si α = 30°?

Figura 3




**Parte 2:**

**Desafío 1: El globo aerostático**

| | |
|---|---|
| Nombres: | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Un globo aerostático consiste en una bolsa que encierra una masa de gas (en este caso aire caliente), en la parte inferior existe una estructura sólida denominada barquilla, a la que se le puede "atar" cualquier tipo de cuerpo, como por ejemplo un sensor. Como los globos aerostáticos no tienen ningún tipo de propulsor, se "dejan llevar" por las corrientes de aire, aunque hay algunos tipos de globos que pueden controlar su elevación.

La primera demostración en público fue llevada a cabo por los hermanos Joseph Montgolfier y Jacques Montgolfier en el año 1783 en un mercado de Francia; esta prueba solo permitió una elevación del globo en alrededor de diez metros.

El profesor utiliza una imagen de un globo aerostático, que pegará en un sitio alto de la sala de clases. Determina la altura a la que se encuentra el globo:

- Realiza un diagrama de la situación
- No realices una medición directa, esto invalidará tu puntaje.
- Justifica cada procedimiento realizado utilizando bases trigonométricas.

**Parte 2:**

**Desafío 2: El paracaidista perdido**

| | |
|---|---|
| Nombres: | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Un paracaídas consiste en una gran pieza de tela, ligera y resistente sujeta al cuerpo o al objeto que se arroja por medio de cuerdas. Al soltarse desde un punto elevado la pieza de tela se abre y cae lentamente gracias a la resistencia que el aire opone a su movimiento de descenso, el deporte asociado a este aparato es el paracaidismo. En el siglo XV Leonardo Da Vinci, estudió el vuelo de los pájaros y sacó conclusiones que hasta hoy son consideradas básicas en la ciencia aeronáutica, La idea original de Da Vinci al momento de diseñar el paracaídas era idear un aparato que sirviera a las personas que estuvieran en un edificio alto que se estuviera incendiando. Aunque no se sabe si probó el paracaídas, muchos consideran a Da Vinci el padre del paracaidismo.

El paracaidista inició en el punto donde el profesor pega la imagen (en un sitio alto de la sala), si se sabe que el paracaídas fue a parar al segundo punto (identificado con una x). Calcula la distancia recorrida por el paracaidista:

- Realiza un diagrama de la situación
- No realices una medición directa, esto invalidará tu puntaje.
- Justifica cada procedimiento realizado utilizando bases trigonométricas.

**Apéndice 5.4: Evaluación sumativa:** Evaluación final de trigonometría

# Evaluación final de trigonometría

Nombre: ________________________________ Fecha: Curso:

**Puntaje:** **Nota:**

**Habilidades:** Pensamiento crítico, resolución de problemas, análisis e interpretación de datos.

**Objetivo:**

1. Interpretar la gráfica de la función seno y coseno.
2. Examinar y demostrar una de las identidades trigonométricas.
3. Aplicar e ilustrar las razones trigonométricas a problemas en contexto.
4. Aplicar e ilustrar las funciones trigonométricas e inversas a problemas en contexto.
5. Aplicar el teorema del seno y coseno a problemas en contexto.

**Instrucciones:**

1) Tienes 80 minutos para realizar la prueba.
2) Desarrolla las preguntas de forma clara y ordenada, una respuesta sin desarrollo invalidará la pregunta.
3) Se permite el uso de calculadora, no de celular.
4) Marca tu respuesta final con lápiz pasta, de no ser así no tendrás derecho a reclamo.

## II. Calcula (2 puntos cada una)

1. En un colegio a un grupo de alumnos se les pidió construir una escuadra con tres tablas: una corta, una mediana y una más larga. Si la más pequeña mide 18 cm y el ángulo formado entre las tablas mediana y larga debe ser de 30°, ¿cuál es la longitud aproximada de la tabla más larga de la escuadra?

2. Un terreno triangular tiene lados de longitudes 420, 350 y 180 pies. Calcule el ángulo mínimo entre los lados.
3. Francisco sale a navegar en su velero por el Lago Puyehue, parte su viaje desde Puntilla Ñilque y llega a Entre Lagos, para ello viaja en dirección Oeste con una rapidez de 300 m/s. Durante su viaje sopla el viento, desviando el bote en una dirección de 30°NO.
   a. Haz un bosquejo de la situación
   b. ¿Con qué velocidad relativa se desplaza el velero?
   c. ¿Cuál es la velocidad del viento?

4. La torre inclinada de Pisa, comenzó a inclinarse tan pronto como se inició su construcción en agosto de 1173, llegando a una inclinación de ϴ = 4°. Cuando la cima de la torre se ve desde un punto a 36,25 metros del centro de su base, se observa con un ángulo de elevación de 60° (véase figura 1). Calcula la altura de la torre inclinada de Pisa.

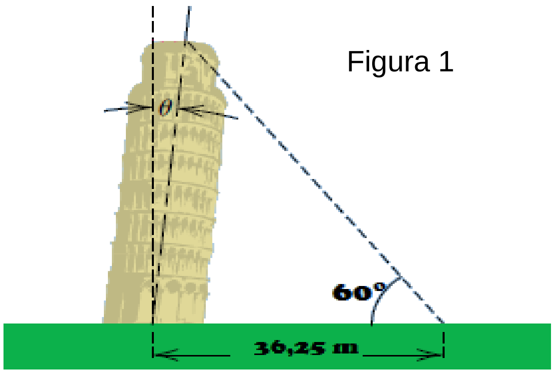


Figura 1

5. Romeo se aproxima sigilosamente al balcón de su amada. Desde su posición observa el balcón con un ángulo de elevación de 9°, si se acerca 12 metros más lo observa con un ángulo de 12° (véase figura 2). ¿Cuántos metros debe recorrer para pararse al pie del balcón? ¿A qué altura respecto del piso está el dichoso balcón?

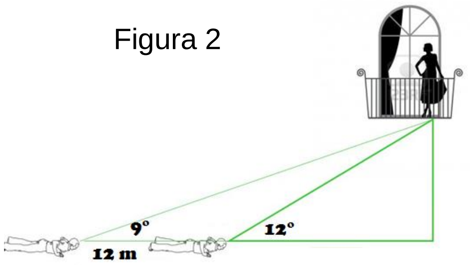
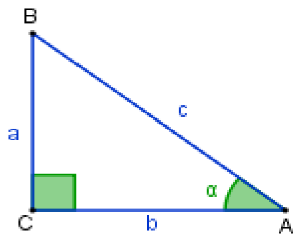


Figura 2

**III. Responde (3 puntos cada una)**

6. La siguiente secuencia de pasos se apoya en la figura 4 y en la identidad trigonométrica

$$1 + cot^2\,(\alpha) = csc^2\,(\alpha)$$

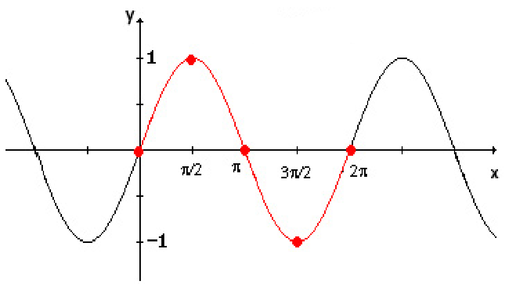
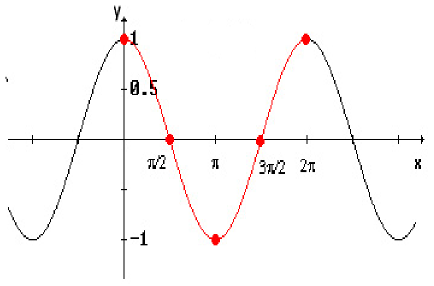



| Pasos | Matemática |
|---|---|
| **0** | $1 + cot^2\,(\alpha)$ |
| **1** | $1 + \dfrac{cos^2\,(\alpha)}{sen^2(\alpha)}$ |
| **2** | $1 + \dfrac{\frac{(CA)^2}{(H)^2}}{\frac{(CO)^2}{(H)^2}}$ |
| **3** | $1 + \dfrac{a^2}{b^2}$ |

| Pasos | Matemática |
|---|---|
| **4** | $\dfrac{a^2 + b^2}{b^2}$ |
| **5** | $\dfrac{c^2}{b^2}$ |
| **6** | $\left(\dfrac{c}{b}\right)^2$ |
| **7** | $csc^2\,(\alpha)$ |

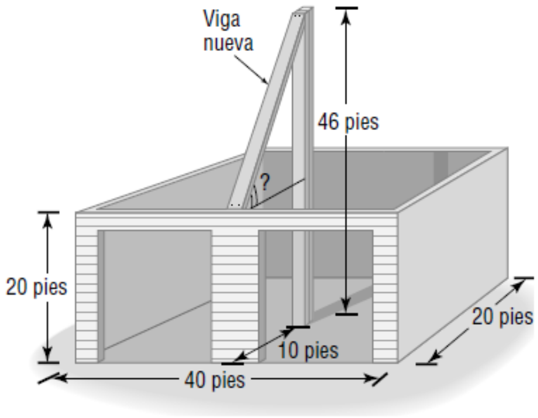
**Identifica el error inicial de la demostracion. Si hay error, corrígelo planteando desde una hipotesis hasta una tesis.**

7. Observa las siguientes gráficas y completa

| | | |
|---|---|---|
| **Gráfica** |  |  |
| **Función** | | |
| **Dominio** | | |
| **Rango** | | |
| **Mínimo** | | |
| **Máximo** | | |

8. Un carpintero se prepara para poner el techo de un garaje de 20 pies por 40 pies por 20 pies. Coloca como soporte una viga de acero de 46 pies de largo en el centro del garaje. Fijará otra viga al extremo superior de la viga central para apoyar el techo (vea la figura 3). El carpintero al realizar sus cálculos de la pendiente del techo, obtuvo que esta es de 50°, con lo cual tiene que utilizar una viga nueva de 27,86 metros. ¿Es correcto el cálculo que realizo el carpintero? Justifica.

Figura 3



## Apéndice 6: Rúbricas de evaluaciones y tablas de especificaciones

### Apéndice 6.1: Rúbrica de evaluación guía 7

# Rúbrica de evaluación de la Guía 7: Identidades trigonométricas

| Integrantes | |
|---|---|

### Actividad 1: Vamos a demostrar

Asigna la apreciación correspondiente, dependiendo de la demostración que realizo cada grupo.

| Criterios a evaluar | Muy bueno | Bueno | Malo | Apreciación |
|---|---|---|---|---|
| **Hipótesis** | **Plantea** una hipótesis **adecuada** a la situación. | **Plantea** una hipótesis **incompleta.** | **No** plantea una hipótesis. | |
| **Razonamiento Deductivo** | **Realiza** los **pasos** para demostrar la hipótesis, **justificando** cada uno de ello. | **Realiza** los **pasos** para demostrar la hipótesis, pero **no** los **justifica.** | **No** llevan a cabo pasos en la demostración. | |
| **Tesis** | | **Reconoce** cual es la tesis. | **No reconoce** la tesis. | |

### Actividad 2: Verificando la igualdad

Marca con una x, si está o no el criterio a evaluar.

| Criterios a evaluar | Si | No |
|---|---|---|
| El grupo resuelve utilizando las identidades trigonométricas | | |
| Justifican cada paso a seguir | | |
| Son ordenados y claros con el desarrollo del ejercicio | | |
| Comprueban la igualdad que se está pidiendo | | |

Apéndice 6.2: Distribución de preguntas por contenidos de la evaluación formativa

# Distribución de Preguntas por Contenidos de la evaluación formativa

## 1. Tabla de especificación

| Contenido | Objetivo | Pregunta | Cantidad |
|---|---|---|---|
| Teorema de Euclides y Pitágoras | Aplicar el teorema de Pitágoras y Euclides a problemas en contexto. | 1 | 1 |
| Semejanza de triángulos | Aplicar los criterios de semejanza de triángulos a problemas en contexto. | 2 | 1 |
| Razones trigonométricas | Aplicar las razones trigonométricas a problemas en contexto.<br><br>Determinar la altura de un objeto.<br><br>Determinar la distancia que se encuentra entre dos objetos. | 3<br><br>Desafío 1<br><br>Desafío 2 | 3 |
| | | TOTAL | 5 |

## 2. Pauta de Respuestas

| Número de pregunta | Respuesta |
|---|---|
| **1** | La altura del muro es de 15 metros |
| **2** | La profundidad de la piscina es de 3,45 metros |
| **3** | La medida de AB es de 28,87 metros |

Apéndice 6.3: Rúbrica de evaluación formativa: parte 2

# Rúbrica de evaluación formativa: Parte 2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Integrantes** | | | | |
| **Nombre del desafío** | | | | |
| **Criterios a evaluar** | **[3]** | **[2 – 1]** | **[0]** | **Puntaje** |
| Diagrama (2p) | | El diagrama **muestra una representación gráfica acertada** para la resolución del ejercicio. | El **diagrama no es correcto según la situación** o no está dibujado. | |
| Conocimientos demostrados (3p) | El equipo **utiliza conceptos trigonométricos acordes** para el ejercicio, realizando los cálculos de forma explícita y secuenciada. | El equipo muestra **dificultad para utilizar los conceptos trigonométricos** acordes al ejercicio, se presentan errores de cálculo y/o conceptuales. | El equipo **no utiliza conceptos trigonométricos** adecuados al ejercicio. | |
| Justificación del procedimiento (3p) | El equipo **justifica cada procedimiento realizado** para encontrar la solución del ejercicio, utilizando **conceptos matemáticos acordes** a la unidad. | El equipo justifica vagamente el procedimiento realizado, se observa **dificultad en la justificación de conceptos matemáticos**. | El equipo **no justifica el procedimiento**, o la justificación no es acorde al ejercicio. | |
| Resultado (2p) | | El equipo **analiza el resultado** obtenido y **evalúa** la veracidad o falsedad de la expresión. | El equipo **no analiza** el resultado obtenido. | |
| Orden y limpieza (2p) | | El equipo trabaja de forma **ordenada y limpia.** | El equipo no muestra **ni orden ni limpieza**. | |
| | | | **Puntaje (12p)** | |
| | | | | |
| **Observaciones adicionales** | | | | |

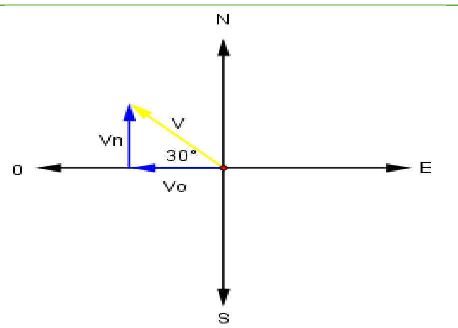
**Apéndice 6.4: Distribución de preguntas por contenidos de la evaluación final: Trigonometría**

# Distribución de Preguntas por Contenidos de la evaluación final: Trigonometría

## 1. Tabla de especificación

| Contenido | Objetivo | Pregunta | Cantidad |
|---|---|---|---|
| Razones trigonométricas | Aplicar e ilustrar las razones trigonométricas problemas en contexto. | 1, 5, 8 | 3 |
| Funciones trigonométricas e inversas | Aplicar e ilustrar las funciones trigonométricas e inversa a problemas en contexto.<br><br>Interpretar la gráfica de la función seno y coseno. | 3<br><br>7 | 2 |
| Identidades trigonométricas | Examinar y demostrar una de las identidades trigonométricas. | 6 | 1 |
| Teorema del seno y coseno | Aplicar el teorema del seno y coseno a problemas en contexto | 2,4 | 2 |
| | | TOTAL | 8 |

## 2. Pauta de Respuestas

<table>
<tr><th>Número de pregunta</th><th colspan="3">Respuesta</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">La longitud de la tabla más larga es de 36 cm</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">Los ángulos son 24,98°, 99,82° y 55,2°.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">
</td><td>b. La velocidad relativa del velero es 346,41 m/s<br><br>c. La velocidad del viento es de 173,21 m/s</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">La altura de la torre Pisa es de 56,14 metros.</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">Debe recorrer para pararse al pie del balcón 35, 08 metros, estando el balcón a una altura de 7,46 metros con respecto al piso.</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">Hay un error en el tercer paso</td></tr>
<tr><td rowspan="5">7</td><td>Función</td><td>Seno</td><td>Coseno</td></tr>
<tr><td>Dominio</td><td>$\mathbb{R}$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Rango</td><td>$[-1,1]$</td><td>$[-1,1]$</td></tr>
<tr><td>Mínimo</td><td>-1 cada $\frac{3\pi}{2}+k\pi$</td><td>-1 cada $\pi+k\pi$</td></tr>
<tr><td>Máximo</td><td>1 cada $\frac{\pi}{2}+k\pi$</td><td>1 cada $2\pi+k\pi$</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **8** | Por el teorema de Pitágoras se observa que el valor de la viga nueva es de 27,86 metros, pero este valor no coincide con la pendiente que el carpintero le dio al techo, debido a que con una pendiente de 50° tendría que utilizar una viga nueva de 33,9 metros. Por lo cual, para tener una viga de 27,86° se necesita que el techo tenga una pendiente de 69°, por lo que el **cálculo del carpintero es incorrecto en el valor de la pendiente.** |

### 3. Rúbrica de evaluación de la pregunta 6

Para evaluar la demostración de la pregunta 6, se utiliza la siguiente rúbrica:

| Criterios a evaluar | 1 | 0,5 | 0 | Puntaje |
|---|---|---|---|---|
| **Hipótesis** | **Plantea** una hipótesis **adecuada** a la situación. | **Plantea** una hipótesis **incompleta.** | **No** plantea una hipótesis. | |
| **Razonamiento Deductivo** | **Realiza** los **pasos** para demostrar la hipótesis, **justificando** cada uno de ello. | **Realiza** los **pasos** para demostrar la hipótesis, pero **no** los **justifica.** | **No** llevan a cabo pasos en la demostración. | |
| **Tesis** | | **Reconoce** cual es la tesis. | **No reconoce** la tesis. | |
| | | | **Total** | |

**Apéndice 6.5: Rúbrica de evaluación de desafíos**

# Rúbrica de evaluación desafíos

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Integrantes:** | | | | | | |
| **Nombre del desafío:** | | | **Presentador/a:** | | **Fecha:** | |
| **Criterios a evaluar** | | **5** | **[4 – 3]** | **[2– 1]** | **0** | **P** |
| Presentación (7 ptos) | **Contenido (5p)** | El presentador **señala el procedimiento que el grupo utilizó** para realizar el desafío, nombrando las **labores de cada integrante** del grupo y señalando **las dificultades y datos relevantes** que consideraron en la toma de decisiones. | El presentador **señala el procedimient o que el grupo utilizó** para realizar el desafío, nombrando **las dificultades y los datos relevantes** que consideraron en la toma de decisiones. | El presentador señala las labores de cada integrante del grupo, **sin nombrar el procedimiento, dificultades o datos relevantes** utilizado en la resolución del desafío. | El presentador **no señala lo solicitado para la resolución del desafío**, o no realiza la presentación. | |
| | **Tiempo (2 p)** | | | El presentador utiliza el **tiempo acorde** a la presentación (2 a 3 minutos). | El presentador **excede el tiempo** de presentación en uno o más minutos. | |
| Conocimientos demostrados (11 ptos) | **Desempeño del grupo (5p)** | El equipo **sube el desafío** de la clase a la **asignación** creada en la **plataforma EdModo**. El equipo **resuelve correctamente** el desafío utilizando los contenidos de trigonometría vistos en clases. | El **equipo sube el desafío** de la clase a la **asignación** creada en la **plataforma EdModo**. El equipo **presenta dificultades** en la utilización de los contenidos de trigonometría en las respuestas del desafío. | El equipo **sube el desafío** de la clase a la **asignación** creada en la **plataforma EdModo.** El equipo **no realizas el desafío aplicando** los contenidos trigonométricos vistos en clase. | El equipo **no sube el desafío** a la plataforma EdModo. | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Autoevaluación (4p)** | | El equipo **llena las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | **Uno o dos integrantes no llenan las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | **Los integrantes del grupo no llenan las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | |
| | **Orden y limpieza (2p)** | | | Las **fotos o escaneos subidos** a la plataforma EdModo muestran un trabajo **ordenado, legible y limpio.** | Las fotos o escaneos subidos a la plataforma EdModo **no son legibles.** | |
| En la clase (8 ptos) | **Respeto y responsabilidad (4p)** | | El equipo muestra **se comporta de forma adecuada** para la clase, **respetando las presentaciones de sus compañeros y trabajando de forma responsable.** | El equipo **no se comporta de forma adecuada para la clase,** respeta las presentaciones, pero **no trabaja de forma responsable.** | El equipo **no muestra respeto ni responsabilidad** para con su trabajo ni el de sus compañeros. | |
| | **Desafío de la clase (4p)** | | El equipo **logra el desafío** argumentando los resultados y contrastándolos con la realidad posible. | El equipo **logra vagamente el desafío**, se observa poca argumentación y baja o nula contrastación con la realidad. | El equipo **no logra el desafío propuesto para la clase,** ya sea numéricamente o a través del razonamiento. | |
| | | | | | **Total (25 p máx)** | |

| | |
|---|---|
| **Observaciones adicionales:** | |

Apéndice 6.6: Rúbrica de evaluación de guías

# Rúbrica de evaluación guías

<table>
<tr><td colspan="5">Integrantes:</td><td colspan="3">Presentador/a:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ejercicio a presentar:</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Criterios a evaluar</td><td>5</td><td>[4 – 3]</td><td>[2– 1]</td><td colspan="2">0</td><td>P</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Presentación (5 ptos)</td><td>Contenido (4p)</td><td></td><td>El presentador señala el procedimiento que el grupo utilizó para realizar el(los) ejercicio(s), nombrando las labores de cada integrante del grupo.</td><td>El presentador señala las labores de cada integrante del grupo, sin nombrar el procedimiento utilizado en la resolución.</td><td colspan="2">El presentador no señala procedimiento ni labores del grupo, o no realiza la presentación.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tiempo (1 p)</td><td></td><td></td><td>El presentador utiliza el tiempo acorde a la presentación (2 a 3 minutos).</td><td colspan="2">El presentador excede el tiempo de presentación en uno o más minutos.</td><td></td></tr>
<tr><td>Conocimientos demostrados (11 ptos)</td><td>Desempeño del grupo (5p)</td><td>El equipo sube el(los) ejercicio(s) de la clase a la asignación creada en la plataforma EdModo. El equipo contesta las preguntas correctamente utilizando los contenidos de trigonometría vistos en clases.</td><td>El equipo sube el(los) ejercicio(s) de la clase a la asignación creada en la plataforma EdModo. El equipo contesta las preguntas con dificultades en la utilización de los contenidos de trigonometría vistos en clase</td><td>El equipo sube el(los) ejercicio(s) de la clase a la asignación creada en la plataforma EdModo. El equipo contesta las preguntas con poca o nula aplicación de contenidos trigonométricos vistos en clase</td><td colspan="2">El equipo no sube el(los) ejercicio(s) a la plataforma EdModo.</td><td></td></tr>
</table>

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Autoevaluación (4p)** | | El equipo **llena las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | **Uno o dos integrantes no llenan las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | **Los integrantes del grupo no llenan las autoevaluaciones** presentes en la carpeta de clase. | |
| | **Orden y limpieza (2p)** | | | Las **fotos o escaneos subidos** a la plataforma EdModo muestran un trabajo **ordenado, legible y limpio.** | Las fotos o escaneos subidos a la plataforma EdModo **no son legibles.** | |
| En la clase (8 ptos) | **Respeto y responsabilidad (4p)** | | El equipo **se comporta de forma adecuada para la clase, respetando** las presentaciones de sus compañeros y **trabajando de forma responsable.** | El equipo **no se comporta de forma adecuada para la clase,** respeta las presentaciones, pero **no trabaja de forma responsable.** | El equipo **no muestra respeto ni responsabilidad** para con su trabajo ni el de sus compañeros. | |
| | **Objetivo de la clase (4p)** | | El equipo **logra todos los objetivos** de la clase. | El equipo **logra algunos (o vagamente) los objetivos** de la clase | El equipo **no logra los objetivos** propuestos para la clase. | |
| | | | | | **Total (24 p máx)** | |

| | |
|---|---|
| **Observaciones adicionales:** | |

## Apéndice 7: Material extra

**Apéndice 7.1: Encuesta [35]:** La matemática y la tecnología

# Encuesta: La matemática y la tecnología

Instrucciones: Responde el cuestionario de manera individual marcando solo una de las alternativas.
No puedes volver a subir el cuestionario.

*Obligatorio

1. **Nombre Completo** *

2. **Tengo un computador en mi casa.** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No
   - No, pero frecuento un lugar donde tengo acceso a una.

3. **Tengo conexión a internet en mi casa.** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No
   - No, pero frecuento un lugar donde tengo acceso.

4. **Tengo teléfono propio** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Sí
   - No

5. **El sistema operativo de mi teléfono es** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Android
   - iOS
   - Otro
   - No tengo teléfono

6. **¿Cuántas horas a la semana paso frente al computador?** *
   *Marca solo un óvalo.*
   - Menos de 10 horas por semana
   - Entre 10 y 15 horas por semana
   - Entre 20 y 30 horas por semana
   - Más de 30 horas por semana

[35] Adaptado de: Gómez Chacón, I. M., & Lorios Matuk, E. G. (2005). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Educación Matemática, 17(1), 185-190.

Puedes encontrar esta encuesta en Google Forms accediendo en el siguiente link: https://goo.gl/forms/8ZFVQyyuUh8V1Ooy2.

7. **Utilizo el tiempo frente al computador para aprender cosas nuevas.** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

8. **Utilizo parte de mi tiempo en el computador para revisar cosas que no entendí de las clases.** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

9. **He utilizado el computador para buscar conceptos matemáticos el último mes.** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

10. **Me interesa mirar videos que puedan responder dudas del contenido que estoy viendo en clases.** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

11. **Aprendo fácilmente conceptos matemáticos** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

12. **Las matemáticas son para investigar nuevas ideas.** *
*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

13. **Relaciono los nuevos conceptos matemáticos con las cosas ya aprendidas.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

14. **Busco material complementario de las clases en páginas web.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

15. **Utilizo mi celular para buscar conceptos matemáticos que no logré entender.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

16. **Veo videos educativos en páginas web para ampliar mi conocimiento.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

17. **Realizo preguntas constantemente a profesores en línea.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

18. **Me interesa aprender nuevas formas de utilizar la tecnología para aprender.** *

*Marca solo un óvalo.*

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

**Apéndice 7.2: Manual de uso de calculadora**

# Uso de calculadora científica

Las calculadoras científicas[36] poseen una gran cantidad de funciones matemáticas: estadísticas, lógicas y trigonométricas, entre otras.

A continuación, explicaremos algunos aspectos necesarios para usar las funciones trigonométricas de la calculadora científica.

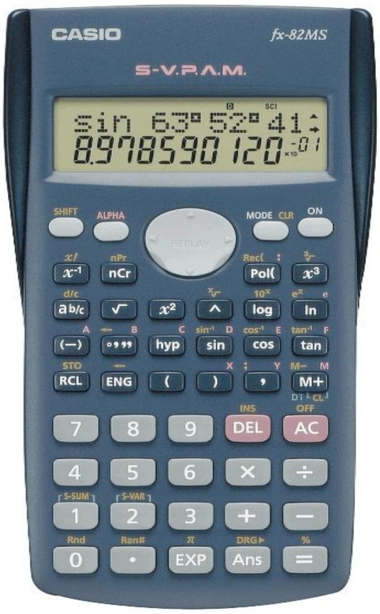
## 1. Cambiando el sistema de medida angular

Lo primero que se debe aprender es establecer el sistema de medida angular con el que se desea trabajar. Esto porque la calculadora debe “saber” si el ángulo escrito en la pantalla está en radianes o en grados sexagesimales.
Para establecer el modo de medida angular en la calculadora se deben realizar las siguientes acciones: presionar cuatro veces la tecla **MODE**. En el visor se observará **Deg** – **Rad** - **Gra**, que representa los grados sexagesimales, radianes y gradiente, respectivamente. Presionando el numero asociado a cada sistema de medida angular, se activará la medida con la que se quiera trabajar.

**Nota:** Ante cualquier problema con las funciones asociadas a estas teclas consulta el manual de instrucciones de tu calculadora.

## 2. Cambiando la notación del ángulo

Las calculadoras científicas poseen una función que permite convertir la medida de un ángulo dado en notación decimal, a grados (°), minutos (‘), segundos (“) y viceversa. Para esto se debe introducir el valor del ángulo en forma decimal, por ejemplo 58,178, luego se presiona la tecla **° ’ ”**, para a continuación presionar la tecla **=**, con lo que se observará en el visor 58°10°40.8, esto representa al ángulo 58°10’ 40,8”.




Además, si se desea trabajar con un ángulo en grados, minutos y segundos sexagesimales, como, por ejemplo, 67° 15’ 20” se debe presionar la tecla **°’’’** cada vez que ingresa un valor, es decir: ingresa 67 y presiona **°’’’**, después ingresa 15 y presiona **°’’’**, finalmente ingresa 20 y presiona la tecla **°’’’** nuevamente. Con estas acciones aparecerá en el visor de la calculadora 67°15°20°, que simboliza el ángulo en grados, minutos y segundos.

[36] Adaptado de: Baeza, O., & Herrera, E. (2003). Geometría más sobre triángulos rectángulos, material del estudiante (2nd ed.). Chile: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

## 3. Trabajando con las funciones trigonométricas

Ahora trabajaremos con las razones trigonométricas en la calculadora.
La función trigonométrica *seno* se identifica mediante la tecla **sin**, la razón *coseno* se identifica mediante la tecla **cos** y la razón *tangente* con la tecla **tan**.

Por ejemplo, para obtener sin (45°) presiona sin y luego ingresa: 45

Con esta acción se obtiene en pantalla el valor 0,7071067811, que corresponde al seno de un ángulo de 45°.
Las **funciones trigonométricas recíprocas** *cosecante*, *secante* y *cotangente*, no poseen tecla inmediata, porque se pueden obtener indirectamente a través de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Entonces, para determinar el valor de una razón trigonométrica recíproca, primero debes obtener el valor de la razón trigonométrica respectiva (*seno, coseno* o *tangente)* y posteriormente presionar la tecla **$x^{-1}$** o puedes ingresar: 1, para luego presionar la tecla de división (**÷**) y a continuación la tecla **Ans** (que corresponde al último valor que calculaste), con lo que obtendrás el valor de la razón trigonométrica recíproca respectiva.

Por ejemplo, para calcular csc (30°) debes obtener $\frac{1}{sen\ 30°}$ . En la calculadora debes ingresar:

| | | | |
|---|---|---|---|
| sen 30° | 0,5 | 1 + ÷ + **Ans** | 2 |
| sen 30° | 0,5 | **Ans** + **$x^{-1}$** | 2 |

De estas operaciones se obtiene el valor 2, que corresponde a la *cosecante* de 30°.

## 4. Determinando el valor del ángulo

Las calculadoras científicas también nos permiten determinar el valor del ángulo a partir del valor de la razón trigonométrica (seno, coseno o tangente).

Por ejemplo, tenemos que *sen* (α) = 0,866.

Para determinar a qué ángulo corresponde ese valor del seno, se debe presionar la tecla **SHIFT** (o la tecla respectiva de acuerdo al tipo de calculadora) y la tecla de la función **sin** ($\sin^{-1}$), que representa a la **función inversa**[37], con esto aparecerá en el visor la medida del ángulo en números decimales.

[37] Las funciones trigonométricas inversas que aparecen en la calculadora tienen la nomenclatura de $sin^{-1}$, $cos^{-1}$, $tan^{-1}$, y no tiene relación con las recíprocas ($\frac{1}{sin}, \frac{1}{cos}, \frac{1}{tan}$), respectivamente.

En nuestro ejemplo tendremos:

**SHIFT** + **sin** + 0,866, lo que nos da en la pantalla 59,99708906 siendo aproximadamente 60°, siendo sen 60°=0,866

A esta función se le conoce con el nombre de *arco seno* y es la función inversa de la función *seno*. Para el *coseno* y la *tangente* existen las respectivas funciones inversas *arco coseno* y *arco tangente*, las que se activan con **SHIFT** + **cos** y **SHIFT** + **tan**, respectivamente.

**Nota:** Si el valor que quieres ingresar tiene una operación de por medio (como ½, 1+5, etc.) debes ingresarlo entre paréntesis, ya que la calculadora realiza las operaciones de izquierda a derecha. Así, por ejemplo, si queremos calcular arco seno de ½, tendremos que colocar: **SHIFT** + **sin** + (1/2)

Para convertir ese resultado en grados, minutos y segundos sexagesimales se presiona la tecla con lo que se observará en el visor 59°59°49.52. Esto significa que el ángulo cuyo seno es 0,866 es 59° 59’ 49,52”.

**Nota:** Ciertamente en todas las operaciones que se lleven a cabo, siempre existirá un margen de error en los cálculos dependiendo de la cantidad de decimales que se estén utilizando.

### Apéndice 7.3: Manual de uso de GeoGebra

# Manual de GeoGebra

Este manual[38] aborda todos los comandos y herramientas de *GeoGebra 5.0,* centrándonos en la barra de herramientas de la Vista Gráfica*. S*egún el hardware y las preferencias, se puede elegir entre GeoGebra 5.0 Escritorio y GeoGebra 5.0 Web y tabletas cuyas diferencias se detallan en términos de empleo y diseño*.* Los cuales puedes descargar del siguiente link: https://www.geogebra.org/download

**¿Qué es GeoGebra?**

GeoGebra es un software libre de matemática dinámica, para aprender y enseñar en todos los niveles educativos.

**Principios básicos del GeoGebra**

1. Vistas y Apariencias

GeoGebra ofrece diversas vistas para los objetos matemáticos.

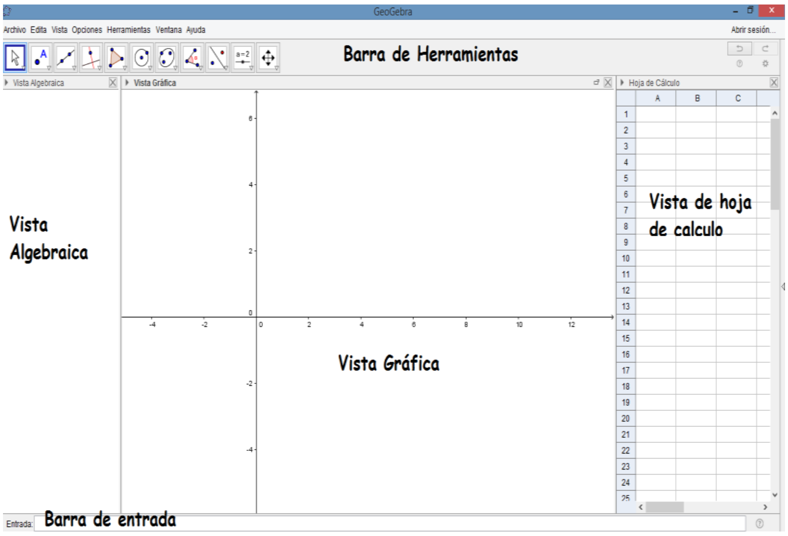
| | | |
|---|---|---|
| Vista Algebraica | Vista Gráfica | Vista gráfica 3D |
| Vista CAS | Hoja de Cálculo | Calculadora de Probabilidades |

Cada vista presenta su propia barra de herramientas con un repertorio de herramientas y comandos, así como Operadores y Funciones que permiten crear construcciones dinámicas con diferentes representaciones de los objetos matemáticos.

[38] Adaptado de: Manual de GeoGebra - GeoGebra Manual. (2017). Wiki.geogebra.org. https://wiki.geogebra.org/es/Manual

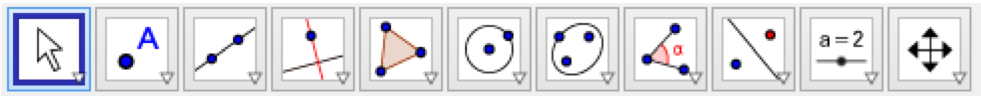
2. Vista de objetos matemáticos

El entorno de trabajo de GeoGebra cuenta con varias perspectivas para los objetos matemáticos: Vista gráfica, Vista Algebraica, Hoja de cálculo, Vista CAS y Calculadora de Probabilidades.




3. Creando Objetos Matemáticos

Podemos realizar construcciones geométricas utilizando el mouse y las herramientas de construcción disponibles en la Barra de herramientas.

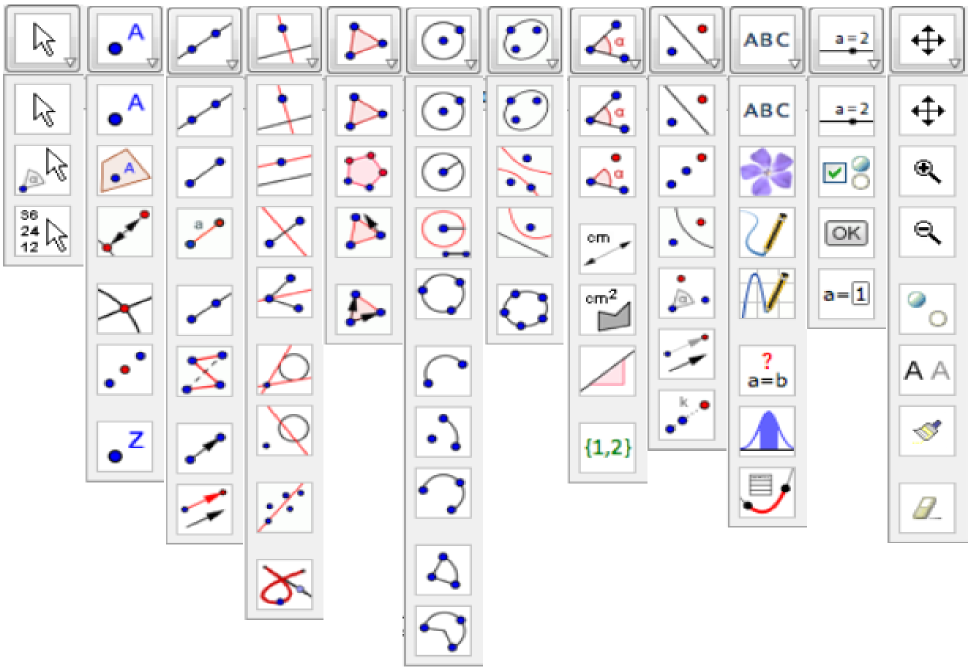



Todo objeto creado en Vista Gráfica tiene su equivalente algebraico. Por ejemplo, si creamos un punto desde la Vista Gráfica obtendremos automáticamente la Vista Algebraica del punto.

Para comenzar a crear Objetos Matemáticos, debemos elegir alguno de los instrumentos de construcción en la Barra de herramientas y luego seguir las instrucciones que en cada una de ellas se presentan. Para obtener ayuda adicional sobre cómo usar alguna de las herramientas, selecciónala con el mouse y después haz clic sobre este ícono  ubicado en la esquina superior derecha de GeoGebra.

4. Barra de Herramientas

Cada Vista tiene su propia Barra de Herramientas, la cual se muestra como una fila de Cajas de Herramientas, pero si hacemos doble clic sobre una de esas cajas se desplegará una columna con otra Caja de Herramientas de la misma clase de acción.




a. **Herramientas de desplazamientos**

- **Elige y Mueve:** Este es el modo en que se pasa a arrastrar y soltar objetos libres con el ratón o *mouse*. Basta seleccionar un objeto con un *clic*, estando activo **Elige y Mueve** para poder:
  - ➢ eliminarlo pulsando la tecla Del
  - ➢ desplazarlo con las teclas-flecha.
- **Gira en torno a un Punto** ( GeoGebra Escritorio): Después de seleccionar el punto libre que hará las veces de centro, puede rotarse a su alrededor los objetos libres que se elijan, simplemente arrastrándolos con el ratón o *mouse*.

b. **Herramientas de puntos**

- **Punto:** Con un *clic* sobre la **Vista Gráfica** se crea un nuevo punto. Sus coordenadas quedan establecidas al soltar el botón de ratón o *mouse* nuevamente.
- **Punto en Objeto:** Basta con activar la herramienta y luego seleccionar el objeto para fijar un punto a la región correspondiente. El punto creado podrá **desplazarse** pero solo dentro de los límites del **objeto**.
- **Limita/Libera Punto**: Para **liberar un punto** establecido como propio de un trayecto o región, basta un clic sobre tal punto para **desvincularlo** y que pase a ser libre.

- **Intersección:** Los puntos de intersección de los dos objetos pueden producirse de dos maneras:
  - Seleccionando dos objetos, se crean todos los puntos de intersección (si los hubiese / fuesen posibles)
  - Con un clic directo sobre la intersección de los dos objetos, se crea ese *único punto* de intersección.

- **Medio o Centro:** Con un clic podemos tener:
  - Uno y otro punto o un segmento, permite obtener su punto medio.
  - Una circunferencia, semicircunferencia o sección cónica (como la hipérbola o elipse), se puede obtener su centro.

- **Número Complejo:** Una vez activada esta herramienta, el valor del número complejo quedará asociado al punto en que se detenga el ratón o *mouse* en la **Vista Gráfica.**

c. **Herramientas de rectas**

- **Recta:** Al seleccionar o crear dos puntos, se traza la recta que pasa por ambos.

- **Segmento**: Al crear o seleccionar dos puntos, se establece un segmento con tales extremos.

- **Segmento de longitud dada**: Al crear o seleccionar dos puntos, se establece un segmento con tales extremos.

- **Semirrecta**: Al seleccionar dos puntos, se crea una semirrecta que parte del primero y pasa por el segundo.

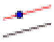
- **Poligonal**: Seleccionando los puntos libres que conformarán los sucesivos vértices (dos, al menos) quedará trazada la poligonal cuando se reitera el clic sobre el primer punto.

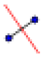
- **Vector:** Basta con seleccionar o crear el punto de origen y el de la punta o de aplicación para generar y **graficar** el vector.

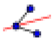
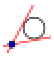
- **Equipolente:** Al seleccionar un punto A y un vector $\vec{v}$ se crea un nuevo punto B= A+$\vec{v}$, con origen en el punto A y extremo B, siendo igual a $\vec{v}$.

d. **Herramientas de trazados especiales**

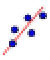
-  **Perpendicular:** Al seleccionar una recta (semi recta o segmento) y un punto, queda definida la perpendicular a la recta que pasa por el punto.

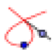
-  **Paralela:** Al seleccionar una recta y un punto, queda definida la paralela a la recta que pasa por el punto.

-  **Mediatriz:** La recta mediatriz se traza al seleccionar un segmento o un intervalo de este, como también puede trazarse entre 2 puntos que serían los extremos.

-  **Bisectriz:** La bisectriz de un ángulo puede definirse de dos maneras:
  - Al crear o seleccionar los tres puntos A, B y C se produce la bisectriz del ángulo determinado por A, B y C, con B como vértice.
  - Al seleccionar dos rectas se producen las bisectrices del par de ángulos opuestos por el vértice implicados.
-  **Tangentes**: La selección para el trazado presenta diferentes alternativas, como escoger:
  - Un punto A y una cónica c para producir todas las tangentes a c que pasan por A.
  - Una recta g y una cónica c (o función f) para trazar todas las tangentes a c (o a f) paralelas a g.
  - Dos circunferencias c y d para tender todas las tangentes comunes a ambas (hasta cuatro).
  - un punto A y la función f, para trazar la recta tangente a f por x = x(A).

-  **Polar o Conjugado**: Crea la recta polar o la recta del diámetro conjugado de una circunferencia u otra sección cónica según se seleccione:
  - Un punto y una cónica, lo que establece la recta polar
  - Un vector o su directriz (rectar, semirrecta o segmento) y una cónica, el correspondiente diámetro conjugado.

-  **Ajuste lineal:** Traza la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos, establecido de uno de estos modos:
  - La selección rectangular que enmarca a todos los puntos.
  - La de la lista de puntos cuyo mejor ajuste lineal se desea.

-  **Lugar Geométrico:** Lo primero que debe seleccionarse es el punto, como B, que depende de otro, como A, cuyo lugar geométrico va a trazarse. Debe hacerse **clic** en A posterior de B.

e. **Herramientas de polígonos**

- **Polígono:** Para trazar un polígono y que su área quede expuesta en la Vista Algebraica, basta con crear o seleccionar al menos tres puntos que constituirán sus vértices y, con un clic reiterado sobre el primero de ellos, cerrarlo.

- **Polígono regular:** Al seleccionar dos puntos, A y B y anotar un número n en el campo del cuadro emergente, se traza un polígono regular con n vértices, incluyendo A y B. En la Vista Algebraica, se expone el área del polígono.

- **Polígono rígido**: Seleccionando los puntos libres que conformarán los sucesivos vértices (tres, al menos) y el primero nuevamente quedará trazado el polígono rígido, por lo cual solo se podrá desplazar desde su primer vértice y/o rotarlo a su alrededor desde el segundo, pero no deformarlo.

- **Polígono vectorial:** Permite crear un polígono tal que, si se lo desplaza desde su primer vértice, lo hace manteniendo su forma como si fuera rígido. Los restantes vértices afectan al polígono de forma habitual. Para crear este tipo de polígono, basta con seleccionar la herramienta y al menos tres puntos libres, concluyendo con un clic sobre el primero.

f. **Herramientas de circunferencias y arcos**

- **Circunferencia (centro-punto):** Al seleccionar o crear un par de puntos, queda definida la circunferencia con centro en el primero que pasa por el segundo.

- **Circunferencia (centro-radio):** Tras seleccionar un punto M como centro, se despliega la caja de diálogo para ingresar el valor del radio.

- **Compás:** Al seleccionar un segmento o dos puntos, queda especificado el radio y un clic posterior lleva a crear o seleccionar el punto centro de la circunferencia a trazar.

- **Circunferencia que pasa por tres puntos**: Al seleccionar tres puntos, como A, B y C, queda definida una circunferencia que los cruza.

- **Semicircunferencia (puntos extremos)**: Al seleccionar o crear dos puntos como extremos del diámetro pretendido, se traza en sentido horario, una semicircunferencia entre el primero y el siguiente.

- **Arco de Circunferencia:** Deben seleccionarse tres puntos: el centro en primer lugar; luego su extremo inicial y finalmente el que determinará la longitud del arco.

- **Arco Tres Puntos:** Al crear o seleccionar tres puntos, se traza un arco de circunferencia que se inicia en el primero y finaliza en el tercero; perteneciendo el segundo al arco tendido entre estos extremos.

- **Sector Circular:** Deben seleccionarse o crearse tres puntos: primero su centro, luego el extremo inicial de su arco y finalmente el que determinará la longitud del arco del sector.

- **Sector Tres Puntos:** Al seleccionar o crear tres puntos, se produce un sector circular cuyo arco está entre el primero y el último, y el tendido entre ambos es el segundo punto.

g. **Herramientas de cónicas**

- **Elipse**: La elipse se trazará al seleccionar sus dos focos en primer lugar y luego, uno de sus puntos.

- **Hipérbola:** Para construir la hipérbola se deben seleccionar los dos focos y luego un punto de ella.

- **Parábola:** La parábola se trazará al seleccionar un punto, que será su foco, y la directriz (recta, semirrecta o segmento).

- **Cónica por cinco puntos:** Al seleccionar cinco puntos, queda definida una sección cónica que pasa por ellos.

h. **Herramientas de medición**

- **Ángulo**: Crea ángulos realizando selecciones de diversas maneras y diferentes secuencias de clic para establecer todos los ángulos de un polígono y el ángulo entre:
  - ➢ Tres puntos cuyo vértice es el segundo de ellos
  - ➢ Dos segmentos, dos rectas o dos semirrectas
  - ➢ Dos vectores

- **Ángulo dada su amplitud**: Seleccione un punto de un lado, luego el vértice e ingrese la amplitud del ángulo en el cuadro emergente.

- **Distancia o Longitud**: Mide la distancia entre dos puntos, dos rectas o un punto y una recta y la expone como texto dinámico en la Vista Gráfica.

- **Área:** Establece el área de un polígono, círculo o elipse cuyo valor se expondrá como texto dinámico en la Vista Gráfica.

- **Pendiente:** Mide la pendiente de una recta y la expone dinámicamente, ilustrada en un triángulo rectángulo adecuado en la Vista Gráfica, cuyas dimensiones pueden ajustarse en el Cuadro de Propiedades.

- **Lista:** En la Vista Gráfica, basta con encuadrar los objetos para reunirlos en una lista, selección a la que se le pueden aplicar simultáneamente un conjunto de atributos.

i. **Herramientas de transformación**

- **Simetría Axial:** Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser reflejado. Luego, haz un clic sobre la recta (semirrecta o segmento) para que quede establecido el eje de simetría a través del que se operará la reflexión.

- **Simetría Central:** Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser reflejado. Luego, haz un clic sobre el punto a través del cual se operará la reflexión.

- **Inversión**: Permite invertir un objeto geométrico por una circunferencia. Basta con seleccionar los objetos a invertir y luego la circunferencia para la inversión. Circunferencia cuyo centro será el de inversión y su radio al cuadrado, la que establece la correspondiente relación.

- **Rotación**: Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser rotado. Luego, haz clic sobre el punto que será el centro de rotación para que aparezca una ventana donde puede especificarse la amplitud del ángulo de rotación. Además, se tiene que indicar el sentido de rotación, es decir, si será Horario o Anti horario.

- **Traslación:** Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser trasladado y luego la herramienta. Después se selecciona el vector de traslación, o se hacen dos clics para crear un vector.

- **Homotecia:** Lo primero que debe seleccionarse es el objeto a ser escalado. Luego, haz un clic sobre el punto que será el centro de la homotecia para que aparezca un cuadro donde anotar el factor deseado.

j. **Herramientas de incorporación**

- **Texto:** Permite crear fórmulas y textos estáticos o dinámicos en la Vista Gráfica. Es necesario especificar la ubicación del texto, por medio de un clic sobre:
  - ➢ La Vista Gráfica para crear un nuevo texto en esa posición.
  - ➢ Un punto para crear un campo de texto cuya ubicación se vincula y asocia a dicho punto.

- **Imagen:** Permite insertar una imagen en la Vista Gráfica. Para ello se debe especificar la ubicación, de una de las siguientes maneras:
  - ➢ Un clic en Vista Gráfica fija la esquina inferior izquierda de la imagen.
  - ➢ Un clic sobre un punto se lo establece como su esquina inferior izquierda.

  Luego, en la caja de diálogo que se abre, se puede seleccionar una imagen de entre los archivos de formato gráfico que aparecen listados, almacenados en los directorios o carpetas que se examinan a tal efecto.

- **Lápiz:** Permite esbozar notas o dibujos a mano alzada en la Vista Gráfica.

- **Croquis**: Permite trazar a mano alzada:
  - ➢ Dibujos representativos de figuras geométricas. Incluso, como puede apreciarse animadamente en la imagen que aparece al pie, reconoce y establece con precisión segmentos, circunferencias, polígonos, etc.
  - ➢ Las gráficas de una función para apreciar su comportamiento.

- **Relación:** Permite seleccionar dos objetos para obtener, desplegada en una ventana emergente, información sobre la relación que pudiera vincularlos.

- **Inspección de funciones:** Permite analizar las funciones que se están estudiando.

k. **Herramientas de interacción**

- **Deslizador:** Es una representación gráfica de un número libre o ángulo libre, el cual se puede variar.

- **Casilla de Control:** Al dar clic sobre la Vista Gráfica se crea una casilla a tildar para exponer y ocultar uno o más objetos.

- **Botón**: Un clic en la Vista Gráfica permite insertar un botón, el cual permite establecer un dialogo.

- **Casilla de Entrada**: Un clic en la Vista Gráfica permite insertar una Casilla de Entrada. En la caja de diálogo emergente es posible establecer su subtítulo y su enlace al objeto vinculado.

I. **Herramientas generales**

- **Desplaza Vista Gráfica:** Se puede arrastrar y soltar la Vista Gráfica para cambiar la zona visible de esa área.

- **Aproximar:** Con un clic sobre cualquier punto del área gráfica, esta herramienta produce un zoom de acercamiento.

- **Alejar:** Con un clic sobre cualquier punto del área gráfica, esta herramienta produce un zoom de alejamiento que reduce los detalles y amplía el panorama.

- **Mostrar/Ocultar objeto:** Tras activar esta herramienta, basta seleccionar el objeto que se desee exponer u ocultar.

- AA **Mostrar/Ocultar etiqueta:** Con cada clic sobre uno y otro objeto, su rótulo o etiqueta se muestra u oculta alternativamente.

- **Copiar estilo visual**: Permite copiar las propiedades visuales (como color, dimensión, estilo lineal, etc.), desde un objeto a los de destino.

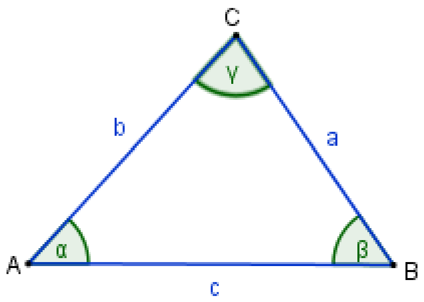
- **Eliminar:** Cuando está activa esta herramienta, haz clic sobre cada uno de los objetos que se desee borrar.

**Apéndice 7.4: Material para el docente: Demostración del teorema del coseno y del seno**

En el presente texto, encontrará la demostración del teorema del coseno y del seno, que se complementan con el GeoGebra de cada uno.

<u>Teorema del coseno</u>

Sea ABC un triángulo cualquiera, entonces se cumplen las siguientes identidades trigonométricas.



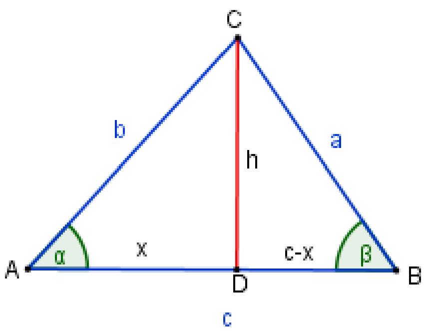

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$$

**Demostración:**

Considere un triángulo cualquiera, como el de la figura:




Observe que:

$\overline{AD} = x$
$\overline{DB} = c - x$
$\overline{CD} = h$
$m(\measuredangle BDC) = 90°$

Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo ADC, tenemos que:

$$b^2 = x^2 + h^2 \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo BDC, tenemos que:

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2 \qquad (2)$$

Al despejar h en la expresión (1) y al reemplazar en la expresión (2) el valor de h, se obtiene:

$$a^2 = (c - x)^2 + b^2 - x^2$$

Al desarrollar la expresión anterior

$$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + b^2 - x^2$$

Al reducir términos semejantes, se obtiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad\qquad (3)$$

Por **definición de coseno** se tiene en el triángulo rectángulo ADC que el $\cos\alpha = \frac{x}{b}$, por lo tanto, $x = \mathrm{b} \cdot \cos\alpha$

Al reemplazar $x = \mathrm{b} \cdot \cos\alpha$ en la expresión (3), se obtiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

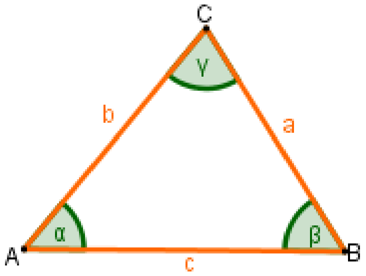
Análogamente se obtienen las expresiones

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$$

Teorema del seno

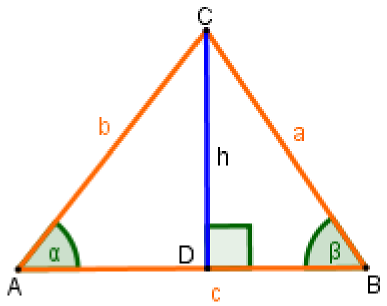
La medida de los lados de un triángulo es proporcional a los senos de los ángulos opuestos.

Sea ABC un triángulo cualquiera




$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$

**Demostración:**
Dado el triángulo de la figura, trazando la altura desde el vértice C del triángulo obtenemos h que delimita dos triángulos rectángulos.




Para el primer triángulo ADC tenemos que: $sen\,\alpha = \frac{h}{b}$

Por otro lado, tenemos que para el triángulo BDC: $sen\,\beta = \frac{h}{a}$

Despejando la altura h en ambas expresiones, obtenemos:

$$h = b \cdot sen\,\alpha$$
$$h = a \cdot sen\,\beta$$

Igualando ambas expresiones tenemos que:

$$b \cdot sen\,\alpha = a \cdot sen\,\beta$$

Por lo tanto,

$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b}$$

Análogamente, al trazar la altura desde el vértice A, se obtiene que:

$$\frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$

De acuerdo a las proporciones formadas anteriormente se puede afirmar que:

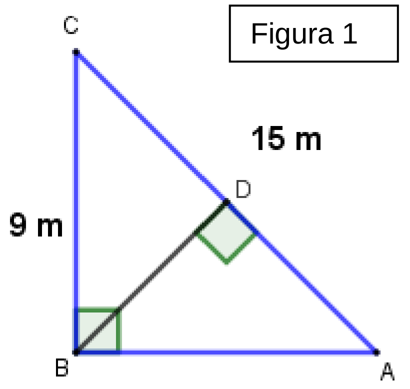
$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$

**Apéndice 7.5: Material para el docente: Ejercicios extra para las clases**

## I. Euclides

1. El canopy es uno de los deportes de aventura más difundidos en los últimos tiempos. Básicamente consiste en lanzarse por un cable, atado a grandes distancias y diferentes alturas, mediante una polea y un arnés sostenido a ella. Pues bien, supongamos que tenemos una situación problema en una instalación de este deporte, que se representa en la figura 1. ¿Cuánto debe desplazarse la polea para que la distancia entre D y C sea la menor posible? (Resp. 5.4 m)

Figura 1




## II. Semejanza

1. En un día soleado, un árbol de 7 m de alto proyecta una sombra de 10 m, mientras un hombre de 1,7 m de altura está parado al final de la proyección de la sombra del árbol. ¿Cuál es el largo de la sombra que proyecta el hombre? ¿Qué altura tiene un hombre que en el mismo instante proyecta una sombra de 2 m? (Resp. 2,43 m y 1,4 m)

## III. Razones trigonométricas

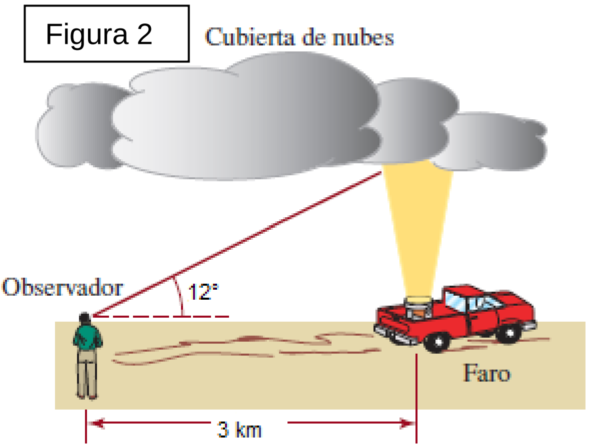
1. Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente a 70°. (Resp. 21,44 cm)

2. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 centímetros y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Calcular la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo. (Resp. Hipotenusa = 5,93 cm; Cateto = 3,48 cm; ángulo = 36°)

## IV. Aplicaciones de ángulo de elevación y depresión

1. El cielo de nubes es la altitud mínima que tiene la base de las nubes. En los aeropuertos, el cielo de nubes debe tener la altura suficiente para que los despegues y los aterrizajes sean seguros. Por la noche, se lo puede

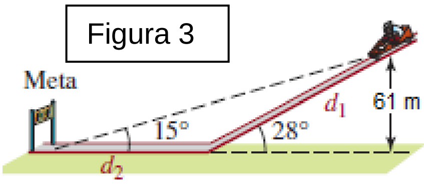
Figura 2



determinar iluminando la base de ellas, con un faro apuntado verticalmente hacia arriba (véase figura 2). Si un observador está a 3 km del faro, y el ángulo de elevación a la base de la nube iluminada es de 12°, calcule la altura del cielo de nubes. (Resp. 0,64 km)

2. Un automóvil va cuesta bajo, donde el ángulo de la pendiente es de 28° cuando el auto se encuentra a 61 metros, en ese mismo instante en la línea de la meta se encuentra un aficionado y mira al auto con un ángulo de elevación de 15° (véase figura 3) ¿A qué distancia se encuentra el automóvil de la línea de meta? (Resp. 242,87 m)

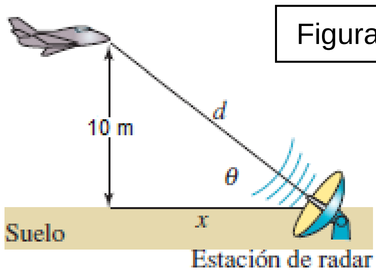
Figura 3




## V. Funciones trigonométricas e inversa

1. Un avión que vuela a 10 metros de altitud se acerca a una estación de radar, como muestra la figura 4.
   a. Expresar la distancia d entre el avión y la estación de radar en función del ángulo de elevación $\theta$.
   b. Expresar el ángulo de elevación $\theta$ del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

Figura 4




(Resp. a. $d(\theta) = \frac{10}{sen\ \theta}$ y b. $x(\theta) = \frac{10}{tan\ \theta}$ )

2. Un tramo recto de carretera de 8000 metros sube a una montaña de 1500 metros de altura. Determine el ángulo que forma la carretera con la horizontal. (Resp. 10,8°)

## VI. Identidades trigonométricas

1. Sabiendo que $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos\beta = \frac{7}{25}$, con $\alpha$ y $\beta$ ángulos agudos, calcular las siguientes expresiones.
   a. $\sin(\alpha + \beta)$
   b. $\cos(\alpha - \beta)$

(Resp. a. 0,94 y b. 0,8)

## VII. Aplicaciones del teorema del coseno y seno

1. Un poste de teléfono forma un ángulo de 82° con la horizontal. Como se ve en la figura 5, el ángulo de elevación del Sol es de 76°. Calcule la longitud del poste telefónico, si su sombra mide 3.5 m (suponga que la inclinación del poste se aleja del Sol, y está en el mismo plano que el poste y el Sol). (Resp. 9,07 m)

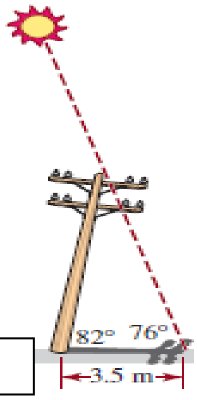


Figura 5

2. Dos barcos salen de un puerto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de N47°O y el rumbo del otro es S20°O, ¿cuál es su separación (redondeando a la milla náutica) a las 11:00 a.m. de ese día? (Resp. 74 millas náuticas)

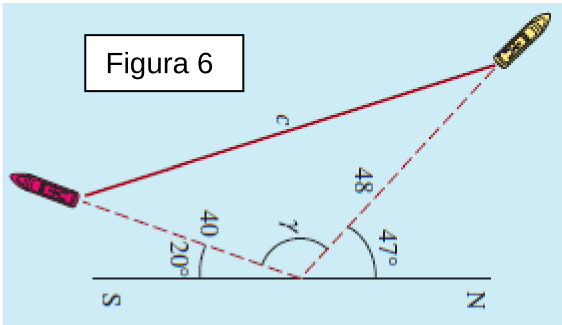


Figura 6

## Apéndice 7.6: Soluciones del material didáctico

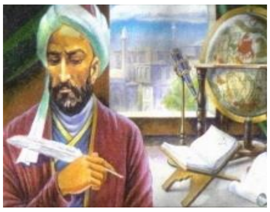
# Soluciones de las guías

## I. Guía 1: Pitágoras

1. $\overline{AC} = \sqrt{2}$; $\overline{AD} = \sqrt{3}$; $\overline{AE} = 2$

   $\overline{AD} = \sqrt{5}$
2. 4,03 m
3. 50,36 m
4. $\overline{OA} = 8{,}6\ cm$
5. 1,28 km
6. 104 m
7. 0,214 m
8. 14,28 km
9. 228,84 cm
10. Área I es $\frac{\pi b^2}{8}$, Área II es $\frac{\pi a^2}{8}$ y Área III $\frac{\pi c^2}{8}$
11. Área I es $\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$, Área II es $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ y Área III $\frac{\sqrt{3}c^2}{4}$
12. Área I es $\frac{3\sqrt{3}b^2}{2}$, Área II es $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ y Área III $\frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$

## II. Guía 2: Historia y tablas trigonométrica

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1. la cultura egipcia**  | **2. Aristarco de Samos**  | **3. Hiparco de Nicéia**  | **4. Claudius Ptolomeo**  |
| **5. Los astrónomos indios**  | **6. Nasir – Al Din – Al – Tusi**  | **7. Regiomontanus**  | |

## III. Guía 3: Aplicaciones trigonométrica en contexto

1. 4 m
2. 5442,26 m
3. 21,18 m
4. 21477,43 pies
5. 2,83 m
6. 347,39 m
7. 192,39 m
8. 22, 98 m y 35,75 m
9. 3085,53 m
10. 365509,96 km
11. 40,98 m
12. a. 1,301 y b. 2,222

## IV. Guía 4: Preparando la evaluación

Ítem 1

1.

a. a=7,48 cm; b=11,83 cm; c= 14 cm; h=6,32 cm.

b. b=7,27 cm; c= 11,57 cm; n= 4,57 cm; h=5,66 cm.

c. a=10,39 cm; b=6 cm; n=3 cm; h=5,19 cm.

2. 313,98 m.
3. 40 m.
4. 2,12 m.
5. 26,57 km

Ítem 2

1.

a. Por LLL el $\Delta ABC\sim\Delta DEF$.

b. Por AA el $\Delta QPR\sim\Delta STR$.

2. $\overline{EF} = 5\ cm$ y $\overline{DF} = 4\ cm$
3. 7,2 m
4. 3 m.

Ítem 3

1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13};\ \cos\alpha = \frac{12}{13};\ \tan\alpha = \frac{5}{12};\ \csc\alpha = \frac{13}{5};\ \sec\alpha = \frac{13}{12};\ \cot\alpha = \frac{12}{5};$

   $\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13};\ \cos\beta = \frac{5}{13};\ \tan\beta = \frac{12}{5};\ \csc\beta = \frac{13}{12};\ \sec\beta = \frac{13}{5};\ \cot\beta = \frac{5}{12}$
2. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c};\ \cos\alpha = \frac{a}{c};\ \tan\alpha = \frac{b}{a};\ \csc\alpha = \frac{c}{b};\ \sec\alpha = \frac{c}{a};\ \cot\alpha = \frac{a}{b};$

   $\operatorname{sen}\beta = \frac{a}{c};\ \cos\beta = \frac{b}{c};\ \tan\beta = \frac{a}{b};\ \csc\beta = \frac{c}{a};\ \sec\beta = \frac{c}{b};\ \cot\beta = \frac{b}{a}$
3. sen (α)= cos (β); cos (α)= sen (β); tan (α)= cot (β); cot (α)= tan (β); sec (α)= csc (β); csc (α)= sec (β)
4. 75,48 m.
5. 177,91 m y 214,59 m.
6. 23,25 m.
7. 46,49 km

## V. Guía 5: Circulo goniométrico

Ítem I:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha = 30°$ | $\sin\alpha = 0{,}5$ | $\cos\alpha = 0{,}87$ | P = (0,87, 0,5) |
| 2 | $\alpha = 90°$ | $\sin\alpha = 1$ | $\cos\alpha = 0$ | P = (0, 1) |
| 3 | $\alpha = 150°$ | $\sin\alpha = 0{,}5$ | $\cos\alpha = -0{,}87$ | P = (-0,87, 0,5) |
| 4 | $\alpha = 180°$ | $\sin\alpha = 0$ | $\cos\alpha = -1$ | P = (-1, 0) |
| 5 | $\alpha = 225°$ | $\sin\alpha = -0{,}71$ | $\cos\alpha = -0{,}71$ | P = (-0,71, -0,71) |
| 6 | $\alpha = 270°$ | $\sin\alpha = 0$ | $\cos\alpha = -1$ | P = (-1, 0) |
| 7 | $\alpha = 300°$ | $\sin\alpha = -0{,}87$ | $\cos\alpha = 0{,}5$ | P = (0,5, -0,87) |
| 8 | $\alpha = 360°$ | $\sin\alpha = 0$ | $\cos\alpha = 1$ | P = (1, 0) |

Ítem II

1. Negativo: cuadrante III y IV; Positivo: Cuadrante I y II.
2. Negativo: cuadrante II y III; Positivo: Cuadrante I y IV.
3. 0° y 180°.
4. 90° y 270°.
5. 90° y 270°.
6. 0 y 180°.

## VI. Guía 6: Funciones trigonométricas e inversas

### Guía A:

I. Trabajando con la función seno:

1. Para los ángulos 0°, 180° y 360°
2. Para 90°
3. Para 270°
4. Desde 1° hasta 179°
5. Desde 181° hasta 359°
7. Mínimo -1, máximo 1

6.

| Ángulo | Seno del ángulo |
|---|---|
| 30° | 0,5 |
| 390° | 0,5 |
| 750° | 0,5 |
| 1110° | 0,5 |
| 1470° | 0,5 |

| Ángulo | Seno del ángulo |
|---|---|
| 1830° | 0,5 |
| 2110° | -0,7666666 |
| 2550° | 0,5 |
| 2910° | 0,5 |
| 3270° | 0,5 |

El valor de color rojo debería reemplazarse por 2190°

**En resumen**

a. 0°, 180°, 360°
b. -1 y 1
c. 0° hasta 180°
d. 180° hasta 360°
e. 180° y 360°
f. Una unidad
g. 180°

II. Aplicando las funciones trigonométricas

a.

| Ángulo ϴ ($ϴ_0 = 0$) | Altura (h) |
|---|---|
| 0° | 50 |
| 10° | 76,568 |
| 20° | 102,329 |
| 30° | 126,5 |
| 40° | 148,346 |

| Ángulo ϴ ($ϴ_0 = 0$) | Altura (h) |
|---|---|
| 50° | 167,204 |
| 60° | 182,501 |
| 70° | 193,772 |
| 80° | 200,675 |
| 90° | 203 |

III. Aplicando las funciones trigonométricas inversas

El ángulo α = 53,130° y β = 28,072°

Guía B:

I. Trabajando con la función coseno:

1. Para los ángulos 90° y 270°
2. Para 0° y 360°
3. Para 180°
4. Desde 0° a 90°
5. Desde 90° hasta 270°
7. Mínimo -1, máximo 1

6.

| Ángulo | Coseno del ángulo |
|---|---|
| 30° | 0,86602… |
| 390° | 0,86602… |
| 750° | 0,86602… |
| 1110° | 0,86602… |
| 1470° | 0,86602… |

| Ángulo | Coseno del ángulo |
|---|---|
| 1830° | 0,86602… |
| 2110° | 0,64278… |
| 2550° | 0,86602… |
| 2910° | 0,86602… |
| 3270° | 0,86602… |

El valor de color rojo debería reemplazarse por 2190°

**En resumen**

a. 90°, 270°
b. 1 y -1
c. 0° a 90°
d. 180° a 270°
e. 180° y 0°
f. Una unidad
g. 360°

II. Aplicando las funciones trigonométricas inversas

a.

| Hora (6 AM = $t_0$) | Temperatura (T) | Humedad (H) |
|---|---|---|
| -12 | 28 | 40 |
| -9 | 24,485 | 45,857 |
| -6 | 16 | 60 |
| -3 | 7,514 | 74,142 |
| 0 | 4 | 80 |

b. Máximos: en T (-12) y H (0)

Mínimos: en T (0) y H (-12)

III. Aplicando las funciones trigonométricas inversas

El ángulo ϕ = 51,96°

## IX. Guía 7: Identidades trigonométricas

Actividad 3:

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5};\ \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{3};\ \tan\theta = \frac{3}{10};\ \csc\theta = \frac{5}{\sqrt{5}};\ \sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{5}};\ \cot\theta = \frac{10}{3}$

2. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \tan\theta = \frac{1}{2};\ \csc\theta = \sqrt{5};\ \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2};\ \cot\theta = 2$

## X. Guía 8: Aplicaciones del teorema del seno y coseno

1. 3,61 m
2. 5,03 km y 541 km
3. 9 km
4. 155,95 m
5. a) 836,20 pies

b) 5468,40 pies

6. Teorema del seno, 223,56 m
7. Carlos
8. 39,50 kilómetros
9. Comisaria A
10. a) 102,6°

b) 290,3°

11. 2,4 kilómetros
12. a) tramo EB = 2,68 Km y Tramo DE=0,95 Km

b)Tramo AE= 6,14 Km

c) 91,08

## XI. Guía 9: preparando la evaluación final

Ítem 1

1. 3,12 m
2. 21,85 pies
3. 31,34 m
4. a) 509,9 km/h ; b) 11,31°
5. 108,05 pies
6. 86,6 m
7. 2858,26 pies
8. a) 58,02 pies; b) 27,13 pies

Ítem 2

1. 37,38°
2. a) 78,05°; b) 84,08°
3. 36,62°
4. 42,48°
5. 19,1°

Ítem 3

1.

a) a= 9,47; β= 76,1°; γ= 53,9°

b) b= 15,62; α= 26,33°; γ= 33,67°

c) a= 10,31; β= 34,32°; α= 75,68°

2. El perímetro es 121,6 cm y el área es 583,13 $cm^2$
3. 2304,78 metros
4. 268,26 pies

Ítem 4:

A) $\sin\theta = \frac{3}{5};\ \cos\theta = \frac{4}{5};\ \tan\theta = \frac{3}{4};\ \csc\theta = \frac{5}{3}$

## XII. Desafío 1: Euclides

Problema 2. El observador 2 se encuentra a 44,89 m de la base del obelisco

## XIII. Ejercicios 1: Pitágoras

1. 15 dm
2. 25 cm

## XIV. Ejercicios 2: Euclides

1. a= 5,05 m y b=2,81 m
2. El puente se encuentra a 144,83 m de la casa del dueño.

## XV. Ejercicio 3: Semejanza

Por criterio AA los triangulo ABC es semejante con el triángulo FDC, por lo cual m es 30 cm y n es 60 cm

## XVI. Ejercicio 4: Razones trigonométrica

El ancho del rio es de 86,602 metros

## XVII. Ejercicios 5: Ángulo de elevación y depresión

El satélite se encuentra 615,09 km de altura sobre la ciudad

## XVIII. Ejercicios 6: Funciones trigonométricas e inversa

a. R=90 m y H=22,5 m
b. 30°

## XIX. Ejercicios 7: Identidades trigonométrica y Teorema del seno y coseno

2. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \tan\alpha = 2;\ \csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2};\ \sec\alpha = \sqrt{5};\ \cot\alpha = \frac{1}{2}$
3. 34,22 metros

## XX. Texto 1: Medición de ángulos

| Ángulos sexagesimales | Ángulos radianes |
|---|---|
| **30°** | $\frac{\pi}{6}$ |
| **90°** | $\frac{\pi}{2}$ |
| **60°** | $\frac{\pi}{3}$ |
| **45°** | $\frac{\pi}{4}$ |

## XXI. Texto 2: Ángulo de elevación y depresión

1. $\measuredangle 1$
2. $\measuredangle 3$

## XXII. Texto 3: Razones trigonométricas inversa

1. A) $\sec(x) = \frac{5}{4}$; B) $\csc(x) = \frac{5}{3}$; C) $\cot(x) = \frac{4}{3}$
2. A) $\sec(w) = \frac{37}{12}$; B) $\csc(w) = \frac{37}{35}$; C) $\cot(w) = \frac{12}{35}$

## XXIII. Diagnóstico: Conocimiento previos de trigonometría

| Pregunta | Respuesta |
|---|---|
| 1 | D |
| 2 | B |
| 3 | A |
| 4 | D |

| Pregunta | Respuesta |
|---|---|
| 5 | D |
| 6 | A |
| 7 | A |
| 8 | C |

**Apéndice 8: Encuesta de validación[39]**

# Encuesta de validación propuesta didáctica

Nombre: ___________________________________________________

Años de experiencia docente: ________________________________

Indique sus títulos y grados: ______________________________________

Indique sus años de experiencia docente: __________________________

Tipo de establecimiento en que se desempeña:

- ☐ Particular
- ☐ Particular subvencionado
- ☐ Municipal
- ☐ Otro

He enseñado trigonometría en el establecimiento:

- ☐ Si
- ☐ No

He utilizado plataformas educativas en mis clases

- ☐ Si
- ☐ No

En su calidad de evaluador experto, sus observaciones y valoraciones nos serán de gran utilidad para mejorar la propuesta didáctica de la clase invertida aplicada a la unidad de trigonometría en segundo de enseñanza media. Agradecemos de antemano su buena disposición y el tiempo utilizado para revisar el material entregado.

Para cada indicador escoja una valoración de acuerdo a la siguiente escala, considere que algunos ítems requerirán especificación dependiendo de su respuesta. Marque la puntuación que considere acorde a lo observado en la propuesta.

5: Totalmente de acuerdo
4: De acuerdo
3: Ni de acuerdo ni en desacuerdo
2: En desacuerdo
1: Totalmente en desacuerdo

[39] Puedes encontrar la encuesta de validación en Google Forms accediendo en el siguiente link: https://goo.gl/forms/WuBXw9fuu1ChAOe13

*1) Validación de secuencia de clase*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Las actividades de la clase están desarrolladas de forma clara. | | | | | |
| B | Los conceptos seleccionados son coherentes con el material (videos y/o textos) previos a la clase. | | | | | |
| C | Las actividades de clase son acordes al tiempo estipulado (2 HP / 1 hora 30 minutos) | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*2) Validación de diseño y presentación de guías y desafíos*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Las indicaciones generales son claras y de fácil comprensión. | | | | | |
| B | La presentación de la guía llama la atención y estimula a trabajar en ella gracias a su diseño. | | | | | |
| C | Los títulos asignados son coherentes con las actividades propuestas | | | | | |
| D | La redacción y el lenguaje es claro y apto para el nivel en el que se implementa la guía. | | | | | |
| E | Las actividades propuestas son adecuadas para realizarse en la sala de clases. | | | | | |
| F | El desarrollo de la guía no supera el tiempo asignado por el docente (dependiendo de la guía) | | | | | |
| G | Las imágenes puestas en las guías orientan al estudiante en el desarrollo de las actividades. | | | | | |
| Señale la(s) guía(s) o desafío(s) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*3) Validación de textos y ejercicios*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | La redacción y lenguaje son claros y de fácil comprensión. | | | | | |
| B | Los textos y ejercicios son de extensión corta y apropiadas para el tiempo predispuesto. | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| C | Los textos y ejercicios apuntan a los aprendizajes esperados. | | | | | |
| Señale el(los) texto(s) y/o ejercicio(s) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*4) Validación de videos*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | El uso de videos favorece el trabajo individual y la comprensión de los conceptos a trabajar. | | | | | |
| B | La duración del video es correcta para mantener la atención de los estudiantes. | | | | | |
| C | El contenido del video es acertado y apunta a los conceptos que se trabajarán en clases. | | | | | |
| D | La información entregada en los videos tiene una redacción clara y coherente. | | | | | |
| E | Los ejercicios presentes en los videos siguen la línea del contenido visto y se expresan de forma clara y coherente. | | | | | |
| F | La calidad técnica de los videos (audio, imagen, duración) son apropiadas para la comprensión de los conceptos involucrados en la unidad. | | | | | |
| G | El contenido matemático está libre de errores conceptuales. | | | | | |
| Señale el(los) video(s) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*5) Validación de guías*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | El material es coherente con el desarrollo de los conceptos a trabajar en la clase | | | | | |
| B | La complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media. | | | | | |
| C | La redacción y lenguaje son claros y no dan pie a interpretaciones erróneas. | | | | | |
| D | Las actividades propuestas cumplen con los objetivos de la clase. | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E | Las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas. | | | | | |
| F | Las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI. | | | | | |
| G | Las preguntas planteadas promueven el trabajo colaborativo y la comunicación entre pares. | | | | | |
| H | El contenido matemático está libre de errores conceptuales. | | | | | |
| I | El contenido planteado en las guías es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases. | | | | | |
| J | Los conceptos tratados en las guías están relacionados con otros conceptos anteriores o posteriores. | | | | | |
| Señale la(s) guía(s) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

6) *Validación de desafíos*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | Las actividades de la clase están desarrolladas de forma clara. | | | | | |
| B | La complejidad de las preguntas y actividades es acorde al nivel de segundo año de enseñanza media. | | | | | |
| C | Las actividades consideran el desarrollo de habilidades del siglo XXI. | | | | | |
| D | Las actividades desarrolladas promueven el trabajo colaborativo. | | | | | |
| E | Los desafíos planteados son apropiados para el tiempo predispuesto (según cada clase). | | | | | |
| F | La redacción y lenguaje son claros y no dan pie a interpretaciones erróneas. | | | | | |
| G | El contenido planteado en los desafíos es acorde a lo tratado en los videos previos a las clases. | | | | | |
| H | El contenido planteado en los desafíos está libre de errores conceptuales. | | | | | |
| I | Las preguntas planteadas favorecen el desarrollo de las habilidades matemáticas. | | | | | |
| Señale el(los) desafío(s) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*7) Validación de evaluaciones*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | El lenguaje y redacción de las evaluaciones es claro y preciso. | | | | | |
| B | Las instrucciones de las evaluaciones son claras y no permiten dobles interpretaciones. | | | | | |
| C | Los ejercicios elegidos para las evaluaciones son acordes al contenido visto en clases. | | | | | |
| D | Las rúbricas de evaluación permiten observar las habilidades matemáticas que se esperan fomentar en la unidad. | | | | | |
| E | Las evaluaciones cumplen con los objetivos de aprendizaje detallados en las bases curriculares utilizadas. | | | | | |
| F | La ficha de autoevaluación posee los indicadores adecuados para monitorear el trabajo clase a clase de los estudiantes. | | | | | |
| G | Las presentaciones clase a clase siguen un formato adecuado y coherente con la rúbrica de evaluación. | | | | | |
| H | La cantidad de evaluaciones es acorde al número de clases para la unidad. | | | | | |
| Señale la(s) evaluación(es) con mayor deficiencia de esta sección: | | | | | | |
| Comentarios: | | | | | | |

*8) Validación del uso de la red educativa EdModo*

| | Indicador | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | La red educativa es de fácil acceso e inscripción. | | | | | |
| B | El material presente es accesible y simple de localizar. | | | | | |
| C | El sitio promueve una buena interacción entre profesor y estudiante. | | | | | |
| D | La forma de utilizar el sitio es simple de entender y está libre de interpretaciones erróneas. | | | | | |
| E | El sitio cuenta con un buen espacio de ayuda que permite resolver dudas e inquietudes. | | | | | |
| F | La página es ordenada y su aspecto es agradable como red social educativa. | | | | | |
| G | Los enlaces vinculados al sitio (GeoGebra, YouTube) son de fácil acceso desde la red social educativa. | | | | | |
| H | El sitio tiene las herramientas necesarias para incentivar un aprendizaje significativo en los estudiantes. | | | | | |

| Comentarios: |
|---|
| |

9) Opinión: Su opinión sobre el modelo es igual de importante que la validación, marque a lo más tres casillas.

¿Qué le pareció más interesante de la metodología de clase invertida?

- ☐ El uso de videos
- ☐ La plataforma EdModo
- ☐ La aplicación en la unidad de trigonometría
- ☐ El trabajo dentro del aula
- ☐ El material utilizado
- ☐ La secuencia didáctica (antes y durante las clases)
- ☐ Las evaluaciones (autoevaluación, formativa y sumativa)

¿Qué adaptaciones le haría al modelo y/o material?

¿Utilizaría el modelo de clase invertida para sus clases? (opcional)

Apreciaciones finales (opcional)