

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FISICA



**APLICACIONES DE MECANICA CUANTICA
NO CONMUTATIVA
A SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS**

FELIPE ESTEBAN TORRES SANCHEZ

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**APLICACIONES DE MECANICA CUANTICA
NO CONMUTATIVA
A SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS**

FELIPE ESTEBAN TORRES SANCHEZ

Profesor Tutor : Dr. Fernando Méndez.
Profesores Comisión : Dra. Dora Altbir.
: Dr. Horacio Falomir.
: Dr. Jorge Gamboa.
: Dr. Marcelo Loewe.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

SANTIAGO – CHILE
Enero 2012

“APLICACIONES DE MECANICA CUANTICA
NO CONMUTATIVA
A SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS”

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO – CHILE
Enero 2012

“...Clama a mí, y yo te responderé, y te enseñaré cosas grandes y ocultas que tú no conoces....”

– Jeremías 33; 3 –

A mi esposa y nuestros hijos.

“APLICACIONES DE MECANICA CUANTICA NO CONMUTATIVA
A SISTEMAS DE MUCHAS PARTICULAS”

FELIPE ESTEBAN TORRES SANCHEZ

Este Trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Fernando Méndez, del Departamento de Física y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora del candidato:

Profesor Tutor : Dr. Fernando Méndez.

Profesores Comisión : Dra. Dora Altbir.

: Dr. Horacio Falomir.

: Dr. Jorge Gamboa.

: Dr. Marcelo Loewe.

.....

Director.

Agradecimientos

Primero agradecer muy especialmente a mi coautora, mi mejor amiga y mi esposa L. Karen Booth, sin ti nada de esto podría haber sido posible, te amo profundamente. Gracias por nuestros mejores resultados Felipe y Emilia, quienes son el motivo de nuestras vidas.

Durante el tiempo que me tomó realizar este trabajo, conté con el gran apoyo de mi tutor el Dr. Fernando Méndez, a quien debo agradecer su paciencia, su sabiduría y la confianza para poder comenzar mi propia investigación. Otro pilar fundamental en mi formación como científico ha sido el Dr. Jorge Gamboa, a quien debo agradecer toda su paciencia y dirección.

Quisiera agradecer de forma muy especial a los profesores Dr. Marcelo Loewe y Dr. Horacio Falomir por sus comentarios, disposición y dedicación para revisar esta tesis, y en particular agradecer de forma doblemente especial a la profesora Dra. Dora Altbir, por su gran apoyo.

De forma muy especial quisiera agradecer también al Dr. Ashok Das, por su apoyo académico, su amistad y su compañía durante mi estadía en la Universidad de Rochester N.Y.

Agradezco las discusiones y los consejos de los profesores del departamento de física: Dr. Justo Lopez, Dr. Mikhail Plioutchai, Dr. Juan Carlos Retamal, Dr. Enrique Cerda, Dr. Daniel Serafini, entre otros.

No puedo dejar de agradecer el apoyo incondicional de mi familia con quienes he contado durante toda mi vida, en especial agradecer a Clarisa Salinas y Amalia Sánchez, por toda su dedicación y afecto. A mis tíos Jorge Sánchez y Pamela Herrera por su comprensión, guía y amistad.

También agradecer a Ernesto Mandujano, quien a sido un padre y un gran amigo para mí, a mi compadre y mejor amigo P. Jose Raad, a mi hermano Cristian Torres, a todos mis primos y a la familia Booth Sepulveda, en particular a Stephen, Kristen y Carlos Booth.

Finalmente agradecer la compañía, el apoyo y el cariño durante todos estos años a todos cuantos participaron en este proceso.

Resumen

En esta tesis se estudia sistemáticamente el problema de un sistema de muchas partículas, utilizando un modelo tridimensional de mecánica cuántica no conmutativa, covariante bajo rotaciones.

En particular se revisa el problema de la superconductividad no convencional de spin triplete, utilizando el mecanismo de apareamiento de Cooper, sobre un espacio no conmutativo covariante bajo rotaciones.

Como resultado de este procedimiento, en la formación de los pares de Cooper se incluye tanto el estado de spin singlete como el triplete, siendo este último el estado de menor energía en el caso no conmutativo. Luego, utilizando este mecanismo generalizado, se estudia el problema de la superconductividad de spin triplete.

La conclusión es que la no conmutatividad provee un mecanismo para la formación de un superconductor triplete, en base al mecanismo estándar utilizado en la teoría BCS generalizada.

Es importante destacar que las propiedades de la superconductividad triplete en el presente caso han sido observadas experimentalmente.

Índice general

1. Introducción	1
2. Mecánica Cuántica No-Conmutativa con grados de libertad de Spin	11
2.1. Espacio No Conmutativo y $SO(3)$	12
2.2. Dinámica de un Sistema No Conmutativo	13
2.3. Sistemas de Partículas Interactuantes	18
2.4. Conclusiones del Capítulo	20
3. Generalización del Mecanismo de apareamiento de Cooper	22
3.1. Apareamiento de Cooper	22
3.1.1. Estado de Spin Singlete	26
3.2. Generalización del Mecanismo de Cooper	27
3.3. Estados de spin singlete	29
3.4. Estados de spin triplete	31
3.5. Conclusiones del Capítulo	33
4. Superconductividad de Spin Triplete	35
4.1. Superconductividad Convencional	36
4.2. Superconductividad No Convencional	38
4.2.1. Aproximación de Campo Medio	40

4.2.2. Hamiltoniano Reducido	41
4.2.3. Diagonalización	43
4.3. Mecánica Cuántica No Conmutativa y	
Superconductividad No Convencional de Spin Triplete	45
4.4. Vector Gap	47
4.5. Apareamiento Unitario y No Unitario	49
4.6. Ecuaciones de Autoconsistencia	51
4.7. Conclusiones del Capítulo	53
5. Conclusiones generales y problemas abiertos	55
A. Artículos Publicados	58
A.1. Generalization of the Cooper pairing mechanism for spin-triplet in superconductors	59
A.2. Gravitational Lensing in an Energy-Dependent Space-Time Metric .	67
A.2.1. Introduction	68
A.2.2. Geodesic Approach	70
A.2.3. Lens Equation in RG	77
A.2.4. Discussion and Conclusion	85
B. Potencial de contacto atractivo doble delta	92
C. Interacción de spin	97
D. Interacción electrón-fonón	100
E. Pares de Electrones	105

F. Transformación de Bogoliubov	111
F.1. Operadores Bosónicos	111
F.2. Operadores Fermiónicos	113

Índice de figuras

3.1. Soluciones simultáneas de (3.33).	34
A.1. Simultaneous solution of (A.33).	66
B.1. Soluciones simultáneas parte par.	95
B.2. Soluciones simultáneas parte impar.	96

Capítulo 1

Introducción

El inicio del siglo XX fue testigo del nacimiento de dos de las teorías más exitosas de la física actual, a saber, relatividad general y mecánica cuántica. Sin embargo, a pesar de que estas dos teorías nos permiten describir una gran cantidad de fenómenos, aún existen varios problemas abiertos que no se han podido entender bajo esta descripción. Este hecho sugiere la posibilidad de implementar nuevas herramientas que nos permitan al menos vislumbrar posibles soluciones a algunos de estos problemas.

Un antigua idea que surgió mediante esta línea de razonamiento, es la no conmutatividad. En efecto, en los inicios de la teoría cuántica de campos, una propuesta que intentaba resolver los problemas de las auto-energías divergentes, fue la posibilidad de implementar un espacio no conmutativo¹.

Esta propuesta se debe originalmente a Heisenberg, quien sugirió a Peierls, que un principio de incerteza en las coordenadas podría disminuir los problemas de las auto-energías [1]. Luego motivado por esta sugerencia, Snyder cons-

¹ Lo que es equivalente a un principio de incerteza entre las coordenadas.

truyó un espacio-tiempo con relaciones de conmutación, de la forma²

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $\mu = 0, 1, \dots$ y $\theta_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico. Como resultado, este espacio no conmutativo preserva la invariancia de Lorentz [2], si $\theta_{ij} = a^2 \epsilon_{ijk} L_k$ y $\theta_{0i} = a^2 M_i$, con a una escala de distancia, que regula los efectos de no conmutatividad.

Recientemente el descubrimiento del mapa de Seiberg-Witten [3], despertó nuevamente el interés en la no conmutatividad, la cual ha sido estudiada en diversos contextos, tales como teoría de cuerdas [3, 4], geometría no conmutativa [5, 6], D-branas [7, 8], gravedad cuántica [9, 10, 11, 12] y teoría cuántica de campos no conmutativa [13, 15, 14, 16, 17, 18, 19].

En física de altas energías, la construcción de una teoría cuántica de campos sobre un espacio-tiempo no conmutativo, ha sido una propuesta que ha despertado gran interés por su relación con la violación de la simetría de Lorentz [29, 21]. No obstante, en la gran mayoría de los experimentos realizados, los resultados indican que los efectos debidos a la violación de la simetría de Lorentz, están altamente suprimidos [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

Por otra parte, como límite de bajas energías, una propuesta que ha sido ampliamente explorada los últimos años es la construcción de una teoría de mecánica cuántica no relativista sobre un espacio no conmutativo [34, 35, 36, 37, 38, 41].

En este caso la propuesta de un álgebra no conmutativa, obedece al hecho de que en una teoría no relativista, el tiempo es sólo un parámetro, y por tanto, la deformación del espacio sólo afecta a las coordenadas, i.e. se proponen relaciones de conmutación, de la forma

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad (1.2)$$

²A lo largo de esta tesis, las coordenadas conmutativas serán denotadas por x_i y las coordenadas no conmutativas por \hat{x}_i .

donde θ_{ij} es un tensor antisimétrico.

Utilizando un espacio no conmutativo con este tipo de relaciones de conmutación, se ha demostrado que un modelo de mecánica cuántica no conmutativa puede ser escrito como un modelo de mecánica cuántica estándar, [35, 37, 38]. Esta equivalencia entre dos modelos distintos, sugiere la posibilidad de utilizar el modelo sencillo para describir un fenómeno. De tal forma que si el sistema en el espacio no conmutativo es más simple, la no conmutatividad en este caso, se puede entender como una herramienta que permitiría simplificar el estudio de un sistema cuántico.

Es importante destacar que en el contexto de mecánica cuántica, un interesante escenario donde emerge la no conmutatividad es en el problema de Landau [74]. En este caso el sistema admite de forma natural una descripción en términos de variables no conmutativas. Presumiblemente este es el primer ejemplo de un problema de mecánica cuántica no conmutativa. Por lo demás, se ha demostrado que la no conmutatividad también podría ser relevante en la teoría del efecto Hall cuántico [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47].

De esta forma, motivados por los ejemplos anteriores, en esta tesis exploraremos los efectos de la no conmutatividad en sistemas de muchas partículas interactuantes. El propósito de esto, es intentar explicar fenómenos que a la luz de la teoría estándar aun no encuentran una completa descripción. Siguiendo esta línea de argumentación, es posible encontrar diversos ejemplos de sistemas de este tipo, donde ha sido necesario implementar nuevas ideas. Tal es el caso de los superconductores no convencionales [48, 49, 50, 51, 59, 53, 54] donde aun no existe un consenso sobre el mecanismo que provoca la superconductividad.

La superconductividad convencional se debe a la condensación de un conjunto de pares de electrones de conducción a bajas temperaturas, los que se

encuentran en un estado de spin total $s = 0$ (singlete) y con momento angular orbital (relativo) $l = 0$, i.e. es decir en un estado con un momento magnético nulo. El mecanismo para la formación de estos pares, es la interacción electrón-fonón. Dicha interacción genera estados de pares de electrones mediante el mecanismo de apareamiento Cooper³.

Por otra parte, se llama superconductividad no convencional, al estado condensado formado por pares de electrones ya sea con $s \neq 0$ o con $l \neq 0$. Actualmente no existe un consenso acerca del tipo de interacción responsable para la formación de pares en estos casos. De hecho, el caso de un superconductor de spin triplete $s = 1$ [55, 56, 57, 58, 59, 92, 61, 62] es excluido por el mecanismo electrón-fonón.

El propósito de esta tesis, será estudiar las consecuencias fenomenológicas de la no conmutatividad en sistemas de muchas partículas a bajas temperaturas. En particular, nos concentraremos en el problema del mecanismo microscópico de la superconductividad no convencional de spin triplete.

La tesis está basada principalmente en el estudio sistemático de este problema. De esta forma, comenzando por el estudio del apareamiento de Cooper, en un espacio no conmutativo, se obtiene una generalización de este mecanismo que permite incluir el estado de spin triplete. Luego, utilizando este mecanismo estudiaremos el problema de la superconductividad con el formalismo de segunda cuantización.

Es importante destacar que el propósito de utilizar no conmutatividad en estos

³A bajas temperaturas, las propiedades macroscópicas de un sistema de muchas partículas se ven fuertemente afectadas por las interacciones entre ellas, de tal manera que cualquier modificación inducida por no conmutatividad, sin importar lo pequeña que pueda ser, puede producir un efecto observable a escalas macroscópicas.

problemas, es implementar una herramienta adicional que permita generalizar el mecanismo del apareamiento de Cooper, incluyendo el estado de spin triplete como el estado de menor energía.

A continuación se describe con un poco más de detalles los problemas que serán desarrollados en esta tesis:

Generalización del mecanismo de apareamiento de Cooper

En 1956 L.N. Cooper demostró que si en un mar de Fermi surge una interacción atractiva entre dos electrones con energías cercanas a la energía de Fermi, entonces, el estado formado por el par de electrones, tiene menor energía que el estado de los dos electrones libres, [63].

En el espacio de coordenadas, la interacción atractiva en el caso de Cooper, se reproduce por medio de un potencial delta atractivo $V(\mathbf{r}) = -\gamma\delta(\mathbf{r})$. A cortas distancias, los estados de los dos electrones sólo difieren por su proyección de spin, de tal manera que, por el principio de exclusión de Pauli, se favorece la formación de pares de electrones en el estado de spin singlete.

De esta forma, una posible modificación que permitiría incluir el estado de spin triplete en este mecanismo, como un estado de menor energía que el singlete, es proponer una interacción de la forma $-\delta(\mathbf{r} + \mathbf{a})$, con \mathbf{a} un vector constante. Sin embargo, esta modificación destruye la paridad del potencial delta, y por tanto, no permite descomponer la función de onda en una parte espacial con paridad definida y una parte espinorial .

En base a este argumento, una posible solución del problema, podría ser utilizar un potencial doble delta de la forma,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}V_0(\delta^{(3)}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a})). \quad (1.3)$$

Aunque esta elección permite construir estados de spin total definido, es el estado singlete quien en este caso se ve privilegiado energéticamente por sobre el estado triplete, ver apéndice (B).

Sin embargo, las modificaciones en el potencial producidas por una no conmutatividad de las coordenadas inducen de forma natural la construcción de potenciales con la estructura de (1.3), donde las coordenadas han sido desplazadas

por un término proporcional al spin total del par. En este caso, el estado triplete tiene menor energía que el estado singlete.

Superconductividad Triplete inducida por una generalización del mecanismo de Cooper

Dentro de un metal los electrones están sometidos a distintos tipos de interacciones, entre las que se incluye: la interacción de Coulomb atractiva entre electrón-ion, la interacción de Coulomb repulsiva entre electrón-electrón y la interacción entre los electrones y las vibraciones de la red o fonones.

La primera de estas interacciones, depende fuertemente de la estructura periódica de la red y es la responsable de la aparición de bandas y gaps en el espectro de energía de los electrones, lo cual describe en buena medida, las propiedades de conductores, dieléctricos y semiconductores, comúnmente a temperatura ambiente.

Despreciando los efectos de la estructura cristalina de la red, las interacciones a considerar ahora son electrón-electrón y electrón-ion, de estas, la primera es siempre repulsiva, de manera que la única forma de obtener una interacción atractiva entre electrones, que permita la formación de pares Cooper, reside en la interacción electrón-ion.

A través de la interacción electrón-ion, un par de electrones con energías cercanas a la energía de Fermi y con momentos k y $-k$, experimentan una interacción atractiva, ver apéndice C.

Una rápida estimación, que permite mostrar que este tipo de interacción resulta ser relevante a bajas temperaturas es el siguiente. Experimentalmente se encuentra que la energía de transición entre la fase normal y la superconductora está dada por $E = kT_c$. Para una temperatura crítica del orden de $T_c \sim 1K$, se obtiene $E \sim 10^{-4}eV$.

Por otra parte, si los procesos de scattering de los electrones se deben a procesos de absorción y emisión de fonones, entonces el aumento de energía transferido desde la red a un electrón, se puede estimar desde la energía cinética de un electrón en movimiento relativo con el ion⁴. Utilizando que la velocidad de propagación del sonido en un metal es del orden de $v \sim 10^3m/s$, entonces la energía cinética de este electrón es del orden de $E_0 \sim MeV(v/c)^2 = 10^{-4}eV \sim E$. Esto indica que a bajas temperaturas, la energía de interacción electrón-fonón es del orden de la energía de transición y por tanto, resulta ser relevante en la superconductividad.

De esta forma, si la interacción electrón-fonón predomina sobre la repulsión electrón-electrón entonces la interacción neta resulta ser atractiva, lo que da paso a la formación de pares de Cooper.

Sin embargo, la teoría microscópica de BCS [64] incluye un requerimiento adicional, a saber, que a $T = 0$ se produce la condensación de los pares de

⁴Esto es sólo una estimación, la que en ningún caso se debe entender, como que los electrones en un superconductor se mueven con la misma velocidad que los iones, de hecho, los electrones de conducción en un metal se mueven a velocidades mucho mayores que la velocidad de propagación de los fonones.

Cooper. Este requerimiento, es fundamental para poder definir el estado base del sistema.

La idea central de la teoría BCS, es suponer que a $T = 0$ este estado base está formado por un número muy grande de pares de Cooper, número del orden de una fracción del número total de partículas.

Luego, cuando se incrementa la temperatura, los estados excitados del sistema se obtienen a partir del estado base destruyendo pares de Cooper. De manera que las excitaciones se describen ahora como las excitaciones de un estado normal metálico, i.e. en términos de pares electrón-hueco.

En base a esta suposición, es posible calcular la temperatura crítica del sistema, como la temperatura donde la fase metálica coincide con la fase superconductora, i.e. cuando se han destruido todos los pares de Cooper

Las modificaciones inducidas por la no conmutatividad en este caso, permiten estudiar la condensación de pares de Cooper en el estado de spin triplete. En otras palabras, proveen un mecanismo para la formación de un superconductor de spin triplete.

La presente tesis está organizada como sigue: En el capítulo II estudiaremos la construcción de un espacio no conmutativo covariante bajo rotaciones, donde sólo se han deformando las relaciones de conmutación de las coordenadas. Luego revisaremos la construcción de una teoría de mecánica cuántica no conmutativa sobre este espacio.

En el capítulo III se discute la generalización del mecanismo de Cooper. Y en el capítulo IV se aplica este mecanismo al problema de la superconductividad de spin triplete.

Finalmente en el capítulo V se discuten las conclusiones generales junto algunos resultados preliminares y futuras líneas de investigación.

En lo que sigue utilizaremos unidades naturales con $\hbar = 1$, y $c = 1$, con lo cual el spin resulta ser una cantidad adimensional, el tiempo se mide en unidades de longitud y la energía, la masa y el momento en unidades del inverso de la longitud.

Capítulo 2

Mecánica Cuántica No-Conmutativa con grados de libertad de Spin

En este capítulo, revisaremos la construcción de un espacio no conmutativo, como fue originalmente propuesto en [65], donde se incluyen los grados de libertad del spin en las relaciones de conmutación de las coordenadas. A continuación será revisada la construcción de una teoría de mecánica cuántica, sobre este espacio no conmutativo.

Con el objetivo de estudiar sistemáticamente el problema de muchas partículas, se extenderá la aplicación del modelo de mecánica cuántica, al caso de un sistema de partículas interactuantes, donde se estudiará en detalle el problema de los estados ligados.

A diferencia de los modelos de no conmutatividad en dos dimensiones, en [65], se presenta un modelo de un espacio no conmutativo tridimensional. En este caso, las relaciones de conmutación de las coordenadas incluyen los grados de libertad de spin, de manera que el álgebra es covariante bajo rotaciones.

Cabe señalar, que debido a la naturaleza matricial del spin, las coordenadas

no conmutativas en este caso resultan ser matrices.

2.1. Espacio No Conmutativo y $SO(3)$

En general, los modelos de mecánica cuántica no conmutativa se construyen en un espacio bidimensional [34, 35, 36, 37, 38, 66, 67, 68], donde las relaciones de conmutación deformadas ¹ están dadas por

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad (2.1)$$

donde $i, j = 1, 2$ y θ_{ij} las componentes de una matriz constante de 2×2 , de manera que el álgebra es covariante bajo el grupo de simetría abeliano $SO(2)$. Sin embargo, las relaciones de conmutación (2.1), extendidas al caso tridimensional, no son covariantes bajo el grupo de rotaciones $SO(3)$.

En relación con lo anterior, una álgebra no conmutativa que preserve la simetría de rotación en tres dimensiones, es el álgebra propuesta en [65]

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\theta^2 \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, & [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, & [\hat{s}_i, \hat{s}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \\ [\hat{x}_i, \hat{s}_j] &= i\theta \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, & [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}, & [\hat{s}_i, \hat{p}_j] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es importante destacar que en estas relaciones de conmutación, tanto las coordenadas \hat{x} como los los momentos \hat{p} , heredan la naturaleza matricial del spin. De tal manera que si \hat{p} y \hat{s} son matrices hermíticas, entonces \hat{x} resulta ser una matriz hermítica, como puede observarse directamente de la relación de conmutación entre las coordenadas y el spin.

¹ Las variables no conmutativas serán denotadas por \hat{x} , \hat{p} y \hat{s} .

2.2. Dinámica de un Sistema No Conmutativo

Por otra parte, la dinámica de cualquier sistema cuántico conmutativo está gobernado por la ecuación de Schrödinger [74, 75]. De esta forma, siguiendo la idea propuesta en [65], la dinámica de cualquier sistema no conmutativo está gobernada por una ecuación de Schrödinger, en variables no conmutativas, de la forma

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle = H_{NC}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})|\Psi(t)\rangle. \quad (2.3)$$

Sin embargo, al proyectar esta ecuación sobre un espacio de coordenadas no conmutativas, la función de onda $\Psi(\hat{\mathbf{x}}, t) = \langle \hat{\mathbf{x}} | \Psi(t) \rangle$ resulta ser una función dependientes de coordenadas matriciales que no conmutan entre sí, de tal manera que la noción de distancia en este espacio necesita una prescripción adicional de ordenamiento. Esto no quiere decir que la propuesta de un espacio no conmutativo sea inconsistente. Sólo indica que es necesario proyectar la ecuación de Schrödinger no conmutativa sobre otro espacio.

Una forma alternativa de solucionar este problema fue presentada en [65]. En este caso se utiliza un cambio de base que permite recuperar el espacio conmutativo estándar, y de esta forma, distinguir los efectos de la no conmutatividad en un espacio conmutativo, [34, 35, 36, 37, 38, 66, 67, 68, 69, 70].

De esta forma, un cambio de base que permite describir el álgebra (2.2) en términos de las coordenadas conmutativas, se obtiene a partir de la transformación

$$\hat{x}_i = x_i \mathbf{1} + \theta s_i, \quad \hat{p}_i = p_i \mathbf{1}, \quad \hat{s}_i = s_i, \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{1}$ es la identidad en el espacio de las matrices de spin, el cual será omitido por simplicidad en lo sigue, de manera que $x_i \mathbf{1}$ y $p_i \mathbf{1}$, sólo serán denotados por x_i y p_i .

Utilizando este cambio de base y las relaciones de conmutación en (2.2), se sigue que el álgebra de las variables x_i , p_i y s_i , está dada por

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k, \quad (2.5)$$

$$[x_i, s_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\delta_{ij}, \quad [s_i, p_j] = 0, \quad (2.6)$$

de esta forma, las variables conmutativas satisfacen el álgebra de Heisenberg.

Este procedimiento, tiene la ventaja de incorporar los efectos de la no conmutatividad directamente en el Hamiltoniano, sin la necesidad de calcular un producto generalizado. Como sucede en el caso, en que la no conmutatividad se representa por un producto modificado entre funciones [35, 71, 72, 73]. En efecto, utilizando el cambio de base (2.4) la ecuación de Schrödinger no conmutativa se lee

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle = H_{NC}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{s}, \mathbf{p})|\Psi(t)\rangle, \quad (2.7)$$

como resultado el potencial ha sido desplazado por $\mathbf{x} + \theta\mathbf{s}$.

Es importante señalar que en este caso, al proyectar sobre la base de coordenadas $|\mathbf{x}\rangle$, $\Psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \Psi(t) \rangle$ resulta ser un spinor que depende de coordenadas conmutativas.

Finalmente, y en vista de que $tr(s_i) = 0$, entonces, es directo mostrar que la coordenada conmutativa x_i , se puede escribir en términos de la coordenada no conmutativa \hat{x}_i , a través de la relación

$$x_i = \frac{tr(\hat{x}_i)}{tr(\mathbf{1})}. \quad (2.8)$$

Esta relación junto con (2.4), nos proveen de un mapa entre el álgebra de variables no conmutativas y las variables conmutativas, lo que a su vez nos permitirá describir la dinámica de un sistema no conmutativo en un espacio conmutativo.

Una razón suficiente para introducir una mínima modificación de esta álgebra es la siguiente. En el caso de un sistema de dos partículas (denotadas por 1 y 2), y en el sistema reducido, el potencial se escribe como una función que depende de la coordenada relativa $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2^2$, el cambio de base que permite pasar a las coordenadas conmutativas indica que la coordenada relativa no conmutativa se escribe como $\hat{x} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \theta(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)$, donde \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son las coordenadas conmutativas y \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 los spin. De esta forma el potencial depende de la coordenada relativa y el spin relativo, y como resultado la base estándar de spin total no permite diagonalizar el Hamiltoniano en este caso.

Sin embargo, si en la propuesta de un álgebra no conmutativa (2.2), se reemplaza $\theta \rightarrow i\theta$, entonces es posible construir una coordenada relativa no conmutativa que en el espacio conmutativo se escriba en términos de la coordenada relativa y el spin total. Esta modificación del álgebra será estudiada en la próxima sección y será el álgebra utilizada para estudiar el problema de la superconductividad triplete.

Como resultado de reemplazar $\theta \rightarrow i\theta$ en el álgebra (2.2), obtenemos:

- Las relaciones de conmutación de la forma

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = -i\theta^2 \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \quad (2.9)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{s}_j] = -\theta \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{s}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (2.10)$$

como resultado las coordenadas no conmutativas \hat{x}_i en este caso, son matrices no hermíticas. Por lo tanto, las variables \hat{x}_i no representan una observable del sistema. Adicionalmente este hecho indica que el álgebra incluye

² Para cada partícula se propone un álgebra no conmutativa.

relaciones de conmutación de la forma

$$[\hat{x}_i^\dagger, \hat{x}_j^\dagger] = -i\theta^2 \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \quad [\hat{x}_i^\dagger, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad (2.11)$$

$$[\hat{x}_i^\dagger, \hat{s}_j] = \theta \epsilon_{ijk} \hat{s}_k, \quad [\hat{x}_i^\dagger, \hat{x}_j] = i\theta^2 \epsilon_{ijk} \hat{s}_k. \quad (2.12)$$

- En este caso, el cambio de base que permite recuperar un álgebra conmutativa resulta ser

$$\hat{x}_i = x_i \mathbf{1} + i\theta s_i, \quad \hat{x}_i^\dagger = x_i \mathbf{1} - i\theta s_i, \quad (2.13)$$

$$\hat{p}_i = p_i \mathbf{1}, \quad \hat{s}_i = s_i, \quad (2.14)$$

- Finalmente la ecuación de Schrödinger no conmutativa se lee como

$$i\partial_t |\Psi\rangle = H_{NC}(\mathbf{x} + i\theta \mathbf{s}, \mathbf{p}) |\Psi\rangle. \quad (2.15)$$

Sin embargo, debido a la no hermiticidad de las coordenadas no conmutativas \hat{x}_i , este Hamiltoniano podría no ser hermítico.

De esta forma la variable no conmutativa en este caso resulta ser no hermítica. Sin embargo, en este caso sí es posible proponer una coordenada relativa no conmutativa que se escriba en términos de la coordenada relativa conmutativa y el spin total. En efecto, si en el caso de dos partículas definimos la coordenada relativa no conmutativa por $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2^\dagger$, el cambio de base en (2.13), permite escribir esta coordenada no conmutativa como $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + i\theta(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$.

Por otra parte, a pesar de que la variable no conmutativa no es hermítica, es posible construir al menos dos Hamiltonianos no conmutativos hermíticos, tomando $m = 1$, estos Hamiltonianos son

$$H_{NC+}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{p}}^2 + (V(\hat{\mathbf{x}}) + V^\dagger(\hat{\mathbf{x}})) \right), \quad (2.16)$$

$$H_{NC-}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{p}}^2 + i(V(\hat{\mathbf{x}}) - V^\dagger(\hat{\mathbf{x}})) \right). \quad (2.17)$$

con $V(\hat{\mathbf{x}})$ una función que en el límite $\theta \rightarrow 0$ se reduce al potencial utilizado en el caso estándar.

Cabe señalar que la realidad del espectro de Hamiltonianos no hermíticos complejos, también puede ser incorporada mediante la simetría \mathcal{PT} , ver [76] y su extensión supersimétrica [77]. Este último caso, corresponde al límite cuando $\theta \rightarrow 0$ y $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow i\mathbf{x}$, con \mathbf{x} una coordenada espacial con las relaciones de conmutación estándar.

A pesar de que este tipo de propuesta es muy interesante, nuestro propósito principal es distanciarnos lo menos posible de la teoría estándar, por lo que, sólo nos concentraremos en la posibilidad de utilizar Hamiltonianos hermíticos, de la forma (A.6) y (A.7), con potenciales reales $V(\hat{\mathbf{x}})$.

Por otra parte, suponiendo que la escala de no conmutatividad θ es pequeña en comparación con cualquier otra escala de distancia (que en el presente caso de un sistema cuántico no relativista podría ser la longitud de onda de de-Broglie) y utilizando el cambio de base (2.13, 2.14), en (A.6 y A.7), la expansión con $\theta < 1$, de los Hamiltonianos H_+ y H_- , se puede escribir como

$$H_{NC+}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \right) \mathbf{1} + \cos(\theta \mathbf{s} \cdot \nabla) V(\mathbf{x}), \quad (2.18)$$

$$H_{NC-}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \right) \mathbf{1} - \sin(\theta \mathbf{s} \cdot \nabla) V(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

De las expresiones anteriores, es posible observar que estos Hamiltonianos resultan ser matrices hermíticas en el espacio del spin.

Puesto que en el límite $\theta \rightarrow 0$,

$$H_{NC+}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}) \right) \mathbf{1}, \quad (2.20)$$

$$H_{NC-}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \right) \mathbf{1}, \quad (2.21)$$

en lo que sigue, sólo utilizaremos el Hamiltoniano H_{NC+} (que será denotado sólo por H_{NC}), el cual se reduce a un Hamiltoniano diagonal, donde cada una de sus componentes tiene la forma de un Hamiltoniano de Schrödinger.

En este punto es posible observar que todas las modificaciones inducidas por no conmutatividad, quedarán codificadas en la forma del potencial en (A.8). Por lo tanto, no será necesario volver a hablar de las coordenadas no conmutativas, en lo que sigue.

2.3. Sistemas de Partículas Interactuantes

En el marco de esta tesis, nos concentraremos en estudiar electrones y bosones compuestos por un par de electrones como los pares de Cooper, como sucede al estudiar un modelo de un material superconductor, donde las propiedades de sistema, se describen por la interacción entre los electrones y los iones de la red.

Es importante destacar que en este problema, la no conmutatividad puede ser pensada como una manifestación de la estructura interna de la red cristalina que se modela por medio de un espacio no conmutativo que se revela a escalas de distancia del orden de θ , pero que, producto de la interacción electrón-fonón puede producir efectos observables a escalas macroscópicas.

Puesto que la no conmutatividad aparece a escalas de distancia mucho menores que cualquier escala de distancia característica del sistema, e.g. la longitud de onda de de Broglie, en primera aproximación podemos considerar un Hamiltoniano, de la forma

$$H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}) \right) \mathbf{1} - \frac{1}{2} \theta^2 (\mathbf{s} \cdot \nabla)^2 V(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

es claro que el caso de una partícula de spin $s = 0$, se reduce trivialmente al caso estándar de mecánica cuántica.

Por completitud, primero analicemos el problema de un electrón, en este caso $s = \sigma/2$ y el Hamiltoniano (2.22) se escribe como

$$H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + \left(1 - \frac{1}{2} (\theta/2)^2 \nabla^2 \right) V(\mathbf{x}) \right) \mathbf{1}, \quad (2.23)$$

de esta forma, el término a primer orden en la expansión del potencial sólo contribuye con un término constante en este caso, al igual como ocurriría en el caso de un sistema de electrones no interactuantes.

El caso de un sistema compuesto por dos fermiones interactuantes, donde $s = (1/2)(\sigma + \sigma')$ es el spin total del sistema de dos fermiones, \mathbf{x} es la coordenada espacial relativa \mathbf{x} y \mathbf{p} es el momento relativo, el término proporcional a θ^2 no se reduce como en el caso anterior. Sin embargo, aun podemos estudiar la modificaciones inducidas por este término en comparación con el caso estándar.

Utilizando la expresión general para el Hamiltoniano en (2.22), analicemos el conjunto de operadores compatibles del sistema. Un cálculo directo, muestra que en este caso

$$[\mathbf{s}^2, H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})] = 0. \quad (2.24)$$

Sin embargo, no es directo mostrar que, para un potencial arbitrario, $H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ conmute simultáneamente con s_3 .

Con el propósito de determinar bajo que condiciones $H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})$ conmuta con s_3 , consideremos la transformada de Fourier del potencial $V(\mathbf{x})$. El conmutador del término proporcional a θ^2 y s_3 está dado por

$$[s_3, (\mathbf{s} \cdot \mathbf{p})^2 V(\mathbf{x})] = \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} [s_3, s_i s_j] k_i k_j V(\mathbf{k}). \quad (2.25)$$

Puesto que $[s_3, s_i^2] = 0$, es claro que la expresión anterior se anula para $i = j$.

Por otra parte, para $i \neq j$, la integral en (2.25), parametrizada en términos de coordenadas esféricas correspondientes al vector \mathbf{k} , resulta ser proporcional a $\int d\phi k_i k_j U(\mathbf{k})$, con ϕ el ángulo azimutal.

Si la transformada del potencial ($V(\mathbf{k})$) es independiente de las variables angulares, condición que en el espacio de coordenadas se traduce en que $V(\mathbf{r}) = V(r)$, entonces en este caso el conmutador en (2.25) se anula.

De esta forma, para un potencial central el Hamiltoniano (2.22) conmuta con s y s_3 , de manera que es posible utilizar la base de spin standard $|s, m\rangle$, donde s y m , corresponden a los autovalores de s^2 y s_3 respectivamente.

Finalmente, es importante señalar que el momento angular orbital \mathbf{L} y el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$, con las relaciones de conmutación

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k. \quad (2.26)$$

forman un conjunto de operadores compatibles con H_{NC} , esto es

$$[J_3, H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})] = 0, \quad [\mathbf{J}^2, H_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{s})] = 0. \quad (2.27)$$

De esta forma, para un potencial arbitrario una base que diagonaliza el Hamiltoniano H_{NC} , resulta ser $|j s m'\rangle$, donde j , s y m' corresponden a los autovalores de \mathbf{J}^2 , s^2 y J_3 respectivamente.

2.4. Conclusiones del Capítulo

Reemplazando $\theta \rightarrow i\theta$ en el álgebra propuesta en [65], se obtiene un álgebra con relaciones de conmutación adicionales debido a la no hermiticidad de las coordenadas no conmutativas.

Puesto que el spin hereda su carácter matricial en las relaciones de conmutación, las coordenadas no conmutativas resultan ser matrices no hermíticas,

Un cambio de base permite escribir las variables no conmutativas, en términos de variables conmutativas, que satisfacen el álgebra de Heisenberg.

Debido a la no hermiticidad de las coordenadas no conmutativas, dado una función real $V(\mathbf{x})$, es posible construir al menos dos Hamiltonianos no conmutativos hermíticos, de los cuales sólo uno, (2,16), se reduce a la matriz identidad por el Hamiltoniano de Schrödinger estándar.

Utilizando el cambio de base (2.13, 2.14), se obtiene una realización del álgebra en términos de coordenadas conmutativas que satisfacen el álgebra de Heisenberg. Por medio, de esta identificación es posible mapear la dinámica de un sistema no conmutativo a un espacio conmutativo con un potencial modificado.

Para el caso de un sistema compuesto por un electrón, las modificaciones inducidas por no conmutatividad, se traducen en una contribución constante en la energía del sistema.

Sin embargo, en un sistema compuesto por un par de electrones interactuantes, el Hamiltoniano conmuta con los operadores J_3 y \mathbf{J}^2 . Para un potencial central, el Hamiltoniano conmuta adicionalmente con s_3 y s^2 .

En este punto, es importante entender que la discusión inicial acerca de la construcción de un espacio no conmutativo, y la posterior construcción de una teoría cuántica sobre este espacio, se resumen en una modificación del Hamiltoniano utilizado para describir un sistema.

A primer orden, el Hamiltoniano se escribe ahora con un término adicional, que es proporcional al spin.

En los capítulos que siguen, aplicaremos este modelo tanto al problema del apareamiento de Cooper, como al problema de la superconductividad descrita por una teoría BCS generalizada.

Capítulo 3

Generalización del Mecanismo de apareamiento de Cooper

En este capítulo, estudiaremos el problema del apareamiento de Cooper en un espacio no conmutativo utilizando las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores. Esto es, construyendo un Hamiltoniano no conmutativo, en base al potencial utilizando en el caso estándar, [138].

Con el propósito de distinguir de forma clara y precisa el punto donde se aplican las modificaciones inducidas por la no conmutatividad, primero revisemos el problema del apareamiento de Cooper, en el espacio conmutativo estándar, [63].

3.1. Apareamiento de Cooper

Consideremos un gas ideal de electrones a temperatura $T = 0$, en el que los electrones de este sistema, ocupan todos los niveles de energía hasta la energía de Fermi.

Supongamos que dentro del mar de Fermi se enciende una interacción muy

débil entre dos electrones. Si esta interacción es repulsiva, entonces sólo se produce un proceso de scattering entre los dos electrones. Si por el contrario, esta interacción resulta ser atractiva, entonces es posible que el par de electrones formen un estado ligado, quedando confinados a una región finita del espacio.

Por lo débil de la interacción y como fue demostrado por Cooper [63], es posible demostrar que, en el caso de dos electrones con energías cercanas a la energía de Fermi, el estado del par posee de menor energía que el estado inicial de los dos electrones libres.

Con el propósito de demostrar lo anteriormente dicho, calculemos explícitamente la energía del par. Para ello, consideremos la ecuación de Schrödinger en el sistema de masa reducida, esto es

$$(-\nabla^2 + V(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

donde \mathbf{r} es la coordenada relativa, $\Psi(\mathbf{r})$ es la función de onda del par y E es la energía del par. Nótese que en el presente caso, el término libre se escribe como $-\nabla^2$ debido a que la masa reducida de dos partículas de masa unitaria es $1/2$.

Es importante destacar que el par de electrones considerados en el apareamiento de Cooper, está formado por un electrón con momento \mathbf{k} y otro con momento $-\mathbf{k}$. De tal forma que utilizando la notación $\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})|s, m\rangle$, la función de onda del par se escribe como una superposición de la forma

$$\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}), \quad (3.2)$$

donde $\Psi(\mathbf{r})$ denota la parte espacial y $|s, m\rangle$ la parte espinorial, mientras que $\Phi(\mathbf{k})$ denota la transformada de Fourier de la parte espacial.

Reemplazando (3.2) en (3.1), obtenemos

$$\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(\mathbf{k}^2 - E)} \int d^3k' \mathcal{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}'), \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \int \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Reemplazando $V(\mathbf{r})$ por su transformada de Fourier $\int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{q})$, la expresión anterior toma la forma

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (3.5)$$

Suponiendo que la función $V(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ se puede separar como $V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = -U(\mathbf{k}')U(\mathbf{k})$, entonces la ecuación (3.3), se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) &= \frac{U(\mathbf{k})}{(\mathbf{k}^2 - E)} \int d^3 k' U(\mathbf{k}') \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}'), \\ \int d^3 k \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) &= \int d^3 k \frac{U^2(\mathbf{k})}{(\mathbf{k}^2 - E)} \int d^3 k' U(\mathbf{k}') \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}'), \\ 1 &= \int d^3 k \frac{U^2(\mathbf{k})}{(\mathbf{k}^2 - E)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación del gap, y su solución en términos de E muestra que $E < \mathbf{k}^2$, es decir, que la energía del par de electrones E , es menor que la energía de los dos electrones libres \mathbf{k}^2 ¹. Esto puede ser chequeado por consistencia, directamente en la ecuación (3.6).

En el trabajo de Cooper, la interacción atractiva en el espacio de coordenadas, se representa por

$$V(\mathbf{r}) = -(2\pi)^3 g \delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

con $0 < g \ll 1$.

Reemplazando este potencial en (3.4), obtenemos como resultado que $U(\mathbf{k}) = g$, es decir, obtenemos una interacción isotrópica en el espacio de momentos. Esto se traduce en que la formación de pares no depende de una dirección privilegiada.

¹Restituyendo las unidades la energía de cada electrón libre es $\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m$

Con este potencial la ecuación del gap (3.6), toma la forma

$$1 = g \int d^3k \frac{1}{(\mathbf{k}^2 - E)}, \quad (3.8)$$

En este punto, es conveniente discutir dos aspectos de este problema que serán útiles para el cálculo que sigue:

1. La interacción atractiva en el problema de Cooper, produce un débil aumento en el momento de los electrones. Este leve incremento permite que, sólo los electrones con $k = k_F$, puedan salir del mar de Fermi.

Adicionalmente, esto indica que los momentos de los electrones están acotados por $k_F < k < k_F + k_c$, donde k_c es el momento transferido por la interacción.

Por lo tanto, sólo los electrones sobre la superficie de Fermi, contribuyen a formación de pares de Cooper.

2. La densidad de estados $N(\epsilon) = d^3k/d\epsilon$, donde $\epsilon = \mathbf{k}^2/2$ es la energía de un electrón, puede ser considerada constante sobre una delgada capa sobre la superficie de Fermi $E_F < \epsilon < E_F + E_c$, con $E_c = \mathbf{k}_c^2/2$.

Esto indica que la integral en (3.8), puede ser reemplazada por

$$\int_{k_F}^{k_F+k_c} d^3\mathbf{k} = N(E_F) \int_{E_F}^{E_F+E_c} d\epsilon, \quad (3.9)$$

con $N(E_F)$ una constante.

Siguiendo lo dicho en los puntos 1 y 2, la ecuación (3.8) toma la forma

$$1 = gN(E_F) \int_{E_F}^{E_F+E_c} d\epsilon \frac{1}{2\epsilon - E}, \quad (3.10)$$

de la expresión anterior, y con un poco álgebra obtenemos

$$E = 2(E_F - E_c e^{-2/N(E_F)g}). \quad (3.11)$$

Este resultado muestra que la energía del par, es menor que la energía de los dos electrones libres, esto es $E < 2E_F$, lo cual demuestra que el estado del par se favorece energéticamente.

3.1.1. Estado de Spin Singlete

El análisis anterior, muestra que dos electrones sobre la superficie de Fermi, i.e. con momentos iguales a k_F , formarán un estado ligado, si existe una débil interacción atractiva entre ellos.

Sin embargo, puesto que la interacción es de contacto, cuando $r \rightarrow 0$, la contribución no nula de la función de onda en (3.2), está dada por

$$\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{k} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}). \quad (3.12)$$

En principio, el par de electrones se puede formar tanto en un estado de spin singlete como en un estado de spin triplete. Sin embargo, debido a la antisimetría de la función de onda del par, bajo el intercambio de partículas, la función de onda en (3.12), sólo puede estar construida en el estado singlete. En efecto, si consideramos que bajo la permutación de partículas, se tiene que

$$P_{12}\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) = (-1)^{s+1}\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}), \quad (3.13)$$

donde P_{12} denota el operador de intercambio de partículas, entonces, es claro que sólo el estado con $s = 0$, permite construir una función de onda antisimétrica.

En conclusión, por la acción de una débil interacción atractiva, dos electrones sobre la superficie de Fermi, forman un estado ligado de spin singlete, o par de Cooper. Este mecanismo de formación de pares, es el responsable de la superconductividad convencional descrita por la teoría BCS, [64].

El estado de spin triplete, no contribuye a la formación de pares en este caso, puesto que no permite construir una función de onda antisimétrica, bajo el intercambio de partículas.

Sin embargo, en el marco de la teoría no conmutativa desarrollada en los capítulos anteriores, es posible incluir los estados de spin triplete, como una solución del problema del apareamiento de Cooper.

3.2. Generalización del Mecanismo de Cooper

La teoría de mecánica cuántica no conmutativa, estudiada en los capítulos anteriores, se puede ver como una modificación del Hamiltoniano en mecánica cuántica estándar. Esta modificación, que sólo afecta al potencial, se debe a un cambio de base en las coordenadas, que permite recuperar el álgebra de Heisenberg.

Utilizando este modelo de mecánica cuántica no conmutativa, en el problema del apareamiento de Cooper se implementan las siguientes modificaciones, [138]:

- El potencial se lee ahora como

$$V_{NC}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2}(V(\mathbf{x} + i\theta\mathbf{s}) + V(\mathbf{x} - i\theta\mathbf{s})). \quad (3.14)$$

De esta forma, sustituyendo (3.7) en (3.14) y reemplazando en (3.4), la expansión a orden θ^2 del término $\mathcal{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{s})$ se lee como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{s}) = & -g \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s})^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\theta^2((\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}) + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})) \right). \quad (3.15) \end{aligned}$$

- En la ecuación (3.14), el potencial no es de contacto, de tal manera que la función de onda conserva la forma general propuesta en (3.3). No obstante, puesto que ahora la función de onda, contiene la parte impar y par de la exponencial $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, será necesario analizar la simetría de paridad en la soluciones.

Debido a la antisimetría de la función de onda del par bajo el intercambio de partículas, se sigue

$$\Phi^{(s,m)}(-\mathbf{k}) = (-1)^s \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}), \quad (3.16)$$

De esta forma, bajo una transformación de paridad el estado de spin singlete $s = 0$ es par, mientras que el estado triplete $s = 1$ es impar.

- De la misma forma que los diferentes estados de spin tienen diferentes propiedades de simetría bajo una transformación de paridad, los distintos términos en la expansión del potencial, pueden ser separados por sus propiedades de simetría.

De esta forma, la parte par será denotada por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) + \mathcal{V}(-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s})), \\ &= -g \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s})^2) \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

y la parte impar por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) - \mathcal{V}(-\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s})), \\ &= \frac{1}{2}g \left(\theta^2 ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}) + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})) \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nótese que en el límite $\theta \rightarrow 0$, $\mathcal{V}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) = g$, mientras que $\mathcal{V}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) = 0$.

- En base a estas propiedades de simetría, y junto con la posibilidad de separar el potencial en una parte par y una parte impar, obtenemos

$$\int d^3k' \mathcal{V}^{(s')}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}') \sim \delta_{s's}. \quad (3.19)$$

Como resultado, la contribución no nula del potencial en el estado singlete, proviene de la parte par, mientras que la contribución no nula para el triplete, proviene de la parte impar del potencial.

En conclusión, la modificación del potencial, permite incluir el estado de spin triplete. De los términos de la expansión del potencial, se observa que sólo la parte par contribuye al estado singlete, mientras que la parte impar contribuye al triplete.

En las dos secciones que desarrollan a continuación, se estudia por separado el caso de un estado de spin singlete y el caso de un estado de spin triplete.

3.3. Estados de spin singlete

Para el estado singlete, la contribución no nula del potencial se obtiene de la ecuación (3.19) con $s' = 0 = s$. En este caso es conveniente escribir el potencial como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) &= -g \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \theta^2 (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s})^2 \right) \\ &= -g V^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{s}) V^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

De tal manera que la ecuación del gap (3.6), se puede escribir como

$$\begin{aligned} 1 &= g \int d^3k \frac{\langle (V^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{s}))^2 \rangle^{(0,0)}}{\mathbf{k}^2 - E^{(0,0)}}, \\ &\simeq g N(0) \int_{E_F}^{E_F + E_c} d\epsilon \frac{1}{2\epsilon - E^{(0,0)}} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \langle 1 + \theta^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 \rangle^{(0,0)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde los paréntesis indican el valor del operador sobre el estado singlete.

Nótese que si $g < 0$, entonces $E^{(0,0)} > 2\epsilon$, es decir, en este caso el par tiene mayor energía que el estado de los dos electrones libres. De tal manera que el estado ligado aparece en el caso del singlete, sólo si esta interacción de contacto es atractiva, esto es, sólo si $g > 0$.

Utilizamos

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 = \frac{1}{2}k^2 (1 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}')k^{-2}) = k^2 S_{12}, \quad (3.22)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}/2$ y $\boldsymbol{\sigma}'/2$ son los spin de cada uno de los electrones. Un cálculo directo muestra que, ver (C.3),

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \langle S_{12} \rangle^{(0,0)} = 0. \quad (3.23)$$

De esta forma, las modificaciones para el singlete se anulan, y por lo tanto, la ecuación del gap se reduce al caso conmutativo

$$1 = \frac{1}{2}gN(E_F) \ln \left(1 + \frac{2E_c}{2E_F - E^{(0,0)}} \right) \quad (3.24)$$

donde $E_F = \mathbf{k}_F^2/2$, $E_c = \mathbf{k}_c^2/2$.

Finalmente con un poco de álgebra obtenemos

$$E^{(0,0)} = 2(E_F - E_c e^{-2/N(E_F)g}). \quad (3.25)$$

Como resultado, el caso no conmutativo del estado de spin singlete es equivalente al caso conmutativo.

En la próxima sección estudiaremos como las modificaciones inducidas por la no conmutatividad, pueden producir pares de Cooper en el estado de spin triplete.

3.4. Estados de spin triplete

En el caso del triplete, la contribución no nula del potencial, proviene del término impar, que puede ser escrito como

$$\mathcal{V}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) = g\theta^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}) + \frac{i}{2}g\theta^2(\mathbf{k}' \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s}. \quad (3.26)$$

Es importante notar que debido al último término, el potencial no puede ser separado como $V^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{s})V^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{s})$.

Sin embargo, existen al menos dos condiciones que pueden ser impuestas, con el propósito de anular el último término en (3.26).

1. Si la dirección del spin total es paralelo a plano que forman los dos vectores, esto es $(\mathbf{k}' \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{s} = 0$. Entonces, el potencial se reduce a

$$\mathcal{V}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) = g\theta^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}). \quad (3.27)$$

El signo global que acompaña a este término, indica si el estado del par resulta ser un estado ligado. En este caso, esta condición será satisfecha si $g < 0$, es decir, en este caso la interacción que provoca el estado ligado es repulsiva.

2. Si la dirección de los electrones dispersados es antiparalela a su dirección de incidencia, esto es $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$. En este caso, el potencial está dado por

$$\mathcal{V}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{s}) = g\theta^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{s}), \quad (3.28)$$

donde $\mathbf{k}' = k'(\mathbf{k}/k)$.

A diferencia del caso anterior, el potencial es positivo y por tanto, la energía del par será menor que la energía de los electrones libres en el caso en que $g > 0$, es decir, en el caso de una interacción atractiva..

Por otra parte, en ambos casos la ecuación del gap se reduce a

$$1 = g\theta^2 \int d^3k \frac{\langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})^2 \rangle^{(1,m)}}{\mathbf{k}^2 - E^{(1,m)}}, \quad (3.29)$$

notar que de esta ecuación se obtiene que $E^{(1,m)} < \mathbf{k}^2$, es decir que la energía del par es menor que dos veces la energía individual de cada electrón.

La expresión anterior se puede reducir introduciendo la densidad de estados por intervalo de energía, ver (3.21), y además utilizando (3.22) y (C.4) obtenemos

$$1 = \frac{4}{3} g\theta^2 N(E_F) \int_{E_F}^{E_F+E_c} d\epsilon \frac{\epsilon}{2\epsilon - E^{(1,m)}} \quad (3.30)$$

de esta forma integrando esta expresión obtenemos

$$\frac{2}{E^{(1,m)}} \left(\frac{3}{2g\theta^2 N(E_F)} - E_c \right) = \ln \left(1 + \frac{2E_c}{2E_F - E^{(1,m)}} \right) \quad (3.31)$$

siguiendo el mismo procedimiento que en [138], definamos la razón entre la energía del triplete sobre la energía del singlete

$$x = \frac{E^{(1,m)}}{E^{(0,0)}} \quad (3.32)$$

de esta forma la ecuación (3.31) se puede escribir como

$$C = 1 + Bx \ln \left(1 + \frac{1}{B(1-x) + e^{-A}} \right), \quad (3.33)$$

donde se ha definido

$$A = \frac{2}{gN(E_F)}, \quad B = \frac{E^{(0,0)}}{E_c}, \quad C = \frac{3A}{4\theta^2 E_c}. \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) se puede resolver busca simultáneamente la solución de las ecuaciones

$$y = C, \quad y = 1 + Bx \ln \left(1 + \frac{1}{B(1-x) + e^{-A}} \right), \quad (3.35)$$

las cuales se han graficado en la Fig.3.1. Es claro que, en el intervalo $0 < x < 1$, existen soluciones que muestran que la energía el estado triplete es menor que la energía del singlete.

Nótese que el parámetro C , es inversamente proporcional tanto al cuadrado del parámetro de no conmutatividad como a la constante de acoplo g .

De esta forma, las soluciones que son predominantes en el estado triplete, corresponden a valores de C cada vez menores, es decir, cuando $\theta^2 g \gg 1$, [138]. En vista de que la expansión se ha realizado para $\theta \ll 1$, la condición anterior sólo se satisface en el caso de una interacción fuerte $g \gg 1$.

Por otra parte, cuando C es muy grande, lo que en el caso de una interacción débil se traduce en que $0 < \theta < 1$, puede existir un estado ligado en el singlete o en el triplete, dependiendo de tipo de interacción.

De esta manera, una interacción atractiva produce un estado ligado para el singlete y el triplete, en el caso que en la interacción entre los electrones, predomine la formación de pares con $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}'/k$.

En caso contrario, una interacción repulsiva produce un estado ligado en el triplete, siempre que el spin total del par, sea paralelo al plano que forman los vectores vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' .

3.5. Conclusiones del Capítulo

En el problema del apareamiento de Cooper, el modelo de mecánica cuántica no conmutativa desarrollado en los primeros capítulos, permite generalizar los estados de los pares Cooper, incorporando el estado de spin triplete, [138].

Siendo estos estados favorecidos energéticamente sobre el estado de spin singlete.

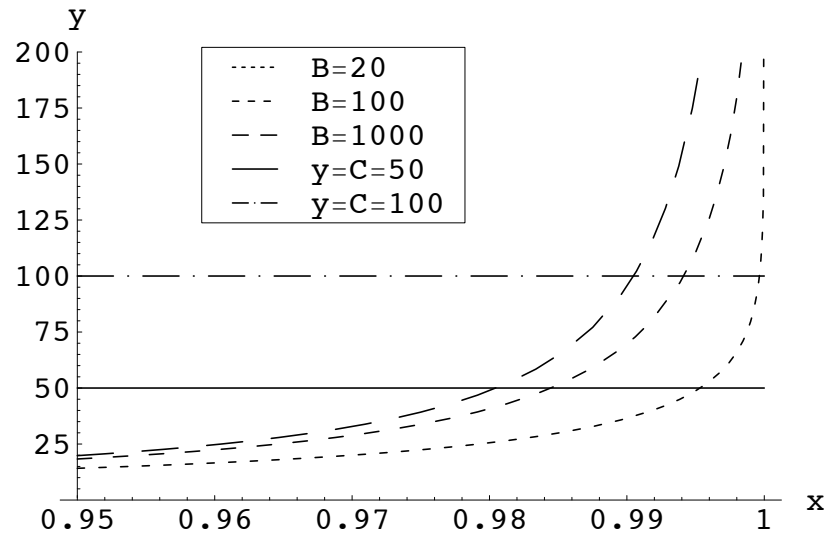


Figura 3.1: Soluciones simultáneas de (3.33).

Una interacción atractiva produce un estado ligado para el singlete y un estado ligado en el triplete sí $k' = -k'k/k$ este caso el estado triplete se ve privilegiado energéticamente si la interacción es muy fuerte.

Si una interacción entre dos partículas es capaz de generar un nuevo estado de menor energía, entonces, en el caso de muchas partículas, esta tendencia se podrá extender rápidamente a un número muy grande de partículas, y por tanto, generar consecuencias observables a nivel macroscópico.

En el próximo capítulo, la generalización del apareamiento de Cooper, será utilizado como el principal mecanismo de la superconductividad, en el contexto de una teoría BCS generalizada.

Capítulo 4

Superconductividad de Spin Triplete

En este capítulo revisaremos el problema de la superconductividad no convencional, en el marco de la teoría de mecánica cuántica no conmutativa expuesta en los capítulos anteriores. Para ello, utilizaremos la generalización del apareamiento de Cooper a un espacio no conmutativo, como mecanismo responsable de la superconductividad.

Es importante aclarar que nuestro objetivo principal es estudiar un mecanismo microscópico de la superconductividad de spin triplete, basado en un modelo de mecánica cuántica no conmutativa, con lo cual, la discusión que se expone a continuación, se basa esencialmente en la teoría de superconductividad no convencional y las modificaciones inducidas por no conmutatividad.

Cabe señalar, que el problema de la superconductividad convencional en un espacio no conmutativo, ha sido analizado de forma similar en [79].

Con el propósito de reconocer la diferencia entre un superconductor convencional y un superconductor no convencional, comencemos revisando las propiedades que distinguen a un superconductor convencional, [48, 80, 97, 82, 83].

4.1. Superconductividad Convencional

Hasta donde sabemos, a temperatura ambiente un metal¹ se comporta como un conductor. Sin embargo, a bajas temperaturas, la resistencia eléctrica disminuye linealmente con la temperatura hasta una cierta temperatura crítica, donde ocurre una transición de fase, en la cual, el valor de la resistencia eléctrica se vuelve muy cercano a cero, e.g. del orden de $10^{-5}\Omega$ para *Hg*.

Además de la repentina disminución de la resistencia eléctrica, por debajo de la temperatura crítica y en presencia de campos magnéticos, surge el efecto Meissner [84], i.e. el comportamiento diamagnético de un superconductor, el cual, se debe a la expulsión de los campos magnéticos externos desde el interior del superconductor.

De esta forma, las dos principales características que distinguen a un superconductor convencional, son una baja temperatura crítica y la ausencia de campos magnéticos en su interior.

Con respecto al mecanismo que produce la superconductividad, el descubrimiento del efecto isótopo [85], i.e. la relación entre la temperatura crítica y la masa de los iones, confirmó la importancia de la interacción entre los electrones y los fonones de la red cristalina.

Como se demuestra en el apéndice D, a bajas temperaturas la interacción electrón-fonón entre pares de Cooper es atractiva. Esto indica que la superconductividad en este caso, se debe a la formación de un estado de menor energía compuesto de pares de Cooper.

A pesar de que la primera teoría de superconductividad fenomenológica, fue

¹Además de los metales, en la actualidad se conocen una gran cantidad de otros materiales superconductores.

propuesta en 1950 por Ginzburg y Landau [86], no fue sino hasta 1957 que Bardeen, Cooper y Schrieffer [64], construyeron la primera teoría de superconductividad basada en un mecanismo microscópico.

Es importante destacar que la idea principal de la teoría de BCS es que el estado superconductor surge como un nuevo estado, de menor energía que el estado normal. En este caso, el estado base del sistema a $T = 0$, está formado por un número macroscópico de estados de pares de Cooper, i.e. del orden del número total de partículas.

La disminución de la resistencia eléctrica en este caso, se debe a que las vibraciones de los iones a lo largo la red, favorecen la propagación de los electrones formando estados de pares de Cooper.

Puesto que el momento magnético de un par de Cooper, depende tanto del spin del par como de su momento angular orbital, la ausencia de campos magnéticos al interior de un superconductor, se debe a un apareamiento de electrones en un estado de spin singlete $s = 0$ y con momento angular orbital $l = 0$.

Un estado superconductor, compuesto por pares de Cooper con $s \neq 0$ o $l \neq 0$, se denomina un superconductor no convencional. En estos casos, aun no existe un consenso acerca del origen de las interacciones responsables de la formación de estados de pares de electrones.

En la próxima sección, revisaremos los aspectos más relevantes del mecanismo microscópico de una teoría de la superconductividad no convencional [49, 50, 55], generalizada a partir de la teoría de BCS.

4.2. Superconductividad No Convencional

En esta sección revisaremos los puntos más importantes de la teoría de superconductividad no convencional, y desarrollaremos el formalismo que nos permitirá calcular el espectro de las excitaciones de un superconductor y con ello la temperatura crítica.

La idea es que a $T = 0$, supondremos que el estado base del sistema está compuesto por un número muy grande de pares de Cooper². A medida que se incrementa la temperatura, este número disminuye por el aumento de la frecuencia de oscilación de los fonones, de forma tal que a $T = T_c$, no existen estados de pares de Cooper, de manera que la fase superconductora coincide con la fase normal metálica.

Para comenzar, consideremos el Hamiltoniano en segunda cuantización de un sistema de electrones, tal que sólo existe una interacción entre pares de electrones con momentos \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$, esto es

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \sum_{\alpha', \beta', \alpha, \beta} V_{\alpha' \beta'; \beta \alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}' \alpha'}^\dagger a_{-\mathbf{k}' \beta'}^\dagger a_{-\mathbf{k} \beta} a_{\mathbf{k} \alpha}, \quad (4.1)$$

con

$$V_{\alpha' \beta'; \beta \alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{V^2} \int d^3x d^3x' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \langle \alpha' \beta' | V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') | \beta \alpha \rangle, \quad (4.2)$$

en la expresión anterior, $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ son índices de la proyección de spin, $\xi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/2m - \mu$ es la energía de cada electrón relativa al potencial químico y los operadores $a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}\alpha}$ son operadores de creación y aniquilación, de un electrón con momentum \mathbf{k} y proyección de spin α , los cuales satisfacen las relaciones de anti-

²Una fracción del número total de partículas.

conmutación

$$\begin{aligned}\{a_{\mathbf{k}\alpha}, a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \{a_{\mathbf{k}\alpha}, a_{\mathbf{k}'\alpha'}\} &= 0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

Como se ha mencionado, el propósito de estudiar un sistema de electrones interactuantes, radica en la posibilidad de encontrar una expresión para la temperatura crítica T_c , a partir de la cual, se produce la transición a la fase superconductora.

Para $T > T_c$, las propiedades del estado metálico, se describen por medio de un gas ideal de fermiones con un Hamiltoniano de la forma $\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha}$. Cuando se disminuye la temperatura y se alcanza la temperatura crítica, la interacción electrón-fonón predomina sobre la repulsión de Coulomb generando una interacción neta atractiva, la que dicho sea de paso, puede ser muy débil.

Por otra parte, para $T < T_c$, la formación de los pares de Cooper, permite describir las propiedades del estado superconductor del sistema, en término del Hamiltoniano BCS (4.1).

De esta forma, la diferencia de energía entre el estado metálico y el estado superconductor, escrita en términos de los operadores de creación y aniquilación de pares de Cooper $c_{\mathbf{k}\alpha\beta}^\dagger = a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{-\mathbf{k}\beta}^\dagger$ y $c_{\mathbf{k}\alpha\beta} = a_{-\mathbf{k}\beta} a_{\mathbf{k}\alpha}$, se lee como

$$\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{BCS} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \sum_{\alpha', \beta', \alpha, \beta} V_{\alpha'\beta'; \beta\alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) c_{\mathbf{k}'\alpha'\beta'}^\dagger c_{\mathbf{k}\alpha\beta},\tag{4.4}$$

la expresión anterior muestra que la transición de fase al estado superconductor, es energéticamente privilegiada si la interacción es atractiva. En caso contrario, el estado normal es de menor energía que el estado superconductor. Para una discusión acerca del álgebra de los operadores de pares de electrones ver el apéndice E.

Adicionalmente, es directo notar que el término de interacción es proporcional al número de ocupación de pares de Cooper ³. Esto produce que, sin importar lo débil que pueda ser la interacción, la diferencia de energía entre los dos estados es observable a nivel macroscópico.

En este punto es importante discutir la estructura de (4.1). Este Hamiltoniano contiene un término con cuatro fermiones, lo que indica que no es posible escribirlo en término de operadores de dos fermiones a través de una transformación lineal. Sin embargo, utilizando el hecho que estado base del sistema está ocupado por un número muy grande de pares de Cooper, entonces el Hamiltoniano puede ser linealizado y posteriormente diagonalizado por una transformación de Bogoliubov. Estos dos puntos serán tratados en las próximas secciones.

4.2.1. Aproximación de Campo Medio

Con el propósito de linealizar (4.1), y así poder describir el espectro de sus excitaciones como un gas ideal de quasipartículas [87], es conveniente introducir el promedio estadístico

$$\langle\langle A \rangle\rangle := \frac{\text{tr}[\exp(-\beta\mathcal{H}_{BCSA})]}{\text{tr}[\exp(-\beta\mathcal{H}_{BCS})]}, \quad (4.5)$$

y de esta forma definir el objeto

$$\langle\langle c_{\mathbf{k}\alpha\beta} \rangle\rangle = \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}), \quad (4.6)$$

donde los elementos $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ son c-números, el cual será llamado la amplitud del par.

³Estrictamente sólo los términos de la diagonal permiten identificar la combinación de operadores c^\dagger y c con el operador de número de un par.

Para incorporar la condición de que el estado base en $T = 0$ está completamente ocupado por pares de Cooper y que las excitaciones del sistema se producen a $T > 0$ (donde comienzan a romperse estos pares), entonces siguiendo el formalismo presentado por Sigrist y Ueda [50], introduzcamos el estado base BCS

$$|\Omega\rangle = \prod_k \sum_{\alpha\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\alpha\beta}^\dagger) |vac\rangle. \quad (4.7)$$

De esta forma, la condición de condensación, i.e. que el estado base está ocupado por un número macroscópico de pares de electrones se resume en

$$\langle \Omega | c_{\mathbf{k}\alpha\beta} | \Omega \rangle - \langle \langle c_{\mathbf{k}\alpha\beta} \rangle \rangle \simeq 0, \quad (4.8)$$

o lo que se conoce como con la aproximación de campo medio.

4.2.2. Hamiltoniano Reducido

Utilizando la aproximación de campo medio, el Hamiltoniano BCS se puede escribir de forma lineal como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{BCS} = & \sum_{\mathbf{k},\alpha} \xi_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \sum_{\alpha',\beta',\alpha,\beta} V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \left(\Psi_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}'\alpha'\beta'}^\dagger + \Psi_{\beta'\alpha'}^*(\mathbf{k}') c_{\mathbf{k}\alpha\beta} \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \sum_{\alpha',\beta',\alpha,\beta} V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) \Psi_{\beta'\alpha'}^*(\mathbf{k}') \Psi_{\beta\alpha}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

El último término de esta expresión, es una contribución a la energía del estado base, el cual resulta ser irrelevante a la hora de describir las energía de las excitaciones del sistema. De esta forma el Hamiltoniano puede ser escrito de forma reducida como

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \xi_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha,\beta} \left(\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\alpha\beta}^\dagger + \Delta_{\alpha\beta}^\dagger(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\alpha\beta} \right), \quad (4.9)$$

donde se han definido los elementos de matriz $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ por

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\alpha', \beta'} V_{\alpha\beta; \beta' \alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Psi_{\beta' \alpha'}(\mathbf{k}'), \quad (4.10)$$

$$\Delta_{\alpha\beta}^\dagger(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\alpha', \beta'} V_{\alpha' \beta'; \beta\alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \Psi_{\beta' \alpha'}^*(\mathbf{k}'). \quad (4.11)$$

Estos elementos de matriz, determinan la diferencia de energía, entre el estado base y el primer estado excitado, de cada electrón. Por esta razón, estos elementos de matriz son llamados gaps.

La estadística de los fermiones impone requerimientos de simetría sobre los elementos de matriz (4.2). En efecto, puesto que en el Hamiltoniano la permutación de dos operadores de creación o aniquilación, introduce un signo menos global, entonces los elementos de matriz que mantienen invariante el Hamiltoniano bajo dicha permutación, deben satisfacer

$$V_{\alpha' \beta'; \beta\alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -V_{\beta' \alpha'; \beta\alpha}(-\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -V_{\alpha' \beta'; \alpha\beta}(\mathbf{k}', -\mathbf{k}). \quad (4.12)$$

Por lo tanto, la simetría del sistema establece que los elementos de matriz pares deben ser antisimétricos bajo la permutación de índices de spin y, a su vez, los elementos de matriz impares deben ser simétricos bajo la permutación de índices de spin. En términos de los estados de spin total singlete y triplete, los elementos de matriz en el primer caso, corresponden al singlete, mientras que el segundo caso corresponden al triplete.

Identificando estos elementos de matriz con un superíndice, correspondiente al spin total, de (4.12) se obtiene que $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -\Delta_{\beta\alpha}(-\mathbf{k})$ (o en notación matricial $\hat{\Delta}(\mathbf{k}) = -\hat{\Delta}^T(-\mathbf{k})$), de lo que se sigue que

$$\Delta_{\beta\alpha}^{(S)}(\mathbf{k}) = (-1)^{S+1} \Delta_{\alpha\beta}^{(S)}(\mathbf{k}), \quad \Delta_{\beta\alpha}^{(S)}(-\mathbf{k}) = (-1)^S \Delta_{\alpha\beta}^{(S)}(\mathbf{k}). \quad (4.13)$$

De esta forma, el gap correspondiente al estado singlete, se define por $\Delta_{++}^{(0)} = 0 = \Delta_{--}^{(0)}$ y $\Delta_{+-}^{(0)} = -\Delta_{-+}^{(0)}$ ($\Psi_{++}(\mathbf{k}) = 0 = \Psi_{--}(\mathbf{k})$), de manera que (4.10) se

parametriza en términos de la matriz $\hat{\sigma}_y$ y una función par $\psi(\mathbf{k}) = \psi(-\mathbf{k})$ o función gap

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{(0)}(\mathbf{k}) &= i\hat{\sigma}_y\psi(\mathbf{k}), \\ \begin{pmatrix} \Delta_{++}^{(0)}(\mathbf{k}) & \Delta_{+-}^{(0)}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{-+}^{(0)}(\mathbf{k}) & \Delta_{--}^{(0)}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \psi(\mathbf{k}) \\ -\psi(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por otra parte, el gap para en el estado triplete se define por $\Delta_{+-}^{(1)} = \Delta_{-+}^{(1)}$ ($\Delta_{++}^{(1)} \neq 0$ y $\Delta_{--}^{(1)} \neq 0$). En este caso, el gap se parametriza por las matrices de Pauli σ y un vector impar $\mathbf{d}(\mathbf{k}) = -\mathbf{d}(-\mathbf{k})$ o vector gap

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{(1)}(\mathbf{k}) &= i(\mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma})\hat{\sigma}_y, \\ \begin{pmatrix} \Delta_{++}^{(1)}(\mathbf{k}) & \Delta_{+-}^{(1)}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{-+}^{(1)}(\mathbf{k}) & \Delta_{--}^{(1)}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) & d_z(\mathbf{k}) \\ d_z(\mathbf{k}) & d_x(\mathbf{k}) + id_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La forma del gap determina el tipo de apareamiento y el espectro de energía de los distintos pares de Cooper. Sin embargo, para calcular el espectro del sistema será necesario diagonalizar el Hamiltoniano reducido (4.9).

4.2.3. Diagonalización

El Hamiltoniano (4.9) se puede diagonalizar utilizando las transformaciones de Bogoliubov, para las cuales es conveniente introducir la notación matricial⁴

$$\hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}+}^\dagger & a_{\mathbf{k}-}^\dagger & a_{-\mathbf{k}+} & a_{-\mathbf{k}-} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$$\hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger = \begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}+}^\dagger & b_{\mathbf{k}-}^\dagger & b_{-\mathbf{k}+} & b_{-\mathbf{k}-} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

de esta forma la ley de transformación entre los operadores fermiónicos a y los b , se escribe como

$$\hat{A}_{\mathbf{k}} = \hat{U}_{\mathbf{k}}\hat{B}_{\mathbf{k}} \quad (4.18)$$

⁴En este capítulo el símbolo $\hat{}$ denotará los objetos que son matrices.

donde

$$\hat{U}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{\mathbf{k}} & \hat{v}_{\mathbf{k}} \\ \hat{v}_{-\mathbf{k}}^* & \hat{u}_{-\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Utilizando esta notación el Hamiltoniano (4.9), se puede escribir como

$$\mathcal{H}'_{BCS} = \hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \hat{A}_{\mathbf{k}}, \quad (4.20)$$

donde

$$\hat{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}_0 & \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) & -\xi_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

De esta forma, la diagonalización se lee

$$\mathcal{H}' = \hat{A}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \hat{A}_{\mathbf{k}} = \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{U}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \hat{U}_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}} = \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}} \quad (4.22)$$

donde

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{E}_{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{0}} & \hat{E}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{E}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} E_{k+} & 0 \\ 0 & E_{k-} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Finalmente, de (4.22) obtenemos

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\hat{E}_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}_0) = -\hat{\Delta}(\mathbf{k}) \hat{v}_{-\mathbf{k}}^*, \quad (4.24)$$

$$\hat{v}_{-\mathbf{k}}^*(\hat{E}_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}_0) = -\hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{u}_{\mathbf{k}}, \quad (4.25)$$

un sencillo cálculo muestra que

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\hat{E}_{\mathbf{k}}^2 - \xi_{\mathbf{k}}^2 \hat{\sigma}_0) = \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \hat{v}_{-\mathbf{k}}^*(\hat{E}_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}} \hat{\sigma}_0) = \hat{\Delta}(\mathbf{k}) \hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{u}_{\mathbf{k}}, \quad (4.26)$$

y dependiendo de la forma de $\hat{\Delta} \hat{\Delta}^\dagger$, la ecuación anterior tiene distintas soluciones. En efecto, si $\hat{\Delta} \hat{\Delta}^\dagger \sim \hat{\sigma}_0$, como en (4.40) y (4.42), entonces se habla de un apareamiento unitario y en caso contrario se habla de un apareamiento no unitario, [50].

Una vez obtenido el espectro de las excitaciones del sistema, es posible chequear la consistencia de la ecuación del gap. Luego de la solución de esta ecuación, es posible calcular la temperatura crítica utilizando el hecho que en el límite $T \rightarrow T_c$ el gap se anula.

En el próximo capítulo, se estudia el problema de la superconductividad no convencional, en el marco del modelo de mecánica cuántica presentado en los primeros capítulos.

4.3. Mecánica Cuántica No Conmutativa y Superconductividad No Convencional de Spin Triplete

En esta sección se estudia el problema de la superconductividad no convencional en un espacio no conmutativo. La idea es utilizar la conmutatividad como un mecanismo que, en base a la interacción estándar electrón-fonón, permita incluir el estado de spin triplete.

En un conjunto de partículas interactuantes, y en ausencia de campos externos, la no conmutatividad sólo induce una modificación en el potencial de interacción entre partículas, el cual será denotado por $U_{NC}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{s} + \mathbf{s}')$, donde $\mathbf{s} + \mathbf{s}'$ es el spin total de un par de electrones.

Utilizando la interacción de contacto atractiva (3.7) y potencial no conmutativo (3.14), del capítulo anterior, a orden θ^2 los elementos de matriz para el singlete

están dados por (siguiendo la notación con superíndices de la sección anterior)

$$V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{g}{V}(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} - \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'}) \left(1 + \frac{1}{4}\theta^2(\mathbf{k}'^2 + \mathbf{k}^2)\right) + \frac{g}{2V}(\langle \alpha'\beta' | - \langle \beta'\alpha' |) \frac{1}{4}\theta^2 \left((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}') + (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}') \right) (|\alpha\beta\rangle - |\beta\alpha\rangle). \quad (4.27)$$

Nótese que el segundo término de la expresión anterior se anula para $\alpha = \beta$ o $\alpha' = \beta'$, y toma el valor $-(g/4V)\theta^2(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2)$ para $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ o $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$.

Por lo tanto este término puede ser escrito como $-(g/V)(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} - \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})\theta^2(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}'^2)$, de tal forma que este elemento de matriz se reduce al caso standard de BCS $V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = (g/V)(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} - \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})$.

En vista de que la no conmutatividad se reduce al caso estándar para el estado singlete, en lo que sigue nos concentraremos en el estado de spin triplete.

Para el estado de spin triplete ($S = 1$), los elementos de matriz están dados por

$$V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{g}{2V}(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})\theta^2(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) - \frac{g}{2V}(\langle \alpha'\beta' | + \langle \beta'\alpha' |) \frac{1}{4}\theta^2 \left((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}') + (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}') \right) (|\alpha\beta\rangle + |\beta\alpha\rangle). \quad (4.28)$$

En este caso, el último término no se anula para $\alpha = \beta$ o $\alpha' = \beta'$. De hecho, tiene el mismo valor tanto para el caso con $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ como para el caso $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$. De este modo, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{g\theta^2}{2V}(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'}) \left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + \alpha\beta k_z k'_z + \frac{1}{4} \left((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}')_{\beta\alpha} + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\beta\alpha}(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}')_{\alpha\beta} + (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}')_{\beta\alpha} + (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\beta\alpha}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}')_{\alpha\beta} \right) \right), \quad (4.29)$$

donde k_z y k'_z son las proyecciones en z de los vectores \mathbf{k} y \mathbf{k}' respectivamente.

Notar que si $\alpha \neq \beta$, el elemento de matriz toma la forma

$$V_{\alpha'\beta';\beta\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{g}{V}(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta} + \delta_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta'})\theta^2 \left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} - k'_z k_z \right), \quad (4.30)$$

y si $\alpha = \beta$ entonces

$$V_{\alpha'\beta';\alpha\alpha}^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{g}{2V}(\delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\alpha} + \delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\alpha\beta'})\theta^2 \left(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k_z k'_z \right). \quad (4.31)$$

En las próximas secciones incorporaremos estos elementos de matriz en el cálculo estándar de un superconductor no convencional. Lo primero será encontrar las componentes del vector gap y luego determinar el tipo de apareamiento.

Una vez realizado esto, se encontrará el espectro de las excitaciones del superconductor y luego, resolviendo las ecuaciones de autoconsistencia, se obtendrá la temperatura crítica.

4.4. Vector Gap

Introduciendo los vectores γ , a través de las relaciones

$$\mathbf{k} \cdot \gamma_{\pm} = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) \Psi_{\pm\pm}(\mathbf{k}'), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{k} \cdot \gamma_0 = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} - k_z k'_z) (\Psi_{+-}(\mathbf{k}') + \Psi_{-+}(\mathbf{k}')), \quad (4.33)$$

las componentes del vector gap se escriben de forma compacta como

$$d_x(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\Delta_{--}^{(1)}(\mathbf{k}) - \Delta_{++}^{(1)}(\mathbf{k})) = \frac{\theta^2}{2} \mathbf{k} \cdot (\gamma_- - \gamma_+), \quad (4.34)$$

$$d_y(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i}(\Delta_{--}^{(1)}(\mathbf{k}) + \Delta_{++}^{(1)}(\mathbf{k})) = -i \frac{\theta^2}{2} \mathbf{k} \cdot (\gamma_- + \gamma_+), \quad (4.35)$$

$$d_z(\mathbf{k}) = \theta^2 \mathbf{k} \cdot \gamma_0. \quad (4.36)$$

Como ha sido mencionado, no existen modificaciones debidas a no conmutatividad para el caso singlete, por lo que, restringiendo el análisis al caso triplete, podemos distinguir al menos tres casos de apareamientos:

- Asimétricos

$$\begin{aligned} \Psi_{--}(\mathbf{k}') &\gg \Psi_{++}(\mathbf{k}'), & \mathbf{d}_-(\mathbf{k}) &= \frac{\theta^2}{2} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_-(1, -i, 0), \\ \Psi_{--}(\mathbf{k}') &\ll \Psi_{++}(\mathbf{k}'), & \mathbf{d}_+(\mathbf{k}) &= \frac{\theta^2}{2} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_+(-1, -i, 0), \end{aligned} \quad (4.37)$$

- Simétricos $\Psi_{--}(\mathbf{k}') \simeq \Psi_{++}(\mathbf{k}')$, en este caso $\gamma_+ \simeq \gamma_- = \gamma$, así el vector gap toma la forma

$$\mathbf{d}_0(\mathbf{k}) = -i\theta^2(0, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}, 0). \quad (4.38)$$

- El caso con proyección de spin nulo, $\Psi_{--}(\mathbf{k}') = 0 = \Psi_{++}(\mathbf{k}')$, en este caso el vector gap toma la forma

$$\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{k}) = \theta^2(0, 0, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0). \quad (4.39)$$

En notación matricial, las componentes de los distintos gaps se leen como

$$\hat{\Delta}_S^{(1)} = \theta^2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})\hat{\sigma}_0, \quad \hat{\Delta}_S^{(1)}\hat{\Delta}_S^{(1)\dagger} = \theta^4|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}|^2\hat{\sigma}_0, \quad (4.40)$$

$$\hat{\Delta}_{A\pm}^{(1)} = i(\mathbf{d}_{\pm}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma})\hat{\sigma}_y, \quad \hat{\Delta}_{A\pm}^{(1)}\hat{\Delta}_{A\pm}^{(1)\dagger} = \theta^4|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\pm}|^2\hat{\mathcal{P}}^{(\pm)}, \quad (4.41)$$

$$\hat{\Delta}_0^{(1)} = i(\tilde{d}_z(\mathbf{k})\hat{\sigma}_z)\hat{\sigma}_y, \quad \hat{\Delta}_0^{(1)}\hat{\Delta}_0^{(1)\dagger} = \theta^4|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0|^2\hat{\sigma}_0. \quad (4.42)$$

donde $\hat{\sigma}_0 = I_{2 \times 2}$, $\hat{\mathcal{P}}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \pm \sigma_z)$.

De las expresiones anteriores (4.40) y (4.42) representan apareamientos unitarios, mientras que (4.41) representa un apareamiento no unitario.

Con el propósito de estudiar el caso de pares de electrones con spin total nulo, nos restringiremos al caso de los apareamientos asimétricos, i.e. al caso de un apareamiento no unitario.

4.5. Apareamiento Unitario y No Unitario

En el caso unitario existe la libertad de escoger $\hat{u}_{\mathbf{k}} \sim \hat{\sigma}_0$, por lo que

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}(\hat{E}_{\mathbf{k}}^2 - \xi_{\mathbf{k}}^2 \hat{\sigma}_0 - \hat{\Delta}(\mathbf{k})\hat{\Delta}^\dagger(\mathbf{k})) = 0. \quad (4.43)$$

Como resultado en este caso $E_{\mathbf{k}+} = E_{\mathbf{k}-}$, de esta forma el espectro de las excitaciones del sistema está dado por

$$E_{\mathbf{k}\pm} = \left(\xi_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\Delta}\hat{\Delta}^\dagger) \right)^{1/2}. \quad (4.44)$$

Por otra parte, para el apareamiento no unitario $\hat{\Delta}\hat{\Delta}^\dagger \sim \hat{\mathcal{P}}^{(\pm)}$ la ecuación (4.43), es satisfecha si escogemos la matriz de transformación $\hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = f(\mathbf{k})\hat{\mathcal{P}}^{(\alpha)} + \hat{\mathcal{P}}^{(-\alpha)}$, donde por simplicidad consideremos $f(\mathbf{k}) = f(-\mathbf{k})$ una función real (el índice α indica los dos casos del apareamiento asimétrico). Con el propósito de encontrar una expresión explícita para la matriz $\hat{v}_{\mathbf{k}}$, escribamos (4.25) como

$$\hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}(\hat{E}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}}\hat{\sigma}_0) = -(\hat{\Delta}_{A\alpha}^{(1)}(-\mathbf{k}))^T (\hat{u}_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)})^* = \hat{\Delta}_{A\alpha}^{(1)}(\mathbf{k})\hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)*}, \quad (4.45)$$

nótese que la matriz $(\hat{E}_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}}\hat{\sigma}_0)$ puede ser escrita como

$$(\hat{E}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}}\hat{\sigma}_0) = (E_{\mathbf{k}+}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})\hat{\mathcal{P}}^{(+)} + (E_{\mathbf{k}-}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})\hat{\mathcal{P}}^{(-)} = \sum_{\beta} (E_{\mathbf{k}\beta}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})\hat{\mathcal{P}}^{(\beta)}, \quad (4.46)$$

y su inversa como

$$(\hat{E}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}}\hat{\sigma}_0)^{-1} = (E_{\mathbf{k}+}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{(+)} + (E_{\mathbf{k}-}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{(-)} = \sum_{\beta} (E_{\mathbf{k}\beta}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})^{-1}\hat{\mathcal{P}}^{(\beta)}. \quad (4.47)$$

De esta forma la ecuación (4.45), se lee

$$\hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \theta^2 \left(\frac{f(\mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{\alpha})}{E_{\mathbf{k}\alpha}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}}} \right) \hat{\mathcal{P}}^{(\alpha)}, \quad (4.48)$$

Las matrices $\hat{u}_{\mathbf{k}}$ y $\hat{v}_{\mathbf{k}}$ satisfacen las ecuaciones (F.10) y (F.11), lo cual puede ser chequeado por sustitución directa

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)\dagger} + \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)\dagger} = f^2(\mathbf{k}) \left(1 + \theta^4 \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha|^2}{(E_{\mathbf{k}\alpha}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})^2} \right) \hat{\mathcal{P}}^{(\alpha)} + \hat{\mathcal{P}}^{(-\alpha)} = \hat{\sigma}_0, \quad (4.49)$$

donde

$$f(\mathbf{k}) = \left(1 + \theta^4 \frac{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_\alpha|^2}{(E_{\mathbf{k}\alpha}^{(\alpha)} + \xi_{\mathbf{k}})^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.50)$$

Usando que $(\hat{v}_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)})^T = -\hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$, $(\hat{u}_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)})^T = \hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)}$

$$\hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} (\hat{v}_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)})^T + \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} (\hat{u}_{-\mathbf{k}}^{(\alpha)})^T = -\hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} + \hat{v}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} \hat{u}_{\mathbf{k}}^{(\alpha)} = \hat{\mathbf{0}}. \quad (4.51)$$

Finalmente, el espectro de las excitaciones del sistema, puede ser calculado para todos los casos del triplete como en el caso unitario. Por lo tanto, la relación de dispersión para el caso simétrico y con proyección de spin nula es

$$E_{S,\mathbf{k}\pm}^{(1)} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \theta^4 |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}|^2)^{1/2}, \quad (4.52)$$

$$E_{0,\mathbf{k}\pm}^{(1)} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \theta^4 |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_0|^2)^{1/2}, \quad (4.53)$$

y para el caso asimétrico

$$E_{A\pm,\mathbf{k}\pm}^{(1)} = \left(\xi_{\mathbf{k}}^2 + \frac{1}{2} \theta^4 |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_\pm|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.54)$$

Puede verse que los dos primeros apareamientos corresponden al caso de apareamientos unitarios, donde la temperatura crítica se calcula como en el caso estándar de BCS, mientras que el caso asimétrico, corresponde al caso no unitario, donde el apareamiento entre los electrones con spin paralelo, rompe la simetría de inversión temporal.

4.6. Ecuaciones de Autoconsistencia

En esta sección calcularemos explícitamente la temperatura crítica utilizando las ecuaciones de auto consistencia, en el caso del apareamiento no unitario.

Una vez diagonalizado el Hamiltoniano, un cálculo directo muestra que

$$\langle\langle b_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger b_{\mathbf{k}\alpha} \rangle\rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}}} \quad (4.55)$$

y de esta forma

$$\Psi_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k};\beta\beta} v_{\mathbf{k};\alpha\alpha} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}}} \right) - v_{\mathbf{k};\beta\beta} u_{\mathbf{k};\alpha\alpha} \left(\frac{1}{1 + e^{\beta E_{\mathbf{k}}}} \right).$$

En este caso se ha usado la propiedad de conmutación de las matrices diagonales $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$. De esta forma, reemplazando (4.56) en las ecuaciones (4.10), obtenemos las ecuaciones de autoconsistencia

$$\Delta_{++}^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{g}{V} \theta^4 \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) \frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_+)}{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 + \theta^4 |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_+|^2} \tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2), \quad (4.56)$$

$$\Delta_{--}^{(1)}(\mathbf{k}) = \frac{g}{V} \theta^4 \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) \frac{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_-)}{(E_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}})^2 + \theta^4 |\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}_-|^2} \tanh(\beta E_{\mathbf{k}}/2), \quad (4.57)$$

donde $E_{\mathbf{k}}$ es la energía del estado excitado, los subíndice se han omitido por simplicidad.

Para calcular la temperatura crítica T_c , es necesario considerar que a esta temperatura el estado superconductor coincide con el estado normal, i.e. se anula el gap del espectro.

De esta forma, a una temperatura cercana a T_c , las componentes de la matriz gap se anulan. En este caso podemos tomar la relación de dispersión de forma aproximada como $E_{\mathbf{k}} \rightarrow \xi(\mathbf{k})$, con $\xi(\mathbf{k})$ una variable continua.

En este punto, existe otro hecho que debe ser tomado en consideración, y es que la contribución más importante para superconductividad proviene de electrones interactuantes sobre la superficie de Fermi con $0 < \xi(\mathbf{k}) < \kappa$, de manera que la ecuación de auto consistencia se lee como

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}) &\simeq \frac{g\theta^2}{V} k_F^2 N(0) \int d\Omega' (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) k_F^{-1} (\mathbf{k}' k_F^{-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \int_0^\kappa d\xi \frac{\tanh(\xi/2T_c)}{2\xi} \\ &= \frac{g\theta^2}{V} k_F^2 N(0) \int d\Omega' (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) k_F^{-1} (\mathbf{k}' k_F^{-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \ln(1,14\kappa/T_c), \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde $\beta = 1/T$ y $N(0) \simeq N(\kappa)$ es la densidad de estados por intervalo de energía, la cual se puede considerar constante sobre la superficie de Fermi $0 < \xi(\mathbf{k}) < \kappa$. La solución de la ecuación anterior puede ser obtenida como un problema de autovalores, esto es

$$\frac{gk_F^2 N(0)}{V} \int d\Omega' (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} + 2k'_z k_z) (\mathbf{k}' k_F^{-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \lambda(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}). \quad (4.59)$$

Escribiendo estas ecuaciones de autovalores en términos de sus componentes

$$\frac{gk_F^2 N(0)}{V} k_i \left(\int d\Omega' k'_i k_F^{-1} (\mathbf{k}' k_F^{-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right) = \lambda(k_i \gamma_i),$$

se obtiene que, los autovalores correspondientes a las dos direcciones de k normal al eje de z , son $\lambda_0 = \tilde{g}/2 = \tilde{g}/2$, mientras que el autovalor correspondiente a la dirección de z es igual a $\lambda_z = 2\tilde{g} = 2\tilde{g}$, donde $\tilde{g} = g\pi^2 k_F^2 N(0) V^{-1}$. Independiente de estas pequeñas diferencias en estos autovalores, es posible obtener una expresión genérica para la temperatura crítica en este caso

$$\begin{aligned} 1 &= \theta^2 \lambda \ln(1,14\kappa/T_c), \\ T_c &= 1,14\kappa e^{-\kappa^2/\lambda}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

notar que si $\theta \rightarrow 0$ entonces $T_c \rightarrow 0$.

Por lo tanto, la teoría BCS para superconductores no convencionales sobre un espacio no conmutativo, se reduce en a la teoría standard en el caso del singlete ($g < 0$) y para el caso del triplete se produce por una interacción repulsiva.

Es importante destacar que en el caso del triplete, en el apareamiento con una proyección de spin nulo, los procesos de scattering se restringen sólo a la superficie normal a la proyección de spin total.

Por otra parte, los apareamientos asimétricos presentan una baja temperatura crítica, junto con la ruptura de simetría de inversión temporal. El resultado de este análisis es bastante interesante puesto que describe un nuevo mecanismo para la superconductividad triplete, a partir del mecanismo de Cooper con una mínima modificación inducida por la no conmutatividad. La baja temperatura crítica y la ruptura adicional de la simetría de inversión temporal son dos características observadas en el Sr_2RuO_4 el cual es el único material superconductor triplete observado actualmente, [55].

4.7. Conclusiones del Capítulo

La teoría de superconductividad no convencional sobre un espacio conmutativo, brevemente analizada en este capítulo, permite describir las propiedades de superconductores, con diferentes clases de apareamientos, sin que sea necesario especificar explícitamente el potencial de interacción.

El modelo de mecánica cuántica no conmutativa, desarrollado a lo largo de esta tesis, induce una modificación no trivial en el potencial. Permite por ejemplo, que el estado de spin triplete pueda ser incorporado en el mecanismo de Cooper.

La extensión de esta modificación al caso de un sistema de muchas partículas, da origen a una fase superconductora de spin triplete, que presenta similares

características a las observadas experimentalmente, a saber, muestra una baja temperatura crítica y la ruptura de la simetría de inversión temporal en un superconductor triplete.

Establece una relación entre el spin total y la dirección de los apareamientos, de tal manera que los apareamientos con una proyección de spin total nula, se restringen al plano normal a la dirección del spin s_z .

Por otra parte, generaliza la interacción electrón-fonón, de manera que pueda ser la responsable de la superconductividad no-convencional de spin triplete.

Capítulo 5

Conclusiones generales y problemas abiertos

En esta tesis, se ha estudiado la construcción de un espacio no conmutativo, con un álgebra covariante bajo rotaciones. Los requerimientos de consistencia, impuestos por la identidad de Jacobi, muestran que al incorporar partículas es posible construir un álgebra no conmutativa covariante bajo rotaciones, donde las relaciones de conmutación de las coordenadas son proporcionales al spin.

Luego, mediante un cambio de base entre las coordenadas conmutativas y las coordenadas no conmutativas, es posible identificar los efectos de la estructura no conmutativa del espacio, con una modificación no trivial del potencial. De tal forma que, es posible construir al menos dos Hamiltonianos hermíticos, de los cuales sólo uno se reduce al caso estándar en el límite $\theta \rightarrow 0$.

Utilizando este modelo de mecánica cuántica no conmutativa, se estudia el problema de Cooper sobre un espacio no conmutativo. Como resultado se obtiene que, el caso singlete se reduce al caso estándar con una interacción atractiva. Mientras que en el caso del triplete surge un estado ligado de pares de electro-

nes con spin total no nulo, tanto para una interacción atractiva, como para una interacción repulsiva, esto indica que la formación de pares en este caso, se puede producir aun cuando la interacción electrón-fonón no supere la repulsión de Coulomb.

Finalmente, utilizando este mecanismo se analiza el problema de la superconductividad triplete. Como resultado, se encuentra un apareamiento no unitario, que puede ser analizado de manera muy similar al caso unitario. De hecho, en este caso, la expresión para la temperatura crítica toma la misma forma que en el caso singlete standard. Sin embargo, los apareamientos entre electrones con spin paralelo rompen adicionalmente la simetría de inversión temporal,

De lo anterior, se observa que la ruptura de dicha simetría está regulada por la diferencia entre el número de pares de electrones con $c_{F;\mathbf{k}++}^\dagger$ y el número de pares de electrones con $c_{F;\mathbf{k}--}$, diferencia que puede ser entendida como una magnetización al interior del superconductor.

Adicionalmente, se obtiene una clase de apareamiento triplete con una proyección de spin nula, la cual restringe apareamientos de los electrones al plano perpendicular a la dirección del spin. Este caso resulta ser bastante interesante, puesto que la fase metálica del único material superconductor triplete que ha sido comprobado, se describe por medio de un líquido de Fermi bidimensional, esto indicaría que el Hamiltoniano de interacción del caso triplete con $m = 0$, puede describir de forma continua la fase metálica y superconductora de este material.

Formalmente esto indica que el término de interacción no se anula para $T > T_c$, en otras palabras la transición de fase en este caso se describe simplemente por una condensación de los pares, sin la necesidad de introducir una interacción atractiva a una cierta temperatura crítica.

En resumen, el presente modelo de no conmutatividad, resulta ser un es-

cenario muy favorable, donde estudiar las interacciones debidas al spin de las partículas. Las modificaciones inducidas por este modelo de no conmutatividad, permiten incluir estados de spin no nulo, como los estados que son preferidos energéticamente.

Algunos problemas abiertos

A continuación daremos un listado de problemas que pueden extender el trabajo de esta tesis, y de problemas abiertos relacionados

- Mecánica cuántica no conmutativa con grados de libertad internos. La posibilidad de incluir otros grados de libertad internos como en el isospin en un álgebra no conmutativa, es una propuesta interesante que puede ser estudiada en el contexto de ciertos modelos de *QCD* a bajas energías.
- BEC-BCS Una propuesta que actualmente está siendo muy estudiada es la relación entre la teoría de BCS y la condensación de Bose-Einstein. En términos muy simples ambas teorías incluyen la formación de pares de Fermiones que se comportan como un gas de Bosones. En esta dirección se ha sugerido que ciertos sistemas podrían de moléculas y gases podrían exhibir un comportamiento que se describe en una región intermedia entre BCS y BEC. Uno de los resultados de esta tesis fue mostrar que debido a las modificaciones inducidas por no conmutatividad, el espectro de las excitaciones un sistema de Bosones interactuantes tiene la misma forma que el espectro de las excitaciones en un superconductor. Resulta interesante, por tanto, estudiar estas modificaciones como una conexión entre BCS y BEC.

Apéndice A

Artículos Publicados

En este apéndice reproducimos el artículo publicado en *Physics Letters A* **375** (2011) 1756-1759 (“*Generalization of the Cooper pairing mechanism for spin-triplet in superconductors*”), que ha sido mencionado a lo largo de la presente tesis, donde se demuestra que una modificación del mecanismo de Cooper – inspirado en resultados de no-conmutatividad de spin – puede favorecer un estado triplete, como el responsable de la superconductividad no convencional.

Se reproduce, además, un segundo artículo, que no tiene relación directa con el trabajo aquí presentado, pero que ha sido producto de los tres años de investigación durante los cuales esta tesis se ha desarrollado. En dicho artículo se exploran posibles consecuencias medibles – a través de lentes gravitacionales – de métricas del espacio-tiempo, que pueden depender de la energía de las partículas que se propagan en él.

Este artículo ha sido publicado en *International Journal of Modern Physics D* V.2 no 1 (2012) 1250007 (“*Gravitational Lensing in an Energy-Dependent Space-Time Metric*”).

A.1. Generalization of the Cooper pairing mechanism for spin-triplet in superconductors

A generalization of the Cooper pairing mechanism is proposed which allows for a triplet state of lower energy. This is achieved by incorporating spin into the canonical commutation relations and by modifying the δ potential contact interaction. The gap equation contain as solutions both singlet and triplet states. It is shown that the triplet state is lower in energy than the singlet state which may explain the spin-triplet superconductivity observed.

Superconductivity [63, 64] is a fascinating subject which has been studied vigorously both theoretically as well as experimentally in the past several decades [97, 98]. In conventional superconductivity, the electron-phonon interaction is known to lead to a condensed state of s -wave Cooper pairs and this has been experimentally verified. However, in certain materials such as the heavy fermion compound UPt_3 [99, 100], Sr_2RuO_4 [101, 103] and other materials [104], it has been observed that the Cooper pairs occur in a triplet state. This unconventional superconductivity [48, 105, 106, 107, 108] would be compatible with some kind of ferromagnetic effect due to the spin [109, 110] in a manner analogous to the spin triplet state in superfluid He^3 . Different approaches to explain this effect have been proposed in the literature in the context of conventional quantum mechanics [111, 112, 113]. However, a clear understanding of this phenomenon is so far lacking. In this letter we follow a different path, namely, we propose a minimal modification of quantum mechanics which allows for the existence of both singlet as well as triplet states and predicts an energetically favorable triplet state at low energies. This can be thought of as a starting point for constructing a macroscopic theory for such systems.

Basically we modify the canonical commutators in such a way that the space coordinates and spin become coupled through

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = -i\theta^2 \epsilon_{ijk} s_k, \quad [\hat{x}_i, s_j] = -\theta \epsilon_{ijk} s_k, \quad (\text{A.1})$$

while all the other commutators involving spin and momentum remain unchanged. Here θ is a very small real constant parameter with dimensions of length. In fact, such a modified algebra was already proposed in [114] and studied for the case where the parameter θ was real. Equation (A.38a) merely corresponds to the case where this parameter is purely imaginary (namely, letting $\theta \rightarrow i\theta$ in [114]) and in this case the operator \hat{x}_i ceases to be Hermitian. As a result, the full algebra satisfying Jacobi identity also involves the additional relations

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i^\dagger, \hat{x}_j^\dagger] &= -i\theta^2 \epsilon_{ijk} s_k, & [\hat{x}_i^\dagger, \hat{p}_j] &= i\delta_{ij}, \\ [\hat{x}_i^\dagger, s_j] &= \theta \epsilon_{ijk} s_k, & [\hat{x}_i^\dagger, \hat{x}_j] &= i\theta^2 \epsilon_{ijk} s_k. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

It is clear from (A.38a) and (A.2) that the coordinate operators \hat{x}_i are now matrices in the spin space. Furthermore, the complete algebra can also be realized in terms of the conventional operators through the change of basis

$$\hat{x}_i = x_i + i\theta s_i, \quad \hat{x}_i^\dagger = x_i - i\theta s_i, \quad \hat{p}_i = p_i. \quad (\text{A.3})$$

where (x_i, p_i, s_i) satisfy the standard commutation relations. In order to generalize the Cooper pair mechanism, we note that given a real (Hermitian) potential $V(\mathbf{x})$, a naive generalization to a standard Hamiltonian of the form (we set $m = 1$)

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} + V(\hat{\mathbf{x}}), \quad (\text{A.4})$$

would no longer be Hermitian nor would it be \mathcal{PT} symmetric [115] where the transformations of \hat{x}_i under \mathcal{P} and \mathcal{T} can be seen from (A.3) to correspond to

$$\hat{x}_i \xrightarrow{\mathcal{P}} -\hat{x}_i^\dagger, \quad \hat{x}_i^\dagger \xrightarrow{\mathcal{P}} -\hat{x}_i; \quad \hat{x}_i \xrightarrow{\mathcal{T}} \hat{x}_i, \quad \hat{x}_i^\dagger \xrightarrow{\mathcal{T}} \hat{x}_i^\dagger. \quad (\text{A.5})$$

We note here that even a \mathcal{PT} symmetric potential $V(ix)$ would not generalize to \mathcal{PT} symmetric system and we would restrict ourselves to real potential $V(\mathbf{x})$ in this work since our goal is to generalize the Cooper pair mechanism. In order to ensure the reality of the spectrum of the Hamiltonian, we note that given a potential $V(\hat{\mathbf{x}})$, we can construct two Hermitian Hamiltonians in a straightforward manner as [116]

$$H_+(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} + \frac{1}{2} (V(\hat{\mathbf{x}}) + V^\dagger(\hat{\mathbf{x}})), \quad (\text{A.6})$$

$$H_-(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2} + \frac{i}{2} (V(\hat{\mathbf{x}}) - V^\dagger(\hat{\mathbf{x}})). \quad (\text{A.7})$$

Furthermore, we note that if $V(-\hat{\mathbf{x}}) = V(\hat{\mathbf{x}})$ then H_+ is also \mathcal{PT} symmetric while if $V(-\hat{\mathbf{x}}) = -V(\hat{\mathbf{x}})$ then H_- is \mathcal{PT} symmetric as well. A straightforward calculation show that the Hamiltonians (A.6) and (A.7) can be expressed in terms of the standard operators (A.3) as

$$\begin{aligned} H_+(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{S}) &= \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{1}{2} (V(\mathbf{x} + i\theta\mathbf{S}) + V(\mathbf{x} - i\theta\mathbf{S})) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \cos(\theta\mathbf{S} \cdot \nabla) V(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} H_-(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{S}) &= \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{i}{2} (V(\mathbf{x} + i\theta\mathbf{S}) - V(\mathbf{x} - i\theta\mathbf{S})) \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \sin(\theta\mathbf{S} \cdot \nabla) V(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

where we have used the reality of the potential $V(\mathbf{x})$. We note from (A.8) and (A.9) that when $\theta \rightarrow 0$

$$H_+ \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\mathbf{x}), \quad H_- \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Therefore, we would concentrate on the Hamiltonian H_+ which would reduce in the limit $\theta \rightarrow 0$ to the conventional interacting Hamiltonian of the system. Furthermore, in spite of the nontrivial mixing of the space and spin variable, H_+ in (A.8) commutes with \mathbf{S} so that the eigenstates can be written as product states.

The generalization of this construction to a many particle system can be carried out in a straightforward manner. For example, let us consider a two particle system (which is relevant for our analysis) where the interaction depends on the relative coordinate $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. First, we note that the only combination of the coordinates $\hat{\mathbf{x}}_1$ and $\hat{\mathbf{x}}_2$ that commutes with the total spin $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ of the system is $\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2^\dagger$ and its conjugate. Therefore, the Hermitian potential which would also commute with the total spin can be written in the form

$$\begin{aligned} V_2(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{2} \left(V(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2^\dagger) + V^\dagger(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2^\dagger) \right) \\ &= \frac{1}{2} (V(\mathbf{r} + i\theta\mathbf{S}) + V(\mathbf{r} - i\theta\mathbf{S})), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

where we are assuming that the couplings are real. In particular, if we consider a contact potential which is responsible for the instability of Fermi sea against small attractive interactions between electrons [63, 64, 105], this would generalize in our case to a problem of two electrons interacting through the “contact”potential

$$V_2(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = -\frac{\gamma}{2} (\delta_\theta(\mathbf{r} + i\theta\mathbf{S}) + \delta_\theta(\mathbf{r} - i\theta\mathbf{S})) \quad (\text{A.12})$$

where we have defined a modified delta function as

$$\delta_\theta(\mathbf{z}) = \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\kappa} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}, \quad (\text{A.13})$$

which reduces to the standard delta function in the limit $\theta \rightarrow 0$. As a result, we can write the “contact”potential as

$$V_2(\mathbf{r}, \mathbf{S}) = -\gamma \int_{|\mathbf{k}|=0}^{|\mathbf{k}|=\frac{1}{\theta}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \cosh(\theta\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}), \quad (\text{A.14})$$

where γ is a positive constant. We note that the minimal modification of the delta potential preserves the qualitative nature of the electron-phonon interaction (na-

mely, the two electrons interact through a local deformation of the lattice), but introduces a finite range of interaction of the order 2θ .

Since the potential depends on the relative coordinate, the energy levels are determined from the Schrödinger equation for the reduced system

$$(-\nabla^2 + V_2(\mathbf{r}, \mathbf{S}))\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = E^{(s,m)}\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.15})$$

where we use the compact notation $\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})|s, m\rangle$ with $|s, m\rangle$ labeling the representation of \mathbf{S} . In the momentum space

$$\Psi^{(s,m)}(\mathbf{r}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.16})$$

we can write (A.15) as (for $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| < \frac{1}{\theta}$)

$$\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) = \frac{\gamma}{(\mathbf{k}^2 - E^{(s,m)})} \int d^3k' \cosh(\theta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{S})\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}') \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{\gamma}{(\mathbf{k}^2 - E^{(s,m)})} \int d^3k' (\cosh(\theta\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \cosh(\theta\mathbf{k}' \cdot \mathbf{S}) \quad (\text{A.18})$$

$$+ \sinh(\theta\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \sinh(\theta\mathbf{k}' \cdot \mathbf{S})) \Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}'). \quad (\text{A.19})$$

From (A.16) we note that the antisymmetry of the two electron wavefunction under the exchange of particles determines (P_{12} is the exchange operator)

$$P_{12}\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}) = (-1)^{s+1}\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}),$$

$$\Phi^{(s,m)}(-\mathbf{k}) = (-1)^s\Phi^{(s,m)}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.20})$$

Using these relations, it follows from (A.19) for the singlet state ($s = 0$) that

$$\gamma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\langle \cosh^2(\theta\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) \rangle^{(0,0)}}{(\mathbf{k}^2 - E^{(0,0)})} = 1, \quad (\text{A.21})$$

while the triplet state ($s = 1$) leads to

$$\gamma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\langle \cosh^2(\theta\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) - 1 \rangle^{(1,m)}}{(\mathbf{k}^2 - E^{(1,m)})} = 1, \quad (\text{A.22})$$

which can be thought of as the gap equations for the singlet and the triplet states respectively. Here $\langle \cdot \rangle^{(s,m)}$ represents the expectation value in the state $|s, m\rangle$. We can simplify these equations by noting that

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})^2 = k^2 (1 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)k^{-2})/2 = k^2 S_{12}, \quad (\text{A.23})$$

where we have identified $k = |\mathbf{k}|$, $\mathbf{S}_i = \boldsymbol{\sigma}_i/2$, $i = 1, 2$ and we note that $S_{12}^2 = S_{12}$ which leads to

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S})^{2n} = k^{2n} S_{12}, \quad \cosh^2(\theta \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) = 1 + \sinh^2(\theta k) S_{12}. \quad (\text{A.24})$$

With a little bit of algebra, we can show that

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \langle S_{12} \rangle^{(0,0)} &= 0, \\ \int \frac{d\Omega}{4\pi} \langle S_{12} \rangle^{(1,m)} &= \rho^{(m)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{6} (1 + 1^{|m|}) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

It is worth noting here that the three triplet states have the same value of ρ , which indicate that this state is degenerate.

To investigate the Cooper pair mechanism, we convert the momentum integrations in (A.21) and (A.22) to energy integrals through the identification $2\epsilon = k^2$. Furthermore, as is well known the electrons which contribute to superconductivity lie in a thin energy shell near the Fermi surface, namely, $\epsilon_F < \epsilon < \epsilon_F + \epsilon_c$ where ϵ_F is the Fermi energy and $\epsilon_c \ll \epsilon_F$ so that we can restrict the energy integration to this small interval. Using (A.24) and (A.25) in (A.21), we obtain

$$\gamma N(0) \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} \frac{d\epsilon}{(2\epsilon - E^{(0,0)})} = 1, \quad (\text{A.26})$$

where $N(0) = \frac{k^2}{2\pi^2} \frac{dk}{d\epsilon}$ is the density of states per unit energy interval which is assumed to be constant within this small range of the integral. This (gap) equation for

the singlet state coincides with the standard commutative case. Therefore, there is no noncommutative correction to the energy of the singlet state which has the value

$$E^{(0,0)} = 2 \left(\epsilon_F - \epsilon_c e^{-\frac{2}{\gamma N(0)}} \right). \quad (\text{A.27})$$

On the other hand, using (A.24) and (A.25) in (A.22) we obtain

$$\begin{aligned} \gamma \rho^{(m)} N(0) & \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} d\epsilon \frac{\sinh^2(\theta \sqrt{2\epsilon})}{(2\epsilon - E^{(1,m)})} \\ & \simeq 2\gamma \rho^{(m)} N(0) \theta^2 \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} \frac{d\epsilon \epsilon}{(2\epsilon - E^{(1,m)})} = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

The integration can be carried out in a straightforward manner and leads to

$$\frac{2}{E^{(1,m)}} \left(\frac{1}{\gamma N(0) \rho^{(m)} \theta^2} - \epsilon_c \right) = \ln \left(1 + \frac{2\epsilon_c}{2\epsilon_F - E^{(1,m)}} \right). \quad (\text{A.29})$$

To show that the triplet state has a lower energy than the singlet state, let us define the dimensionless ratio

$$x = \frac{E^{(1,m)}}{E^{(0,0)}}, \quad (\text{A.30})$$

and rewrite (A.29) as

$$C = 1 + Bx \ln \left(1 + \frac{1}{B(1-x) + e^{-A}} \right), \quad (\text{A.31})$$

where we have defined three dimensionless constants

$$A = \frac{2}{\gamma N(0)}, \quad B = \frac{E^{(0,0)}}{\epsilon_c} = \frac{\epsilon_F}{\epsilon_c} - e^{-A}, \quad C = \frac{A}{2\rho^{(m)}\theta^2\epsilon_c}. \quad (\text{A.32})$$

Equation (A.31) can be solved graphically by looking for the simultaneous solutions of the equations

$$y = C, \quad y = 1 + Bx \ln \left(1 + \frac{1}{B(1-x) + e^{-A}} \right), \quad (\text{A.33})$$

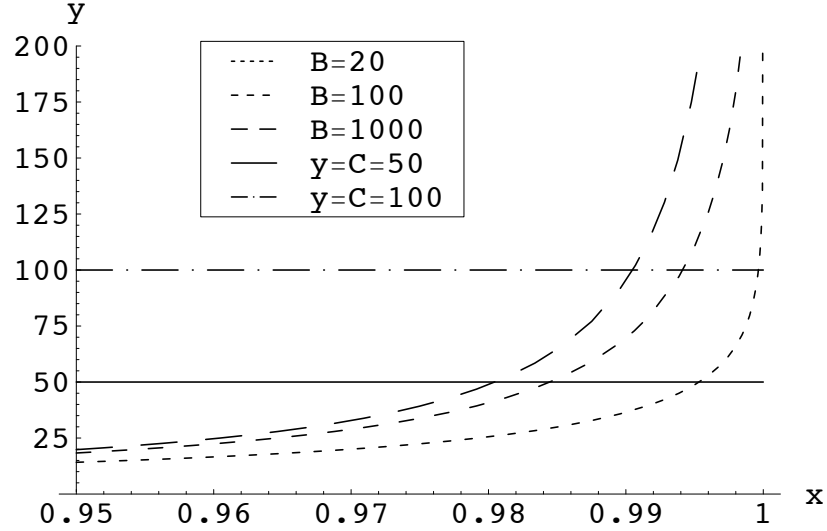


Figura A.1: Simultaneous solution of (A.33).

which are plotted in Fig. 1 for different values of the constants B, C . We note that in the weak coupling approximation $A \gg 6,7$ and for conventional superconductors $B > 10$ (recall that $\epsilon_c \ll \epsilon_F$) and since θ is a small parameter, the constant C can be chosen to be of the order of 10^2 . The parameters in the plot are chosen keeping this in mind. Let us discuss some of the general features of the simultaneous solution. First as θ is taken to be smaller and smaller and, therefore, C larger, the solution $x \rightarrow 1$ implying that in the limit $\theta \rightarrow 0$, the singlet and the triplet solutions become degenerate. However, for any finite and small θ , the solution exists for $x < 1$ implying that the triplet solution is lower in energy than the singlet solution. Furthermore, from the fact that $\rho^{(m)}$ is the same for the three states, the ground state become degenerate.

The graphical solutions can also be understood qualitatively as follows. Since e^{-A} is a very small quantity, when $e^{-A} \ll B(1-x) < 1$, then (A.31) can be written

approximately as

$$C \approx \frac{1}{1-x}, \quad \text{or} \quad x \approx 1 - \frac{1}{C} < 1. \quad (\text{A.34})$$

For $\theta \rightarrow 0$, $C \rightarrow \infty$ so that $x \rightarrow 1$ as we have already mentioned.

The result of this analysis is quite interesting because it describes a theoretical mechanism for a triplet pairing state which is lower in energy than the singlet state which may explain the behavior of some of the unconventional superconductors. Although the precise mechanism of why some materials prefer a singlet state rather than a triplet state *or vice versa* as the ground state is not understood yet, our analysis suggests that such an understanding may be achieved in going beyond the conventional quantum theory.

A.2. Gravitational Lensing in an Energy-Dependent Space-Time Metric

In this article we explore the consequences of an energy dependent metric in the deflection angle of photons, caused by a gravitational source of mass M . We analyze the corrections to the standard Schwarzschild case for the weak and strong limits. In both cases, the corrections to the deflection angle are of the order ϵ/E_{Pl} , where E_{Pl} is the Planck energy and ϵ , the energy of the photon at spatial infinite. For the strong limit, however, the correction is amplified for a factor $n e^{2n\pi}$ for the relativistic image of order n . We have found the corrections to the angular separation image of the source, as well as corrections to the amplification of the image. Even if both corrections are tiny, we discuss the qualitative effects for different types of Lorentz invariance deformations.

A.2.1. Introduction

The search of measurable remnants of quantum gravity (QG) has deserved much attention during last years [117]. A common approach to the problem is to consider a model of quantum gravity¹ and to discuss the phenomenological consequences associated to it. In this arena, Lorentz Symmetry (LS) deformation or LS violation are two possible consequences of QG with a phenomenology widely studied [118].

For the case of LS deformation, it has been intensively discussed the so called DSR approach, which corresponds to a nonlinear realization of the LS [119] in the momentum space. The problem of finding a realization of this proposal in the spacetime is still a pending problem [120]. In the present paper we discuss the consequences of the so called *rainbow gravity* (RG) [121], a proposal of DSR spacetime, for the propagation of photons in a curved spacetime.

The main characteristic of RG is the dependence of the metric on the energy of the particle that propagates on it (the energy of the photon in our present discussion). By other hand, the possibility that a photon path might depend on the photon properties has been discussed in several contexts. For example in [122], a dependence on the polarization state of photons is found due to QED vacuum polarization. In [123], different coupling terms in the Lagrangian, between photons and the gravitational field, are explored and as a consequence photon's paths are energy dependent. More recently in [124] energy dependent contribution to the deflection of light was reported in the context of quadratic gravity.

The possibility, on the other hand, that this dependences could be already incorporated in the metric² was explored in the context of string theory by Ellis,

¹Many times, an effective theory proposal of quantum gravity is under scrutiny.

²That was already suggested in [123] but only as a tool for calculations.

Mavromatos, Nanopoulos and Volkov,[125] and also in the context of emergent gravity [126].

From a different point of view, in [127] B. Chen and R. Kantowski have considered the effects of a position-dependent refractive index on distance-redshift relations in order to explore an alternative explanation to the observed cosmic acceleration.

These modifications are expected to be very tiny and then, an amplification mechanism should be present in order to have a chance to detect them. For photons, a possible mechanism for that are cumulative effects in a long distance travel, possibly at cosmological scales or the very strong gravitational field near a Black Hole [128].

In this context, observed *gravitational lensing* (GL) phenomenon turns out to be a very interesting place to probe the present QG Models and modifications of gravitational theory. Even though, the null geodesic in RG has been discussed, see [129], the deflection angle in the strong limit and the image formation still remains an open problem.

The purpose of the present paper is to discuss the problem of the bending of light and the image formation in a particular RG model. It is not the purpose of this paper to discuss in detail the arguments leading to an energy dependent (rainbow) metric; the interested reader is referred to the original papers cited before.

This paper is organized as follows: In Section 2 we briefly discuss the calculation of the light deflection by geodesic equation. In the appendix, we show that this approach is compatible with the geometrical optics limit only if we considered a suitable optical path length definition. In Section 3 we apply the previous calculation to the case of the simple model of point-like weak gravitational lens, in the weak and the strong limit. The last Section is devoted to summary and

discussions.

A.2.2. Geodesic Approach

As a possible DSR space-time, we are interested in the approach by Magueijo and Smolin [121] where the metric is given by

$$ds^2 = (1 - a/r)f^{-2}(E)dt^2 - (1 - a/r)^{-1}g^{-2}(E)dr^2 - r^2g^{-2}(E)d\Omega^2, \quad (\text{A.35})$$

with a the Schwarzschild radius, $d\Omega^2$ the differential solid angle and E , the energy of the photon measured by an inertial observer, that means that a set of metrics parametrized by E , share a set of inertial observers, as it was discussed in the original paper [121].

In our case the observer has to be sufficiently far from the lensing to be considered in (approximately) flat space. At this point, the measured energy of the photon will be denoted by ϵ .

In concrete, for this metric we will consider a generic first order expression for the function $E(r)$

$$E(r) = \epsilon \left(1 + \rho \frac{a}{r} \right), \quad (\text{A.36})$$

with ϵ the energy of the photon at $r \rightarrow \infty$ and ρ a parameter of order one.

The functions f and g , by other hand, are those defined in DSR models in the momentum space and we will use first order expression for these functions, therefore

$$f(E) = 1 + \alpha \frac{E(r)}{E_{\text{Pl}}}, \quad g(E) = 1 + \beta \frac{E(r)}{E_{\text{Pl}}}, \quad (\text{A.37})$$

where α, β are numerical coefficients of order 1.

In order to calculate the deflection angle by a gravitational source, which is the central result that one uses to study GL, we will find the extreme of the integral of the distance element ds defined in (A.35)³

Consider the action (proper distance) for the metric (A.35), given by

$$I = \int \sqrt{\frac{1-a/r}{f^2(r)} \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{(1-a/r)g^2(r)} - \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{g^2(r)}} d\tau,$$

where τ is a parameter and we have considered equatorial geodesics ($\theta = \pi/2$).

A direct calculation shows that equations of motion have a first integral which are

$$\frac{(1-a/r)\dot{t}}{f^2(r)} = 1, \quad (\text{A.38a})$$

$$\frac{r^2 \dot{\phi}}{g^2(r)} = J, \quad (\text{A.38b})$$

$$\frac{\dot{r}^2}{(1-a/r)g^2(r)} + \frac{J^2 g^2(r)}{r^2} - \frac{f^2(r)}{(1-a/r)} = 0. \quad (\text{A.38c})$$

Three integration constants appears here. For (A.38a), the constant is chosen equals 1, since it relates the two energy independent quantities t and τ . While, in (A.38b), the integration constant J have dimension of length. Finally in (A.38c), the integration constant is zero since we are studying null geodesics.

We can parametrize the trajectory of the photon by the angle ϕ and then the last equation reads now

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{J^2 g^2(r)}{(1-a/r)r^4} + \frac{J^2 g^2(r)}{r^2} - \frac{f^2(r)}{(1-a/r)} = 0. \quad (\text{A.39})$$

³An independent method to calculate the trajectory is the so called Eikonal approach, which is equivalent to the variational method in the standard Schwarzschild case, but in the present scenario, where distances depend on the energy of the photon, this could not be the case and then both approaches offer two independent ways to calculate the deviation angle. In the Appendix section we check this equivalence by the explicit calculation of the Eikonal approach.

In order to discuss the interpretation of the parameter J , let us integrate previous equation in the region where gravitational effects can be neglected. There we have

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{J^2 g_\infty^2}{r^4} + \frac{J^2 g_\infty^2}{r^2} - f_\infty^2 = 0. \quad (\text{A.40})$$

This equation is directly integrated once the explicit expressions for f and g are used. The solution is

$$r \sin(\phi - \phi_\infty) = \frac{g_\infty J}{f_\infty}, \quad (\text{A.41})$$

where (r, ϕ) are the coordinates of a point in the rainbow flat region and ϕ_∞ is the direction of the incident photon (with $r \rightarrow \infty$). Constants f_∞, g_∞ are

$$f_\infty \equiv 1 + \frac{\alpha\epsilon}{E_{\text{pl}}}, \quad g_\infty \equiv 1 + \frac{\beta\epsilon}{E_{\text{pl}}}.$$

In the standard Schwarzschild case – which corresponds to $f_\infty \rightarrow 1$ and $g_\infty \rightarrow 1$ in equation (A.41) – J is just the projection $r \sin(\phi - \phi_\infty)$ and therefore J is the impact parameter in this case.

In the present case, we have (A.41) describing the geometric relation between the distances r and J . This equation can be written also as

$$\sin(\phi - \phi_\infty) = \left(\frac{J}{r}\right) \left(1 + (\beta - \alpha) \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} + \dots\right),$$

which just says that the standard trigonometric relations are also modified due to the energy dependences of the metric (see Appendix).

The other parameter of interest in the present discussion is the *minimal approach distance* r_0 . That is the minimal distance between the gravitational source and the photon trajectory. The condition defining this point is $\dot{r} = 0$ and then r_0 is given by the equation (A.38c) when previous condition is imposed. This leads to the following equation

$$\frac{J^2 g^2(r_0)}{r_0^2} = \frac{f^2(r_0)}{(1 - a/r_0)}, \quad (\text{A.42})$$

The solutions of this equation must be calculated in the different limits, as we will see in the following subsections.

The weak limit approximation

The deflection angle in the weak limit is calculated from the solution of (A.39) for $a/r_0 \ll 1$. In order to do that is necessary to express J in terms of the minimal approach distance r_0 by solving (A.42) in the weak limit, which gives

$$r_0 \sim \frac{Jg_\infty}{f_\infty}, \quad (\text{A.43})$$

that is, the impact parameter discussed in the previous section, corrected by the energy dependent terms.

By replacing J in (A.43) we find for the integral in (A.39)

$$\Delta\phi = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}}} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{f^2(r)g^2(r_0)}{g^2(r)f^2(r_0)} \frac{(1 - a/r_0)}{(1 - a/r)} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.44})$$

Expanding in terms of a/r and a/r_0 we obtain

$$\Delta\phi = \frac{a(2 + C_0)}{2r_0} + \frac{\pi}{2} + \dots, \quad (\text{A.45})$$

with $C_0 = 2\rho \left(\frac{\beta}{g_\infty} - \frac{\alpha}{f_\infty} \right) \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}}$.

The deflection angle $\Delta\varphi$ in terms of the integral previously calculated turn out to be

$$\Delta\varphi = 2\Delta\phi - \pi. \quad (\text{A.46})$$

For a photon with energy ϵ at infinity, in the rainbow metric, up to first order in ϵ/E_{Pl} , the deflection angle turn out to be

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{a}{r_0} (2 + C_0), \\ &\equiv \Delta\varphi_{\text{GR}} \left(1 + (\beta - \alpha)(\rho - 1) \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \right).\end{aligned}\quad (\text{A.47})$$

with $\Delta\varphi_{\text{GR}} = 2a/J$, the deflection angle of the Schwarzschild standard case. Note that in this standard case, J is equals to the impact parameter usually denoted as b .

We can see here that, if $\rho = 1$ then the linear corrections vanish, as well as in the case $\alpha = \beta$ as in DSR2. We also note that, up to first order in the Planck scale, the deflection angle in RG could be greater or smaller than the deflection angle in standard Schwarzschild case, depending on the sign of $(\beta - \alpha)(\rho - 1)$.

The strong limit approximation

Now we will investigate the deflection of light in the so called strong limit. Here the minimal approach distance is of the order of the Schwarzschild radius a . In what follows, our analysis will be focused in the case of deflection by a black hole (BH) so the limit $r \rightarrow a$ has sense.

However, in the standard Schwarzschild case, photons with impact parameter $\tilde{J} = 3\sqrt{3}a/2$ will have a minimal approach distance $r_0 \equiv \tilde{r} = 3a/2$, and for $r \leq \tilde{r}$, the photon will be trapped. For such values, the deflection angle goes to infinity. Note also that $\tilde{r} > a$, therefore the strong limit, technically corresponds to $r \sim \tilde{r}$ rather than $r \sim a$ [131, 132, 133].

In our case it is necessary to determine these critical values of J and r_0 , and then to calculate the deflection angle. In order to do that, it is convenient to rewrite

the equation(A.39) in terms of the variable $u = 1/r$, as follow

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{f(1/u)}{Jg(1/u)}\right)^2 - u^2 + a u^3, \quad (\text{A.48})$$

$$\equiv W(u). \quad (\text{A.49})$$

Then, the deflection angle goes to infinity for the values of (u, J) , solution of the following set of equations \tilde{J} solutions of

$$W(u) = 0, \quad W'(u) = 0, \quad (\text{A.50})$$

A direct calculation shows that the solution of the previous equations, up to first order in ϵ/E_{Pl} are

$$\tilde{r} = \frac{3a}{2} + \frac{a}{3}(\alpha - \beta)\rho \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}}, \quad (\text{A.51})$$

$$\tilde{J} = \frac{3\sqrt{3}a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2}(\alpha - \beta)(3 + 2\rho) \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}}, \quad (\text{A.52})$$

and the Schwarzschild limit is recovered for $\alpha = 0 = \beta$, as it is expected.

The strong limit in the rainbow gravity scenario corresponds to the minimal distance r_0 approaching to \tilde{r} when $J \rightarrow \tilde{J}$. For such case, the deflection angle $\Delta\phi \rightarrow \infty$. Before reaching these critical values, the deflection angle is still finite, but exceeds 2π ; this is interpreted as *turns* of the photon around the BH [132].

The deviation angle in the strong limit is calculated as follow: we fix $J = \tilde{J}$ and perform explicitly the integral in (A.48), from $u = 0$ (that is $r \rightarrow \infty$) up to some value u_0 . Then, we will expand our result for $u_0 \sim \tilde{u}$, which must contain a term that diverges for $u_0 = \tilde{u}$, plus regular terms.

To do that, it is convenient to define the new (dimensionless) variable $z = u/\tilde{u}$, so that the deviation angle turn out to be

$$\Delta\hat{\phi} = 2 \int_0^{z_0} \frac{\tilde{u}dz}{\sqrt{W(\tilde{u}z)}} - \pi. \quad (\text{A.53})$$

and the limit we are interested on corresponds to $z_0 \sim 1$.

Since we are in the regime $\epsilon/E_{\text{Pl}} \ll 1$, we can expand the integrand in the previous expression, obtaining

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\varphi} \approx & - \int_0^{z_0} \frac{2(9+18z)dz}{3\sqrt{3}(z-1)(2z+1)^{3/2}} - \\ & - \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \frac{4\rho(\alpha-\beta)}{3\sqrt{3}} \int_0^{z_0} \frac{(z+2)dz}{(z-1)(2z+1)^{3/2}} - \pi \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

and then, for the deviation angle we get

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\varphi} \approx & 4 \left[1 + \frac{2}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha-\beta) \right] \times \\ & \times \left[\text{ArcTanh} \left(\sqrt{\frac{2z_0+1}{3}} \right) - \text{ArcCoth}(\sqrt{3}) \right] \\ & + \frac{4}{3} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \frac{\rho(\alpha-\beta)}{\sqrt{6z_0+3}} \left[\sqrt{2z_0+1} - 1 \right] - \pi + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

The the strong limit is obtained when $r_0 \rightarrow \tilde{r}$, that is $1/z_0 \sim 1$ in (A.55). The final result of such expansion, in terms of r , turn out to be

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\varphi} = & -2 \left[1 + \frac{2}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha-\beta) \right] \ln \left(\frac{r_0}{\tilde{r}} - 1 \right) + \\ & + \frac{4}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} (\alpha-\beta) \rho \left[\sqrt{3} - 1 + \ln[6(2-\sqrt{3})] \right] + \\ & + 2 \ln[6(2-\sqrt{3})] - \pi + \mathcal{O}(r_0/\tilde{r} - 1), \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

$$\equiv A(\epsilon) \ln \left(\frac{r_0}{\tilde{r}} - 1 \right) + B(\epsilon) \quad (\text{A.57})$$

We observe that the functional dependence of the deviation angle on the parameter r_0/\tilde{r} is the same as in the standard Schwarzschild case [132, 133], namely $\ln(r_0/\tilde{r} - 1)$ and the effect of the energy dependence translate just in a correction of the numerical coefficients.

As it was argued in the papers previously cited, these numerical coefficients are those relevant for the image formation, and their values, if they are measured, might in principle distinguish among different alternatives to standard general relativity, as the one we are discussing here. We will return to this point in the last Section of the present paper.

A.2.3. Lens Equation in RG

Since the discovery of the first doubly imaged quasar in 1979 [134], the GL phenomenon has become a very important branch of astrophysics [135]. The path, the size and the cross section of a light bundle propagating through space-time are affected by all the matter between the light source and the observer.

In a lens diagram where a source, the lens and the observer are sketched, all the angular separations will be referred to the line joining the lens and the observer [136]. This line is called the optical axis and we shall use this denomination.

The lens equation, is a geometric relation between the angular separations of the source γ and the angular separation of image θ and. In order to obtain such equation, a further assumption must be done, namely, for point-like lenses the light ray trajectories in the flat and the curved space-time are almost identical, except near the lens, where the bending of each photon trajectory occurs at the minimal distance r_0 . Therefore the Euclidean geometry can be used.

This geometric relation read

$$\tan \theta = \tan \gamma + \frac{D_{ds}}{D_s} (\tan \theta + \tan(\Delta\varphi - \theta)) \quad (\text{A.58})$$

where D_{ds}, D_s are the lens-source and observer-source distances, respectively. Note that the corrections to the geometric functions as those described in the Appendix Section, are absent here because all quantities involved are distances

ratios. The only correction due to the energy of the photon will come from the deviation angle $\Delta\varphi$.

Expression (A.58) is an equation for θ , which is not trivial due to the dependence $\Delta\varphi(\theta)$. In the following subsections we will study this image position and amplification for the two limits previously discussed.

Weak limit case

In this limit, all angles involved in (A.58) are small, therefore the lens equation turns out to be

$$\theta = \gamma + \frac{D_{ds}}{D_s} \Delta\varphi, \quad (\text{A.59})$$

The dependence of $\Delta\varphi$ on θ occurs through r_0 . In fact, from our discussion concerning the impact parameter (contained also in the Appendix Section), we can see that under the geometrical assumptions described before, in the small angle approximation, the following relation holds $D_d \theta \approx J g_\infty / f_\infty$, where D_d is the observer-lens distance. However, in the weak limit approximation J and r_0 are related through (A.43) and therefore

$$r_0 \approx D_d \theta$$

Replacing in (A.59), the lens equation takes its final form in the weak limit

$$\theta^2(\epsilon) - \gamma\theta(\epsilon) - \xi(\epsilon)\theta_E^2 = 0, \quad (\text{A.60})$$

with

$$\theta_E^2 = \frac{2aD_{ds}}{D_s D_d}, \quad \xi(\epsilon) = 1 + \rho \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} (\beta - \alpha).$$

The energy dependence, then, have a chromatic effect in GL which appears as terms depending linearly on the photon energy. In this case the lens equations

(A.60) has two solutions given by

$$\theta_{\pm}(\epsilon) = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \xi(\epsilon)\theta_E^2}. \quad (\text{A.61})$$

We see that the θ_{\pm} angle, up to first order in ϵ/E_{pl} is

$$\begin{aligned} \theta_{\pm}(\epsilon) &= \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \theta_E^2} \pm \frac{\theta_E^2 \rho(\beta - \alpha)}{\sqrt{\gamma^2 + 4\theta_E^2}} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}}, \\ &\equiv \theta_{\pm}^{(0)} + \theta_{\pm}^{(1)} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}}, \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

with $\theta_{\pm}^{(0)}$, the standard result for the Schwarzschild metric and $\theta_{\pm}^{(1)}$, a numerical factor that depends on the details of the metric through the parameters α, β , and depends on $E(r)$ through the parameter ρ .

If the source is not aligned with the optical axis two non symmetric images appears, the angular separations between them is $\Delta\theta(\epsilon) = \theta_+ + |\theta_-|$. Up to first order in the photon energy, we have

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\epsilon) &= \sqrt{\gamma^2 + 4\theta_E^2} + 2 \frac{\theta_E^2 \rho(\beta - \alpha)}{\sqrt{\gamma^2 + 4\theta_E^2}} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}}, \\ &\equiv \Delta\theta^{(0)} + \Delta\theta^{(1)} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

For the case of the Einstein rings, that is $\gamma = 0$ we find

$$\Delta\theta_E(\epsilon) = 2\theta_E + \theta_E \rho(\beta - \alpha) \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} \quad (\text{A.64})$$

It is of interest also the amplification given by $\mathcal{A}_{\pm} = d\Omega_{\pm}/d\Omega_0$ with $d\Omega_0$ the observed solid angle in absence of lens and $d\Omega_{\pm}$ the observed solid angle of the images. In the present case we have

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\pm}(\epsilon) &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\gamma} \left(\sqrt{\gamma^2 + 4\theta_E^2} - \frac{2\theta_E^2}{\sqrt{\gamma^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{4\rho(\beta - \alpha)\theta_E^4}{(\gamma^2 + 4\theta_E^2)^{3/2}} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} \right) \right], \\ &\equiv \mathcal{A}_{\pm}^{(0)} + \mathcal{A}_{\pm}^{(1)} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

From previous results, we conclude that photons with different energies contribute to chromatic aberration of the image. However, this contribution is highly suppressed because of the dependence in ϵ/E_{pl} .

Strong Limit case

For the case of strong limit, we need to find the relation between $\Delta\hat{\varphi}$ and the angular separation θ . We will assume – as in the weak limit – that the process of deviation of light occurs in a region near the lens, so that it is possible to consider the spacetime flat in the zone $r \gg a$, where measurements are performed, and then the relation $D_d\theta \approx Jg_\infty/f_\infty$, holds in the small angle approximation.

The relation between r_0 and J is now different and can be found expanding J and r in (A.42) around their critical values. Namely

$$\begin{aligned} \frac{r}{\tilde{r}} - 1 &= \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{J}{\tilde{J}} - 1 \right)} + \\ &+ \frac{4}{27} \frac{\epsilon}{E_{\text{pl}}} \rho(\alpha - \beta) \sqrt{\frac{J}{\tilde{J}} - 1} \left(\sqrt{6} \frac{J}{\tilde{J}} - 3 \sqrt{\frac{J}{\tilde{J}} - 1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

where we have retained only first order terms in ϵ/E_{pl} .

A comment is in order here. The quantity $\Theta \equiv J/\tilde{J}$ is also energy-dependent, however the strong limit in the present rainbow scenario correspond to $\Theta \rightarrow 1$ and therefore no further expansions in energy need to be done. We can express now

this variable in terms of measurable quantities as follow

$$\begin{aligned}
\Theta = \frac{J}{\tilde{J}} &= \frac{Jg_\infty/f_\infty}{\tilde{J}g_\infty/f_\infty} \approx \frac{\theta D_d}{\tilde{J}g_\infty/f_\infty}, \\
&\approx \frac{2\theta D_d}{3\sqrt{3}a} \left(1 - \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \frac{2}{3}(\alpha - \beta)\rho\right), \\
&\equiv \Theta_{\text{GR}} \left(1 - \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \frac{2}{3}(\alpha - \beta)\rho\right). \tag{A.67}
\end{aligned}$$

Here, Θ_{GR} is the ratio J/\tilde{J} for the standard Schwarzschild case.

Since the strong limit corresponds to $\Theta \rightarrow 1$, we see that if $\alpha > \beta$, then $\Theta < \Theta_{\text{GR}}$, and therefore strong limit effects in a rainbow scenario are relevant before the standard Schwarzschild values are reached. By the same reasoning, for the case $\alpha < \beta$ (superluminal case), the strong limit effects will be relevant after reaching the limit of Schwarzschild case. Is also clear that the range in which it is possible to distinguish between those cases is a very small window, namely

$$|\Theta - \Theta_{\text{GR}}| \sim \frac{2\epsilon}{3E_{\text{Pl}}} \rho |\alpha - \beta|.$$

Finally, in order to calculate possible observable effects, we write the deviation angle (A.56) in terms of the angular deviation and the observer-lens distance, up to first order in ϵ/E_{Pl} as

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{\varphi} &= -\ln(\Theta - 1) \left(1 + \frac{2}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha - \beta)\right) + \\
&+ \frac{4}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha - \beta) \left[\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6}\sqrt{\Theta - 1} - 2\Theta\right] + \\
&+ 2\ln(3\sqrt{6}(2\sqrt{3} - 3)) \left[1 + \frac{2}{9} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha - \beta)\right]. \tag{A.68}
\end{aligned}$$

$$\equiv \tilde{A}(\epsilon) \ln(\Theta - 1) + \tilde{B}(\epsilon) + \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} F(\Theta). \tag{A.69}$$

Since the strong limit in the rainbow scenario is just $\Theta \rightarrow 1$, we can compare directly the behavior of the deviation angle with the standard case. And we observe

that there are two kinds of corrections. One is just a correction to the numerical coefficients, namely \tilde{A}, \tilde{B} , already present in the Schwarzschild case.

The second correction, $F(\Theta)$ is new. However it has not a divergent behavior in the strong limit. It is finite indeed and then, any correction coming from this term will be suppressed by the ϵ/E_{pi} factor.

The lens equation in the limit we are interested on has been derived in previous work [132]. Small angles assumption is still valid except for the deviation angle. Since this angle goes to values greater than 2π in the strong limit, the photon will be deviated $\Delta\hat{\varphi}_n$ after n turns around the BH. That is

$$\Delta\hat{\varphi} = 2\pi n + \Delta\hat{\varphi}_n \quad (\text{A.70})$$

with $\Delta\hat{\varphi}_n \ll 1$. The lens equation in the strong limit, then, reads

$$\theta_n = \gamma + \frac{D_{ds}}{D_s} \Delta\hat{\varphi}_n. \quad (\text{A.71})$$

where θ_n is the position of images produced by the photon after n -turns around the BH, and which is deflected with the offset angle $\Delta\hat{\varphi}_n \ll 1$. Due to (A.69), it corresponds to an angle $\theta_n = \bar{\theta}_n + \delta\theta_n$ with $\delta\theta_n \ll 1$, and

$$\Delta\hat{\varphi}(\bar{\theta}_n) = 2n\pi.$$

By doing so we have for the deflection angle

$$\Delta\hat{\varphi}(\theta_n) = 2n\pi + \Delta\hat{\varphi}'(\theta) \Big|_{\theta=\bar{\theta}_n} \delta\theta_n + \dots$$

where ' denotes derivatives respect to θ , and then the offset turns out to be

$$\Delta\hat{\varphi}_n = \Delta\hat{\varphi}'(\theta) \Big|_{\theta=\bar{\theta}_n} \delta\theta_n \equiv \Delta\hat{\varphi}'(\bar{\theta}_n) \delta\theta_n$$

Putting all this information together we obtain the final expression for $\delta\theta_n$

$$\delta\theta_n = \left(1 - \frac{D_{ds}}{D_s} \Delta\hat{\varphi}'(\bar{\theta}_n)\right)^{-1} (\gamma - \bar{\theta}_n) \quad (\text{A.72})$$

The angular position $\bar{\theta}_n$ is

$$\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n^{(0)} + \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \bar{\theta}_n^{(1)},$$

with

$$\bar{\theta}_n^{(0)} = \frac{3\sqrt{3}a}{2D_d} \left[1 + 54(7 - 4\sqrt{3})e^{-2n\pi} \right] \quad (\text{A.73})$$

$$\bar{\theta}_n^{(1)} = \frac{a\rho(\alpha - \beta)}{D_d} \left[\kappa_{-4}e^{-4n\pi} + \kappa_{-3}e^{-3n\pi} + \kappa_{-2}e^{-2n\pi} + \kappa_0 \right], \quad (\text{A.74})$$

The constants κ_i are numerical coefficients with the values $\kappa_0 = \sqrt{3}$, $\kappa_{-2} = 18(12 - 7\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3} - 2n\pi)$, $\kappa_{-3} = 648(26\sqrt{3} - 45)$, $\kappa_{-4} = 7 * 6^6(12 - 7\sqrt{3})$.

Note that the limit $n \rightarrow \infty$ implies $\Delta\hat{\varphi} \rightarrow \infty$ and, from (A.73), this means

$$\bar{\theta}_\infty D_d = \frac{3\sqrt{3}a}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \rho(\alpha - \beta) \right) = \frac{\bar{J}g_\infty}{f_\infty}$$

which is just the strong limit in the rainbow scenario, as we discussed before.

The derivative of the angular deviation, evaluated in the previous solution is

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\varphi}'(\bar{\theta}_n) &= -\frac{D_d}{a} \Delta^{(0)} e^{2n\pi} \\ &\quad - \rho(\alpha - \beta) \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \frac{D_d}{a} \left[\Delta_0^{(1)} - \Delta_1^{(1)} e^{n\pi} + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta_2^{(1)} - \Delta_2^{(2)} n\pi) e^{2n\pi} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

with the numerical coefficients

$$\begin{aligned} \Delta^{(0)} &\simeq 0,1 & \Delta_0^{(1)} &\simeq 400 & \Delta_1^{(1)} &\simeq 0,3 \\ \Delta_2^{(1)} &\simeq 0,01 & \Delta_2^{(2)} &\simeq 0,04 \end{aligned}$$

By the other hand, we can see in (A.72) that the denominator contains the term $D_{ds}D_d/(aD_s) \ll 1$ and then we can expand it to get

$$\delta\theta_n \approx \left(1 + \frac{D_{ds}}{D_s} \Delta\hat{\varphi}'(\bar{\theta}_n) \right) (\gamma - \bar{\theta}_n)$$

We can see that, for large n , there are terms proportional to ϵ/E_{PI} in (A.75) which can become important contributions. However, the terms with large n are difficult to observe even in the case of standard relativity. A rough estimation shows that, the correction due to the energy of the photon will be relevant when

$$n e^{2n\pi} \sim \frac{E_{\text{PI}}}{\epsilon}$$

which gives $n \sim 11$ for photons of 1 eV and $n \sim 6$ for Ultra High Energy Cosmic Rays of 10^{20} eV.

It is worth emphasizing here that, in contrast to the standard case, in the present case there is a very small correction to the images when the image position coincides with the source position $\gamma = \bar{\theta}_n^{(0)}$, namely

$$\theta_\infty - \bar{\theta}_\infty^{(0)} = \frac{a\sqrt{3}\rho(\alpha - \beta)}{D_d} \frac{\epsilon}{E_{\text{PI}}}$$

Finally, the magnification of the n^{th} image can be calculated as in the weak limit (weak or strong limit is not related with the calculation of the amplification) and we get

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \frac{D_s(\gamma D_s + e^{2n\pi} \Delta^{(0)} D_{ds} \bar{\theta}_n^{(0)})}{\gamma(D_s + \Delta^{(0)} D_{ds} e^{2n\pi})^2} \\ &+ \frac{D_{ds} D_s}{\gamma(D_s + \Delta^{(0)} D_{ds} e^{2n\pi})^3} \frac{\epsilon}{E_{\text{PI}}} \left[\right. \\ &\quad \rho(\alpha - \beta) \left(e^{n\pi} \Delta_1^{(1)} - e^{2n\pi} \Delta_2^{(1)} + n\pi \Delta_2^{(2)} - \Delta_0^{(1)} \right) \\ &\quad \left(D_s(2\gamma - \bar{\theta}_n^{(0)}) + e^{2n\pi} \Delta^{(0)} D_{ds} \bar{\theta}_n^{(0)} \right) \\ &\quad \left. + e^{2n\pi} \Delta^{(0)} \bar{\theta}_n^{(1)} (D_s + e^{2n\pi} \Delta^{(0)} D_{ds}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

this quantity decreasing when the number of loops increasing, hence the first image are predominant.

A.2.4. Discussion and Conclusion

In this paper we have studied the consequences of an energy dependent metric for photons paths, in the context of gravitational lensing. We have calculated the deflection angle of trajectories of photons passing by a massive object in the weak and the strong limits. We have shown that the geodesic path calculated through an action principle and through the Eikonal approach coincides in Rainbow Gravity.

In the weak limit, the deviation angle acquires tiny corrections – of the order of ϵ/E_{pi} – due to the energy dependence of the metric. But we also note that there could be a cancellation of this correction for the so called DSR2 model where $\alpha = \beta$, and independently for $\rho = 1$.

It is interesting to note also that this modification, even if is tiny, could increase or decrease the value of the standard deflection angle depending on the sign of $\beta - \alpha$. But also the light speed depends on this difference. In fact, for $\alpha > \beta$ we have a superluminal DSR, while the sub-luminal case happens for $\alpha < \beta$.

In consequence, the increasing or decreasing behavior of the deflection angle is linked with super or sub luminal behavior of the model and also with the dependence of the energy on the coordinate r , this last fact through the sign of $\rho - 1$ in(A.47).

In order to explore an observable consequence of the previous result we have discussed the gravitational lensing for this energy dependent metric. We see again that there must be a chromatic effect in image formation since corrections to the amplification and to the angular separation of the image are of the order of ϵ/E_{pi} . This means that for two photons with an energy difference $\Delta\epsilon$, those corrections will be of the order $\Delta\epsilon/E_{pi}$.

However, previous statement is based in two assumptions, one is the weak

lensing approximation, that is, all distances involved in the calculation are much greater than the Schwarzschild radius and second, there are not cosmological distances involved.

The first assumption is responsible, in the present approach that the gravitational interaction will not change dramatically the deflection angle. This situation could change if, for instance, the photon passes near a black hole horizon. The second assumption, instead, is the responsible of further corrections due to the long travel of the photon, and therefore its energy is not so different from ϵ . Considering cosmological distances, new corrections must be added as the ones reported in [138].

In order to determine the robustness of the first assumption we have also calculated the consequences of this energy dependent metric for the case of strong approximation. Here, as the photon approaches to the photon sphere, the deflection angle increases and becomes larger than 2π . This fact is understood as follows: the deviation angle can be always written as $2n\pi + \Delta\hat{\varphi}_n$, for some n , and the angular excess $\Delta\hat{\varphi}_n$ is the angular deviation relevant for the lens equation and then, for the image formation. Note that the angular excess can not be zero, otherwise there will be no deviation, which is inconsistent with the photon geodesic.

By doing that, we have shown that even in the strong limit, only tiny effects are present due to the energy dependence for small values of n . However, for large n , there is an augmented effect. A rough estimation from visible photons until ultra high energy ray energy range shows that this effect is relevant for $n \sim 6 - 11$, but this kind of images (higher order relativistic images) are very hard to detect even in the usual relativistic case.

For the amplification, however, such effect is not present. The increasing effect due to $e^{2n\pi}$ terms is cancelled out by the factor $e^{6n\pi}$ in the denominator in (A.76).

Appendix A. Eikonal Approach

A different and independent method to calculate the light path in this curved spacetime, is the geometrical optic approximation of the Maxwell equations in a curved background. In this approach – known also as Eikonal approach – one considers the propagation of light in curved spacetime in classical geometrical optics regime, that is when the wavelength λ of photon is much smaller than typical scales of the problem (for example, the curvature of space). Formally this is accomplished by requiring that solutions of equations of motion have an expansion in series of λ^n and, at the end, taking $\lambda \rightarrow 0$.

In our case λ_∞ , the wavelength of the photon in the rainbow-flat region, is the appropriate scale to expand the equation of motion. Therefore the optical geometric limit will be achieved if all length scales are much larger than the wave length of the photon at infinity, where we can neglect any gravitational influence.

Let us start our discussion with the Maxwell action for the vector field A_μ in a fixed, curved and torsion free background

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} F^2, \quad (\text{A.77})$$

where $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. The equations of motion from this action are

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu \nabla^\mu A_\mu - R^\mu{}_\nu A_\mu = 0, \quad (\text{A.78})$$

and, by imposing the gauge condition $\nabla^\mu A_\mu = 0$, they turn out to be

$$\nabla^2 A_\nu - R^\mu{}_\nu A_\mu = 0. \quad (\text{A.79})$$

Consider now solutions of (A.79) with the shape

$$A_\mu(x) = a_\mu(x) e^{i \frac{S(x)}{\lambda_\infty}}, \quad (\text{A.80})$$

A direct calculation shows that the first non vanishing term in a $\lambda_\infty \rightarrow 0$ expansion is

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (\text{A.81})$$

where $k_\mu = \partial S / \partial x^\mu$, showing that k_μ is a null vector and that, up to lowest order, we can neglect the coupling with the curvature. To next order, equations of motion show the fact that the polarization vector is locally flat parallel- propagated along the ray [130].

Consider then the Eikonal equation (A.81) for the curved metric (A.35). We look now a solution of the equation of motion with the shape

$$S(x) = \mathcal{E}t - \mathcal{J}\phi - \psi(r), \quad (\text{A.82})$$

with \mathcal{E} and \mathcal{J} integration constants. The Eikonal equation is now the differential equation determining $\psi(r)$

$$\frac{f^2}{1-a/r} \mathcal{E}^2 - g^2(1-a/r)\psi'^2 - \frac{g^2}{r^2} \mathcal{J}^2 = 0, \quad (\text{A.83})$$

and therefore

$$\psi(r) = \int \sqrt{\frac{f^2 \mathcal{E}^2}{g^2(1-a/r)^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{r^2(1-a/r)}} dr. \quad (\text{A.84})$$

The propagation of a light ray between two space regions of constant phase, apart a time interval Δt and by an spatial interval $\Delta \vec{r}$, must happen in a trajectory where the Eikonal is stationary under variations of the parameters \mathcal{E} and \mathcal{J} . This implies the following set of equations

$$\delta \Delta S = \delta \mathcal{E} \left(\Delta t - \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{E}} \right) - \delta \mathcal{J} \left(\Delta \phi + \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{J}} \right) - \delta \Delta \psi \quad (\text{A.85})$$

and then, a light ray must satisfy

$$\Delta\psi = 0, \quad (\text{A.86})$$

$$\Delta t = \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{E}}, \quad (\text{A.87})$$

$$\Delta\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{J}}. \quad (\text{A.88})$$

The last equation gives the trajectory

$$\Delta\phi = \int \frac{1}{r\sqrt{1-a/r}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r^2}{1-a/r} \frac{f^2}{g^2} \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{J}^2} - 1}}, \quad (\text{A.89})$$

while (A.87) gives Δt in terms of a integral of r .

Previous integral is just the same as the integral appearing in the geodesic approach (namely the integral of (A.39)), except for the appearance of the constant \mathcal{E} . However we can now look for the minimal distance approach to the gravitational source and express the angle deflection in terms of this physical quantity.

The minimal approach distance r_0 in the present approach is the minimal of the Eikonal S as function of r , thus from (A.86)) at first order in Δr , we obtain

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\psi}{\partial r} \right|_{r=r_0} &= \frac{f^2(r_0)\mathcal{E}^2}{g^2(r_0)(1-a/r_0)^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{r^2(1-a/r_0)}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

That is, r_0 is the solution of

$$\frac{r_0^2}{1-a/r_0} = \frac{\mathcal{J}^2 g^2(r_0)}{\mathcal{E}^2 f^2(r_0)}. \quad (\text{A.91})$$

By using this we finally find for the deflection angle

$$\Delta\phi = \int \frac{dr}{r\sqrt{1-a/r} \sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{f^2(r)g^2(r_0)}{f^2(r_0)g^2(r)} \frac{1-a/r_0}{1-a/r} - 1}} \quad (\text{A.92})$$

which is just the result (A.44) previously found by using the geodesic approach.

Appendix B. Considerations on geometry

In this brief appendix we will discuss how Euclidean geometry is modified in the case of a rainbow flat spacetime. Our starting hypothesis is that geometrical results are statements about distances, which turn out to be measurable quantities through experiments with photons.

Consider then the case of flat rainbow spacetime where every point there is labeled by a set of four coordinates x^μ with $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, which are energy independent quantities. The distance between two points in this space, is however energy dependent.

In order to prove this, consider two points – in the 1+1 dimensional case – x_1 and x_2 . A photon is emitted in the point labeled $t_1 = 0, x_1 = 0$. It reaches a mirror in t_2, x_2 and then returns to x_1 . If the whole process takes T seconds for the observer at x_1 , then the distance between the two points can be defined as

$$\Delta x = \frac{g(\epsilon)}{f(\epsilon)} \frac{T}{2}.$$

Then, even if coordinates just label points in the manifold and do not have any information about the energy of the photons, the measurable distances in the spacetime – which correspond to differences of these coordinates – have an energy dependence through the metric.

Consider now a photon path in the metric (A.35), for the case $a = 0$. The integration of radial equation of motion is just

$$\arcsin\left(\frac{Jg}{fr_2}\right) - \arcsin\left(\frac{Jg}{fr_1}\right) = \phi_2 - \phi_1,$$

with J an integration constant.

Let us fix as reference the geodesic of photons coming from infinity, that is $r_1 \rightarrow \infty$ for $\phi_1 = 0$. Respect to this, we find the definition of $\sin \phi$ for measurements

with photons of energy ϵ as

$$r \sin \phi = J \left(1 + (\beta - \alpha) \frac{\epsilon}{E_{\text{Pl}}} \right)$$

What this relation shows is that the usual trigonometric relations are modified in rainbow spaces. These expressions relates measurable quantities (differences of coordinates rather than coordinates only) which depends on the photon energy used to measure them.

Apéndice B

Potencial de contacto atractivo doble delta

Consideremos un sistema de dos partículas interactuantes por medio del un potencial doble delta atractivo en tres dimensiones, de la forma

$$V(\mathbf{r}) = -(2\pi)^3 V_0 \frac{1}{2} (\delta^{(3)}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a})),$$

donde \mathbf{a} es un vector constante cuyo módulo es mucho menor que la distancia interatómica. En el sistema de masa reducida la ecuación de Schrödinger de este sistema se escribe como

$$(-\nabla^2 + V(\mathbf{r}))\Psi(\mathbf{r}) = \epsilon\Psi(\mathbf{r}). \tag{B.1}$$

En el espacio de momentos con $\Psi(\mathbf{r}) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Phi(\mathbf{k})$, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{k}) &= \frac{V_0}{2(\mathbf{k}^2 - \epsilon)} \int d^3k' \int d^3r e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} (\delta^{(3)}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{a}))\Phi(\mathbf{k}'), \\ &= \frac{V_0}{2(\mathbf{k}^2 - \epsilon)} \left(\int d^3k' e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{k}') + \int d^3k' e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{k}') \right), \\ &= \frac{V_0}{2(\mathbf{k}^2 - \epsilon)} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\Psi(-\mathbf{a}) + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\Psi(\mathbf{a}) \right),\end{aligned}\tag{B.2}$$

descomponiendo la ecuación anterior en sus partes par $\Psi_0(-\mathbf{a}) = \Psi_0(\mathbf{a})$ e impar $\Psi_1(-\mathbf{a}) = -\Psi_1(\mathbf{a})$, las que corresponden al estado singlete y triplete respectivamente, obtenemos que la parte par satisface

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = \frac{V_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_0)} \Psi_0(\mathbf{a}),\tag{B.3}$$

y la parte impar satisface

$$\Phi_1(\mathbf{k}) = -\frac{V_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_1)} \Psi_1(\mathbf{a}).\tag{B.4}$$

De (B.3) y (B.4), es directo notar que en el límite $\mathbf{a} \rightarrow 0$ la ecuación la parte par se reduce a

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = \frac{V_0}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_0)} \Psi_0(0),$$

lo que corresponde al caso standard, mientras que la ecuación para la parte impar se reduce a $\Phi_1(\mathbf{k}) = 0$. Integrando las ecuaciones (B.3) y (B.4), obtenemos para la parte par

$$\begin{aligned}\Psi_0(\mathbf{a}) &= \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \frac{V_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_0)} \Psi_0(\mathbf{a}), \\ 1 &= V_0 \int d^3k \frac{\cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_0)}, \\ 1 &= V_0 \int d^3k \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \epsilon_0} (1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})^2 + \dots)\end{aligned}\tag{B.5}$$

y para la parte impar

$$\begin{aligned}
\Psi_1(\mathbf{a}) &= - \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}} \frac{V_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_1)} \Psi_1(\mathbf{a}), \\
1 &= -V_0 \int d^3k \frac{\sin^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})}{(\mathbf{k}^2 - \epsilon_1)} \\
1 &= -V_0 \int d^3k \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \epsilon_1} ((\mathbf{k}\cdot\mathbf{a})^2 + \dots) \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Es claro que integrales anteriores son divergentes cuando $k \rightarrow \infty$, no obstante en el caso de los pares de Cooper, los momentos de los electrones están acotados por $k_F < k < k_F + k_c$. En este caso se introduce la densidad de estados por intervalo de energía, que sobre un cascarón concentrico a la esfera de Fermi, resulta ser constante, esto es

$$\int d^3k \rightarrow N(0) \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} d\epsilon \frac{1}{4\pi} \int d\Omega,$$

donde $\epsilon = \mathbf{k}^2/2$ la energía de cada electrón libre.

Por otra parte, puesto que el vector \mathbf{a} es un vector arbitrario podemos fijar su dirección a lo largo de la dirección de k_z , de forma que la integración en las ecuaciones (B.5) y (B.6), a orden a^2 , conduce a

$$\begin{aligned}
1 &= V_0 \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} d\epsilon \frac{1}{2\epsilon - \epsilon_0} - \frac{V_0 a^2}{3} \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} d\epsilon \frac{2\epsilon}{2\epsilon - \epsilon_0} \\
1 &= F_0(\epsilon_0) := \frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{a^2 \epsilon_0}{3}\right) \ln \left(1 + \frac{2\epsilon_c}{2\epsilon_F - \epsilon_0}\right) - \frac{V_0 a^2 \epsilon_c}{3}, \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{V_0 a^2}{3} \int_{\epsilon_F}^{\epsilon_F + \epsilon_c} d\epsilon \frac{2\epsilon}{2\epsilon - \epsilon_1}, \\
1 &= F_1(\epsilon_1) := -\frac{V_0 a^2}{3} \left(\epsilon_c + \frac{\epsilon_1}{2} \ln \left(1 + \frac{2\epsilon_c}{2\epsilon_F - \epsilon_1}\right) \right) \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse gráficamente, en el caso de una interacción débil con $V_0 = 0,1$ y con $a = 0,1$, podemos fijar $\epsilon_F = 1/2$ y el corte $\epsilon_c = 0,001$, de

esta forma las soluciones de la parte par se obtienen al graficar simultáneamente

$$y = 1, \quad y = F_0(\epsilon_0)$$

y las soluciones de la parte impar graficar simultáneamente

$$y = 1, \quad y = F_1(\epsilon_0),$$

De la Fig.(B.1), la solución para la parte par indica que $\epsilon_0 < 2\epsilon_F$, lo que indica

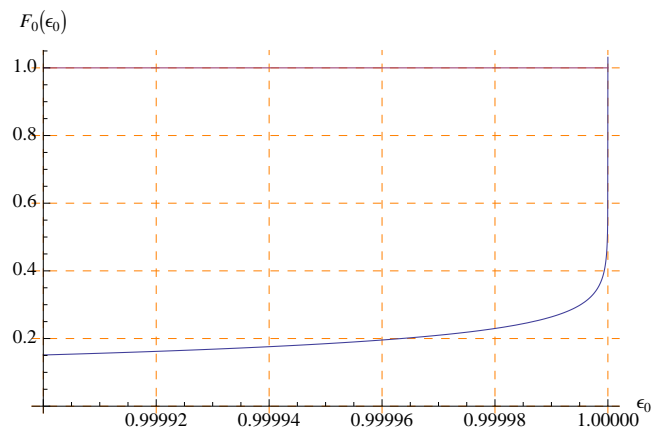


Figura B.1: Soluciones simultáneas parte par.

la existencia de un estado ligado, notar que en este caso, el término proporcional a $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})^2$ no se anula para la parte par como ocurre en el caso no conmutativo donde $\mathbf{a} \rightarrow i\theta\mathbf{S}$.

Por otra parte, de la Fig.(B.2) la solución para la parte impar indica que $\epsilon_1 > 2\epsilon_F$, en este caso no existe la formación de un estado ligado.

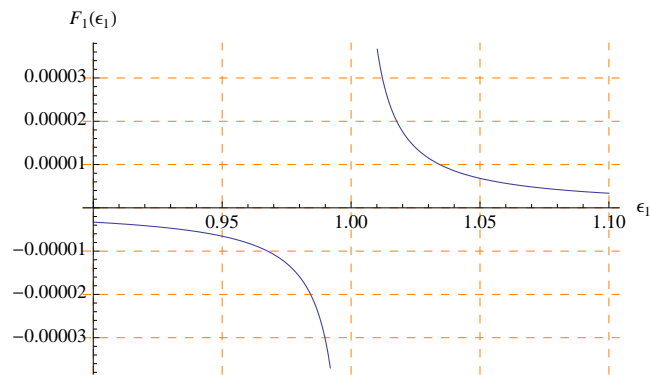


Figura B.2: Soluciones simultáneas parte impar.

Apéndice C

Interacción de spin

Consideremos el operador $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})/|\mathbf{k}|$, con $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ un vector unitario tridimensional parametrizado en término de las coordenadas $\{0 < \alpha < \pi; 0 < \beta < 2\pi; 0 < k = |\mathbf{k}| < \infty\}$. Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha e^{-i\beta} \\ \sin \alpha e^{i\beta} & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

de esta forma,

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{k} |\lambda_{\pm}\rangle = \pm |\lambda_{\pm}\rangle$$

donde los auto-estados $|\lambda_{\pm}\rangle$, que están dados por

$$|\lambda_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{-i\beta/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{i\beta/2} \end{pmatrix}, \quad |\lambda_{-}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha/2)e^{-i\beta/2} \\ \cos(\alpha/2)e^{i\beta/2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

forman una base ortonormal completa. Por otra parte, en esta base los autoestados de σ_3 pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} |+\rangle &= e^{i\beta/2}(\cos(\alpha/2) |\lambda_{+}\rangle - \sin(\alpha/2) |\lambda_{-}\rangle), \\ |-\rangle &= e^{-i\beta/2}(\sin(\alpha/2) |\lambda_{+}\rangle + \cos(\alpha/2) |\lambda_{-}\rangle). \end{aligned}$$

Por lo tanto, en esta base el estado singlete puede ser escrito como

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda_+ \lambda_- \rangle - |\lambda_- \lambda_+ \rangle),$$

y el estado triplete como

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= e^{i\beta} \left(\cos^2 \alpha/2 |\lambda_+ \lambda_+ \rangle + \sin^2 \alpha/2 |\lambda_- \lambda_- \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right), \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \alpha (|\lambda_+ \lambda_+ \rangle - |\lambda_- \lambda_- \rangle) + \cos \alpha (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right), \\ |1, -1\rangle &= e^{-i\beta} \left(\sin^2 \alpha/2 |\lambda_+ \lambda_+ \rangle + \cos^2 \alpha/2 |\lambda_- \lambda_- \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right). \end{aligned}$$

Ahora consideremos el operador $U_{12} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)/|\mathbf{k}|^2$, un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} U_{12} |0, 0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda_+ \lambda_- \rangle - |\lambda_- \lambda_+ \rangle), \\ U_{12} |1, 1\rangle &= e^{i\beta} \left(\cos^2 \alpha/2 |\lambda_+ \lambda_+ \rangle + \sin^2 \alpha/2 |\lambda_- \lambda_- \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right), \\ U_{12} |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \alpha (|\lambda_+ \lambda_+ \rangle - |\lambda_- \lambda_- \rangle) - \cos \alpha (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right), \\ U_{12} |1, -1\rangle &= e^{-i\beta} \left(\sin^2 \alpha/2 |\lambda_+ \lambda_+ \rangle + \cos^2 \alpha/2 |\lambda_- \lambda_- \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 (|\lambda_+ \lambda_- \rangle + |\lambda_- \lambda_+ \rangle) \right). \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores obtenemos que para el estado singlete $\langle U_{12} \rangle = -1$,
y para el triplete

$$\langle U_{12} \rangle = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sqrt{2}e^{-i\beta} \sin \alpha \cos \alpha & e^{-2i\beta} \sin^2 \alpha \\ \sqrt{2}e^{i\beta} \sin \alpha \cos \alpha & -\cos 2\alpha & -\sqrt{2}e^{-i\beta} \sin \alpha \cos \alpha \\ e^{2i\beta} \sin^2 \alpha & -\sqrt{2}e^{i\beta} \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Puesto que la variable angular $0 < \beta < 2\pi$, entonces

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \langle U_{12} \rangle = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

donde $d\Omega = d(\cos \alpha)d\beta$. Finalmente

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \langle S_{12} \rangle^{(0,0)} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \frac{1}{2} (1 + \langle U_{12} \rangle^{(0,0)}) = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \langle S_{12} \rangle^{(1,m)} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \frac{1}{2} (1 + \langle U_{12} \rangle^{(1,m)}) = \frac{2}{3}, \quad (\text{C.4})$$

Apéndice D

Interacción electrón-fonón

Consideremos un conjunto de electrones y fonones interactuantes. En segunda cuantización la parte libre del Hamiltoniano, lee como

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \xi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} + \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{q}},$$

donde $a_{\mathbf{k}\alpha}$, $a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ son operadores fermiónicos y $c_{\mathbf{q}}$, $c_{\mathbf{q}}^\dagger$ operadores bosónicos. A $T = 0$ el estado base del sistema sin interacción, es decir, un conjunto de electrones libres y un conjunto de bosones libres, está constituido por un mar de Fermi y un condensado de Bosones como sistemas independientes. Puesto que una interacción entre electrones, debido a procesos de emisión y absorción de un fonón, perturba el estado fundamental del condensado, es de esperar que dicha interacción resulte ser muy débil, de manera que puede ser considerada como una perturbación.

En término de los operadores de creación y aniquilación el Hamiltoniano de interacción se escribe como

$$H' = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} (c_{\mathbf{q}} + c_{-\mathbf{q}}^\dagger) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha}.$$

Nótese que este término de interacción no conmuta con el operador de número de los fonones, pero si conmuta con el operador de número de los electrones. En efecto, de

$$[N_f, c_{\mathbf{q}}] = \sum_{\mathbf{q}'} [c_{\mathbf{q}'}^\dagger, c_{\mathbf{q}}] c_{\mathbf{q}'} = - \sum_{\mathbf{q}'} c_{\mathbf{q}'} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = -c_{\mathbf{q}}, \quad (\text{D.1})$$

donde $N_f = \sum_{\mathbf{q}'} c_{\mathbf{q}'}^\dagger c_{\mathbf{q}'}$ el operador de número de los fonones, se obtiene que $[N_f, c_{\mathbf{q}}^\dagger] = c_{\mathbf{q}}^\dagger$. Es claro que de esto se deduce que $[H', N_f] \neq 0$.

Por otra parte, con $N_e = \sum_{\mathbf{k}\alpha} a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha}$ el operador de número de los electrones, la relación de conmutación

$$\begin{aligned} [N_e, a_{\mathbf{k}\alpha}] &= \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} [a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger a_{\mathbf{k}'\alpha'}, a_{\mathbf{k}\alpha}] = \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} \left(a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger \{a_{\mathbf{k}'\alpha'}, a_{\mathbf{k}\alpha}\} + \{a_{\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger, a_{\mathbf{k}\alpha}\} a_{\mathbf{k}'\alpha'} \right), \\ &= \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{\alpha'\alpha} a_{\mathbf{k}'\alpha'} = a_{\mathbf{k}\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

y de esta forma $[N_e, a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger] = -a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$. Luego

$$\begin{aligned} [N_e, a_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha}] &= [N_e, a_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger] a_{\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger [N_e, a_{\mathbf{k}\alpha}], \\ &= -a_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} + a_{\mathbf{k}'\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k}\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Por lo tanto, un estado con un número constante de fonones no puede ser un autoestado de H' . Con el propósito de analizar como esta débil interacción modifica la energía de los electrones utilizaremos teoría de perturbación.

Si denotamos por $|n_e; n_f\rangle$ el estado con n_e electrones y con n_f fonones, entonces el estado de un electrón con momentum \mathbf{k} y proyección de spin α será denotado por

$$|1_{\mathbf{k}\alpha}; 0\rangle = a_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger |0; 0\rangle.$$

Puesto que $\langle 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 | H' | 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle = 0$, entonces las correcciones a primer orden se anulan, mientras que a segundo orden obtenemos

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} = \sum_{n_e; n_f} \left(\frac{\langle 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 | H' | n_e; n_f \rangle \langle n_e; n_f | H' | 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle}{\langle 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 | H_0 | 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle - \langle n_e; n_f | H_0 | n_e; n_f \rangle} \right), \quad (\text{D.4})$$

Utilizando que

$$\begin{aligned}
H'|1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle &= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\alpha'}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\alpha'} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}'\alpha'} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\alpha'}^{\dagger} (\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \delta_{\alpha'\alpha} - a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\alpha'}) |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}^{\dagger} |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} |1_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}; 1_{-\mathbf{q}} \rangle, \tag{D.5}
\end{aligned}$$

la corrección a segundo orden se escribe ahora como

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} &= \sum_{\mathbf{q}'} \left(\frac{|\langle 1_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'\alpha}; 1_{-\mathbf{q}'} | H' | 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle|^2}{\xi_{\mathbf{k}} - (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}})} \right), \\
&= \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{|V_{\mathbf{q}}|^2}{\xi_{\mathbf{k}} - (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}})} \right) \tag{D.6}
\end{aligned}$$

como resultado se obtiene la renormalización del potencial.

De esta forma, siguiendo el mismo procedimiento es posible calcular las correcciones sobre el estado de dos electrones interactuantes que intercambian un fonón, en este caso el estado de los dos electrones uno con momentum \mathbf{k} y proyección de spin α y el otro con momentum \mathbf{k}' y spin α' , está dado por

$$|1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle = a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger} |0, 0 \rangle,$$

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}
H'|1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle &= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{l\beta} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{l+\mathbf{q}\beta}^{\dagger} a_{l\beta} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger} |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{l\beta} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{l+\mathbf{q}\beta}^{\dagger} (\delta_{l\mathbf{k}} \delta_{\beta\alpha} - a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} a_{l\beta}) a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger} |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger} |0; 0 \rangle \\
&\quad - \sum_{\mathbf{q}} \sum_{l\beta} V_{\mathbf{q}} c_{-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{l+\mathbf{q}\beta}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} (\delta_{l\mathbf{k}'} \delta_{\beta\alpha'} - a_{\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger} a_{l\beta}) |0; 0 \rangle, \\
&= \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} |1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\alpha}; 1_{-\mathbf{q}} \rangle + \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} |1_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 1_{-\mathbf{q}} \rangle,
\end{aligned}$$

nótese que en este caso las correcciones a primer orden

$$\langle 1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 | H' | 1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle = 0.$$

A segundo orden con $V_{-\mathbf{q}} = V_{\mathbf{q}}$ y $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{-\mathbf{q}}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)} &= \sum_{\mathbf{q}'} \left(\frac{|\langle 1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'\alpha}; 1_{-\mathbf{q}'} | H' | 1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle|^2}{(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'} - (\xi_{\mathbf{k}'} + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'} + \omega_{-\mathbf{q}'}))} \right) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{q}'} \left(\frac{|\langle 1_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 1_{-\mathbf{q}'} | H' | 1_{\mathbf{k}'\alpha'}, 1_{\mathbf{k}\alpha}; 0 \rangle|^2}{(\xi_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}'} - (\xi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}'} + \xi_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{q}'}))} \right), \\
&= \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 \left(\frac{1}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}'} - \xi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \right), \tag{D.7}
\end{aligned}$$

Si consideramos pares de electrones con $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, i.e. pares de Cooper, en este caso se obtiene que

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)} &= \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 \left(\frac{1}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} + \frac{1}{\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}} \right), \\
&= \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 \left(\frac{(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) - (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) - 2\omega_{\mathbf{q}}}{(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})} \right), \tag{D.8}
\end{aligned}$$

en vista de que $\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}} \simeq \xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, se sigue que

$$\Delta E_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)} = \sum_{\mathbf{q}} |V_{\mathbf{q}}|^2 \left(\frac{2\omega_{\mathbf{q}}}{(\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \right), \tag{D.9}$$

como resultado esta interacción será atractiva para $\omega_q^2 > (\xi_k - \xi_{k-q})^2$, es decir para electrones sobre un cascarón esférico concéntrico a la esfera de Fermi.

Apéndice E

Pares de Electrones

En sistema compuesto por un gran número de fermiones, no es posible que más de dos partículas ocupen el mismo estado, y por tanto, en el caso de una gas ideal el sistema forma un mar de Fermi, donde todos los estados de energía están ocupados hasta la energía de Fermi.

Sin embargo, es posible que bajo una interacción atractiva, dos fermiones formen un estado de menor energía que el caso de los dos fermiones libres. Si estos estados se comportan como un bosón, a $T = 0$ el estado base del sistema estará ocupado por un número macroscópico de partículas.

Es importante destacar que la formación de los pares de Cooper coexiste simultáneamente con la condensación de estos, de manera que el estado normal de ese sistema resulta ser un gas ideal de fermiones a temperatura finita.

Con la propósito de estudiar los efectos de la no conmutatividad sobre este sistema, comencemos definiendo un conjunto de operados de creación y aniqui-

lación que satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

donde $a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ ($a_{F;\mathbf{k}\alpha}$) es el operador de creación (aniquilación) de un electrón con momentum \mathbf{k} y proyección de spin α . En términos del número de ocupación $n_{F;\mathbf{k}\alpha} = a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha}$, obtenemos que $n_{F;\mathbf{k}\alpha}^2 = n_{F;\mathbf{k}\alpha}$, lo que indica que los autovalores de $n_{F;\mathbf{k}\alpha}$ sólo pueden ser 0, 1, y por tanto no es posible que ningún estado de momentum \mathbf{k} sea ocupado por más dos electrones con diferente spin.

No obstante, como ha sido mencionado, una interacción atractiva puede producir estados de pares de electrones que pueden condensar. En esta dirección, resulta ser interesante estudiar el álgebra de los operadores de pares de fermiones. De esta forma definamos el operador de aniquilación y creación de un par de fermiones por

$$c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}\beta\alpha} = a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta} a_{F;\mathbf{k}\alpha}, \quad \text{y} \quad c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}\beta\alpha}^\dagger = a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}^\dagger. \quad (\text{E.2})$$

utilizando la identidad $[AB, CD] = A\{C, B\}D + \{C, A\}DB - AC\{D, B\} - C\{D, A\}B$, puede verse que las relaciones de conmutación de estos operadores están dadas por

$$\begin{aligned} [c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}\beta\alpha}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'\beta'\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha}\delta_{\alpha'\beta}\delta_{\mathbf{k}'\bar{\mathbf{k}}} \\ &\quad - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}\delta_{\alpha\beta'}\delta_{\mathbf{k}\bar{\mathbf{k}}'} - a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} [c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}\beta\alpha}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'\beta'\alpha'}] &= a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}\{a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}, a_{F;\mathbf{k}\alpha}\}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'} + \{a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}, a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}\}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}a_{F;\mathbf{k}\alpha} \\ &\quad - a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\{a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}, a_{F;\mathbf{k}\alpha}\} - a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\{a_{F;\bar{\mathbf{k}}'\beta'}, a_{F;\bar{\mathbf{k}}\beta}\}a_{F;\mathbf{k}\alpha} \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$(\text{E.4})$$

es claro que estas relaciones de conmutación no corresponde a las relaciones de conmutación de bosones.

Sin embargo, si consideramos los estados de spin total entonces estas relaciones se simplifican considerablemente. Por simplicidad consideremos un sistema compuesto por electrones, en este caso los estados de spin triplete ($S = 1, m = 0$) y de spin singlete ($S = 0, m = 0$), se forman como combinaciones simétricas y antisimétricas de los operadores

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}(c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}-+}^\dagger \pm c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}+-}^\dagger)|vac\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{F;\mathbf{k}+}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}-}^\dagger \pm a_{F;\mathbf{k}-}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}+}^\dagger)|vac\rangle, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{k}+; \bar{\mathbf{k}}-\rangle \pm |\mathbf{k}-; \bar{\mathbf{k}}+\rangle), \\
&= |\mathbf{k}; \bar{\mathbf{k}}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+; -\rangle \pm |-; +\rangle). \quad (\text{E.5})
\end{aligned}$$

donde $|vac\rangle$ es el vacío donde no hay partículas. Un cálculo directo muestra que las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación de estos estados, satisfacen las relaciones de conmutación

$$[c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}+-}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'+-}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'} - (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'+}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}+} + \delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}a_{F;\mathbf{k}'-}^\dagger a_{F;\mathbf{k}-}), \quad (\text{E.6})$$

$$[c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}-+}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'-+}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'} - (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'-}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}-} + \delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}a_{F;\mathbf{k}'+}^\dagger a_{F;\mathbf{k}+}), \quad (\text{E.7})$$

$$[c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}-+}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'+-}^\dagger] = -\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + (\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'+}^\dagger a_{F;\mathbf{k}+} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}a_{F;\mathbf{k}'-}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}-}), \quad (\text{E.8})$$

$$[c_{F;\bar{\mathbf{k}}\mathbf{k}+-}, c_{F;\bar{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'-+}^\dagger] = -\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + (\delta_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}'}a_{F;\bar{\mathbf{k}}'-}^\dagger a_{F;\mathbf{k}-} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}a_{F;\mathbf{k}'+}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}+}), \quad (\text{E.9})$$

como resultado, en este caso, tampoco es evidente que los operadores de pares de electrones satisfagan la estadística de Bose-Einstein.

No obstante, en el mecanismo de apareamiento de Cooper los electrones susceptibles de formar pares tienen momentos sobre la superficie de Fermi anti-paralelos, i.e. con $\bar{\mathbf{k}} = -\mathbf{k}$ y $\bar{\mathbf{k}}' = -\mathbf{k}'$. De esta forma, denotando el operador de creación de un par de electrones por $c_{F;\mathbf{k}\alpha\beta}^\dagger = a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{F;-\mathbf{k}\beta}^\dagger$ las relaciones de

conmutación (E.6, E.7, E.8 y E.9) se escriben como

$$[c_{F;\mathbf{k}+-}, c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger] = (1 - n_{F;-\mathbf{k}+} - n_{F;\mathbf{k}-})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.10})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}-+}, c_{F;\mathbf{k}'-+}^\dagger] = (1 - n_{F;-\mathbf{k}-} - n_{F;\mathbf{k}+})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.11})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}-+}, c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger] = (-1 + n_{F;\mathbf{k}+} + n_{F;-\mathbf{k}-})\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.12})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}+-}, c_{F;\mathbf{k}'-+}^\dagger] = (-1 + n_{F;\mathbf{k}-} + n_{F;-\mathbf{k}+})\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.13})$$

con $n_{F;\mathbf{k}\alpha} = a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha}$ el operador de número de los electrones en el estado con momentum \mathbf{k} y spin α .

De las ecuaciones (E.12) y (E.13), se observa que los pares con distinto spin serán dos bases independientes siempre que $\mathbf{k} \neq -\mathbf{k}'$. En este caso el álgebra toma la forma

$$[c_{F;\mathbf{k}+-}, c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger] = (1 - n_{F;-\mathbf{k}+} - n_{F;\mathbf{k}-})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.14})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}-+}, c_{F;\mathbf{k}'-+}^\dagger] = (1 - n_{F;-\mathbf{k}-} - n_{F;\mathbf{k}+})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{E.15})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}-+}, c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger] = 0, \quad (\text{E.16})$$

$$[c_{F;\mathbf{k}+-}, c_{F;\mathbf{k}'-+}^\dagger] = 0. \quad (\text{E.17})$$

Sin embargo, en esta álgebra los operadores de pares tampoco satisfacen una álgebra de Bose-Einstein.

Consideremos ahora el caso de los estados de spin triplete ($S = 1, m = \pm 1$), donde los estados se construyen con los operadores ¹

$$\begin{aligned} c_{F;\bar{\mathbf{k}}\alpha}^\dagger |vac\rangle &= a_{F;\mathbf{k}\alpha}^\dagger a_{F;\bar{\mathbf{k}}\alpha}^\dagger |vac\rangle, \\ &= |\mathbf{k}\alpha; \bar{\mathbf{k}}\alpha\rangle = |\mathbf{k}; \bar{\mathbf{k}}\rangle \otimes |\alpha\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

¹Utilizamos la notación de escribir índices repetidos sólo una vez, de forma que $c_{F;\bar{\mathbf{k}}\alpha}^\dagger = c_{F;\bar{\mathbf{k}}\alpha\alpha}^\dagger$

En este caso las relaciones de conmutación se escriben como

$$\begin{aligned}
[c_{F;\bar{k}\alpha}, c_{F;\bar{k}'\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{k}\bar{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - a_{F;\bar{k}'\alpha'}^\dagger a_{F;\bar{k}\alpha} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a_{F;\bar{k}'\alpha'}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha} \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\mathbf{k}'\bar{k}} \\
&\quad - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\bar{k}'} + a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger a_{F;\bar{k}\alpha} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\bar{k}'} - a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger a_{F;\mathbf{k}\alpha} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{k}\bar{k}'}.
\end{aligned}
\tag{E.19}$$

Como en el caso anterior, este conmutador tampoco corresponde al conmutador de operadores bosónicos. Sin embargo, como en el caso anterior, consideremos la forma de esta relación de conmutación en el caso de los pares de Cooper. Esto es con $\bar{k} = -\mathbf{k}$ y $\bar{k}' = -\mathbf{k}'$, se sigue que

$$\begin{aligned}
[c_{F;\mathbf{k}\alpha}, c_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger] &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (n_{F;-\mathbf{k}\alpha} - n_{F;\mathbf{k}\alpha}) \\
&\quad - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (n_{F;-\mathbf{k}\alpha} - n_{F;\mathbf{k}\alpha}), \\
&= \delta_{\alpha\alpha'} (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}),
\end{aligned}
\tag{E.20}$$

A diferencia de lo que sucedía para los estados de spin triplete $m = 0$ y para el singlete, la exclusión del caso con $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$, indica que los operadores satisfacen explícitamente un álgebra de Bose-Einstein.

Este análisis muestra que los operadores de pares de electrones resultan ser operadores bosónicos en dos casos del triplete, a saber con $m = \pm 1$, mientras que en el otro caso del triplete con $m = 0$ y el singlete las relaciones de conmutación de los operadores (E.10) y (E.11), difieren de las relaciones de conmutación de los operadores bosónicos por términos proporcionales a los números de ocupación una partícula.

Sin embargo, con la combinación lineal de los operadores de pares de elec-

trones se tiene

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\mathbf{k}} c_{F;\mathbf{k}+-}, \sum_{\mathbf{k}'} c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger \right] &= \sum_{\mathbf{k}} (1 - n_{F;-\mathbf{k}+} - n_{F;\mathbf{k}-}), \\ &= N - \sum_{\mathbf{k}} n_{F;-\mathbf{k}+} - \sum_{\mathbf{k}} n_{F;\mathbf{k}-}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Asumiendo que a $T = 0$ la gran mayoría de los electrones han formado pares de Cooper, de manera que $\sum_{\mathbf{k}} n_{F;-\mathbf{k}+} = N/2 = \sum_{\mathbf{k}} n_{F;\mathbf{k}-}$, en este límite, la ecuación (E.21) se puede escribir como

$$\left[\sum_{\mathbf{k}} c_{F;\mathbf{k}+-}, \sum_{\mathbf{k}'} c_{F;\mathbf{k}'+-}^\dagger \right] = 0, \quad (\text{E.22})$$

esto indica que a $T = 0$, las combinaciones lineales de pares de electrones pueden ser tratados simplemente como c-números, similar a lo que ocurre con los operadores bosónicos cuando el sistema condensa.

Adicionalmente, como en el caso de los bosones, donde resultaba interesante estudiar los estados excitados a partir del estado base condensado, en este caso resulta ser interesante estudiar los estados excitados a partir de un estado fundamental compuesto por un conjunto de pares de Cooper, la resolución de este problema permite dilucidar cual es mecanismo que provoca la superconductividad en un material, ver [64].

Apéndice F

Transformación de Bogoliubov

Consideremos la transformación de Bogoliubov

$$a_{\mathbf{k}\alpha} = \sum_{\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} b_{\mathbf{k}\beta} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} b_{-\mathbf{k}\beta}^{\dagger}). \quad (\text{F.1})$$

la forma de las funciones $u_{\mathbf{k};\alpha\beta}$ y $v_{\mathbf{k};\alpha\beta}$ se obtiene demandando el requerimiento de que el álgebra los operadores b y b^{\dagger} tenga la misma naturaleza que el álgebra de los operadores a y a^{\dagger} . Consideremos por separado el caso de Bosones y Fermiones.

F.1. Operadores Bosónicos

Si tanto los operadores $a_{B;\mathbf{k}\alpha}$ como los $b_{B;\mathbf{k}\alpha}$ son operadores Bosónicos, esto es, si satisfacen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [a_{B;\mathbf{k}\alpha}, a_{B;\mathbf{k}'\alpha'}] &= 0, & [a_{B;\mathbf{k}\alpha}, a_{B;\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger}] &= \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \\ [b_{B;\mathbf{k}\alpha}, b_{B;\mathbf{k}'\alpha'}] &= 0, & [b_{B;\mathbf{k}\alpha}, b_{B;\mathbf{k}'\alpha'}^{\dagger}] &= \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

entonces,

$$\begin{aligned}
[a_{B;\mathbf{k}\alpha}, a_{B;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger] &= \sum_{\beta\beta'} \left(u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* [b_{B;\mathbf{k}\beta}, b_{B;\mathbf{k}'\beta'}^\dagger] + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* [b_{B;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{B;-\mathbf{k}'\beta'}] \right. \\
&\quad \left. + u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* [b_{B;\mathbf{k}\beta}, b_{B;-\mathbf{k}'\beta'}] + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* [b_{B;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{B;\mathbf{k}'\beta'}^\dagger] \right), \\
&= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\beta\beta'} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* - v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^*) \delta_{\beta\beta'}, \\
&= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k};\alpha'\beta}^* - v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k};\alpha'\beta}^*) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\alpha'}, \tag{F.3}
\end{aligned}$$

y adicionalmente

$$\begin{aligned}
[a_{B;\mathbf{k}\alpha}, a_{B;\mathbf{k}'\alpha'}] &= \sum_{\beta\beta'} \left(u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} [b_{B;\mathbf{k}\beta}, b_{B;\mathbf{k}'\beta'}] + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} [b_{B;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{B;-\mathbf{k}'\beta'}^\dagger] \right. \\
&\quad \left. + u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} [b_{B;\mathbf{k}\beta}, b_{B;-\mathbf{k}'\beta'}^\dagger] + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} [b_{B;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{B;\mathbf{k}'\beta'}] \right), \\
&= \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \sum_{\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{-\mathbf{k};\alpha'\beta} - v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{-\mathbf{k};\alpha'\beta}) = 0. \tag{F.4}
\end{aligned}$$

En términos de las matrices

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k};s s} & u_{\mathbf{k};s s-1} & \cdots \\ u_{\mathbf{k};s-1 s} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & u_{\mathbf{k};-s -s} \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k};s s} & v_{\mathbf{k};s s-1} & \cdots \\ v_{\mathbf{k};s-1 s} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & v_{\mathbf{k};-s -s} \end{pmatrix},$$

las ecuaciones (F.3) y (F.4) indican que

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger - \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}}^\dagger = \hat{I}, \tag{F.5}$$

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{-\mathbf{k}}^T - \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{-\mathbf{k}}^T = \hat{0} \tag{F.6}$$

donde \hat{I} es la matriz identidad y $\hat{0}$ una matriz nula, las dos matrices cuadradas de dimensión $2s + 1$.

F.2. Operadores Fermiónicos

Si por el contrario, si tanto los operadores $a_{\mathbf{k}\alpha}$ como los $b_{\mathbf{k}\alpha}$ son operadores fermionicos, esto es, si satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\} &= 0, & \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger\} &= \delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \\ \{b_{F;\mathbf{k}\alpha}, b_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\} &= 0, & \{b_{F;\mathbf{k}\alpha}, b_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger\} &= \delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

se sigue entonces que utilizando las transformaciones de Bogoliubov obtenemos

$$\begin{aligned} \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}^\dagger\} &= \sum_{\beta\beta'} \left(u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* \{b_{F;\mathbf{k}\beta}, b_{F;\mathbf{k}'\beta'}^\dagger\} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* \{b_{F;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{F;-\mathbf{k}'\beta'}\} \right. \\ &\quad \left. + u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* \{b_{F;\mathbf{k}\beta}, b_{F;-\mathbf{k}'\beta'}\} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* \{b_{F;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{F;\mathbf{k}'\beta'}^\dagger\} \right), \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\beta\beta'} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^* + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'}^*) \delta_{\beta\beta'}, \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k};\alpha'\beta}^* + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k};\alpha'\beta}^*) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

y adicionalmente

$$\begin{aligned} \{a_{F;\mathbf{k}\alpha}, a_{F;\mathbf{k}'\alpha'}\} &= \sum_{\beta\beta'} \left(u_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} \{b_{F;\mathbf{k}\beta}, b_{F;\mathbf{k}'\beta'}\} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} \{b_{F;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{F;-\mathbf{k}'\beta'}^\dagger\} \right. \\ &\quad \left. + u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} \{b_{F;\mathbf{k}\beta}, b_{F;-\mathbf{k}'\beta'}^\dagger\} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{\mathbf{k}';\alpha'\beta'} \{b_{F;-\mathbf{k}\beta}^\dagger, b_{F;\mathbf{k}'\beta'}\} \right), \\ &= \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \sum_{\beta} (u_{\mathbf{k};\alpha\beta} v_{-\mathbf{k};\alpha'\beta} + v_{\mathbf{k};\alpha\beta} u_{-\mathbf{k};\alpha'\beta}) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

En términos de las matrices de 2×2

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k};++} & u_{\mathbf{k};+-} \\ u_{\mathbf{k};-+} & u_{\mathbf{k};--} \end{pmatrix} \quad \hat{v}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k};++} & v_{\mathbf{k};+-} \\ v_{\mathbf{k};-+} & v_{\mathbf{k};--} \end{pmatrix}$$

las ecuaciones (F.8) y (F.9) se escriben como

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}}^\dagger = \hat{\sigma}_0, \quad (\text{F.10})$$

$$\hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{-\mathbf{k}}^T + \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{-\mathbf{k}}^T = \hat{\mathbf{0}} \quad (\text{F.11})$$

donde $\hat{\sigma}$ es una matriz identidad de 2×2 y $\hat{\mathbf{0}}$ una matriz nula de 2×2

Bibliografía

- [1] R. Jackiw, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108**, 30-36 (2002). [hep-th/0110057].
- [2] H.S. Snyder, Phys. Rev. 71 (1947) 38; H.S. Snyder, Phys. Rev. 72 (1947) 68.
- [3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999) [hep-th/9908142].
- [4] E. Witten, Nucl. Phys. **B268**, 253 (1986).
- [5] A. Connes, M. R. Douglas and A. S. Schwarz, JHEP **9802**, 003 (1998) [hep-th/9711162].
- [6] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari, JHEP **9902** (1999) 016 [hep-th/9810072].
- [7] M. R. Douglas and C. M. Hull, JHEP **9802**, 008 (1998) [hep-th/9711165].
- [8] C.-S. Chu and P.-M. Ho, Nucl. Phys. B **550**, 151 (1999) [hep-th/9812219].
- [9] J. W. Moffat, Phys. Lett. B **491**, 345 (2000) [hep-th/0007181].
- [10] A. Connes, Commun. Math. Phys. **182** (1996) 155 [hep-th/9603053].
- [11] P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijevic, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess, Class. Quant. Grav. **22**, 3511 (2005) [hep-th/0504183].

- [12] A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Frohlich, *Commun. Math. Phys.* **155**, 205 (1993) [hep-th/9209044].
- [13] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 977 [hep-th/0106048].
- [14] R. J. Szabo, *Phys. Rept.* **378** (2003) 207 [hep-th/0109162].
- [15] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, *Phys. Lett. B* **604** (2004) 98 [hep-th/0408069].
- [16] J. Gomis and T. Mehen, *Nucl. Phys. B* **591**, 265 (2000) [hep-th/0005129].
- [17] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, *JHEP* **0303** (2003) 058 [hep-th/0301248].
- [18] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess and M. Wohlgenannt, *Eur. Phys. J. C* **23**, 363 (2002) [hep-ph/0111115].
- [19] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, *Eur. Phys. J. C* **29**, 413 (2003) [hep-th/0107055].
- [20] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 141601 [hep-th/0105082].
- [21] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, *Phys. Lett. B* **565** (2003) 222 [hep-th/0207158].
- [22] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [23] KTeV Collaboration, H. Nguyen, in V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry II* (World Scientific, Singapore, 2002); OPAL Collaboration, R.

- Ackerstaff et al., *Z. Phys. C* **76**, 401 (1997); DELPHI Collaboration, M. Feindt et al., preprint DELPHI 97-98 CONF 80 (1997); BELLE Collaboration, K. Abe et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3228 (2001); FOCUS Collaboration, J.M. Link et al., *Phys. Lett. B* **556**, 7 (2003).
- [24] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *Phys. Lett. B* **344**, 259 (1995); *Phys. Rev. D* **52**, 6224 (1995); *Phys. Lett. B* **511**, 209 (2001); V.A. Kostelecky and R. Van Kooten, *Phys. Rev. D* **54**, 5585 (1996); V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1818 (1998); *Phys. Rev. D* **61**, 016002 (2000); N. Isgur et al., *Phys. Lett. B* **515**, 333 (2001).
- [25] O. Bertolami, D. Colladay, V.A. Kostelecky, and R. Potting, *Phys. Lett. B* **395**, 178 (1997).
- [26] L.R. Hunter et al., in V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry* (World Scientific, Singapore, 1999); D. Bear et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000); M.A. Humphrey et al., *Phys. Rev. A* **62**, 063405 (2000); V.A. Kostelecky and C.D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999); D. Sudarsky, L. Urrutia, H. Vucetich, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231301 (2002).
- [27] R. Bluhm et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999).
- [28] B. Heckel, in V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry II* (World Scientific, Singapore, 2002).
- [29] S. Carroll, G. Field, and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [30] J.A. Lipa et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060403 (2003).
- [31] V.W. Hughes et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 111804 (2001); R. Bluhm et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000).

- [32] S. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [33] V. Barger, S. Pakvasa, T. Weiler, and K. Whisnant, Phys. Rev. Lett. **85**, 5055 (2000).
- [34] V. P. Nair, A. P. Polychronakos, Phys. Lett. **B505**, 267-274 (2001). [arXiv:hep-th/0011172 [hep-th]].
- [35] J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas, Phys. Rev. **D64**, 067901 (2001). [hep-th/0010220].
- [36] G. V. Dunne, R. Jackiw, C. A. Trugenberger, Phys. Rev. **D41**, 661 (1990).
- [37] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Mod. Phys. Lett. **A16**, 2075-2078 (2001). [hep-th/0104224].
- [38] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 2555-2566 (2002). [hep-th/0106125].
- [39] Girvin, S., A. H. MacDonald, and P. M. Platzman, 1985, Phys. Rev. Lett. **54**, 581.
- [40] Bellissard, J., A. van Elst, and H. Schulz-Baldes, 1993, The non-commutative geometry of the quantum hall effect, eprint cond-mat/9301005.
- [41] L. Susskind, hep-th/0101029.
- [42] K. Hasebe, Phys. Rev. D **72** (2005) 105017 [hep-th/0503162].
- [43] B. Basu and S. Ghosh, Phys. Lett. A **346** (2005) 133 [cond-mat/0503266].
- [44] B. Harms and O. Micu, J. Phys. A **A 40**, 10337 (2007) [hep-th/0610081].

- [45] S. Dulat and K. Li, *Eur. Phys. J. C* **60**, 163 (2009).
- [46] A. Jellal and R. Houca, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **6**, 343 (2009) [hep-th/0611301].
- [47] O. F. Dayi and B. Yapiskan, *Phys. Lett. A* **374**, 3810 (2010) [arXiv:1003.5529 [math-ph]].
- [48] K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, "Superconductivity; conventional and unconventional superconductors", Springer 2008, Vol. I. Edited by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson.
- [49] D. Mankse, "Theory of Unconventional Superconductors", Springer 2004, N.Y.
- [50] M. Sigrist and K. Ueda, *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 239.
- [51] R. Movshovich, M. Jaime, J. D. Thompson, C. Petrovic, Z. Fisk, P. G. Pagliuso, and J. L. Sarrao *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5152 (2001).
- [52] I. I. Mazin, D. J. Singh, M. D. Johannes, and M. H. Du *Phys. Rev. Lett.* **101**, 057003 (2008).
- [53] Kazuhiko Kuroki, Seiichiro Onari, Ryotaro Arita, Hidetomo Usui, Yukio Tanaka, Hiroshi Kontani, and Hideo Aoki *Phys. Rev. Lett.* **101**, 087004 (2008).
- [54] D. A. Brawner and H. R. Ott *Phys. Rev. B* **50**, 6530 (1994).
- [55] A. P. Mackenzie and Y. Maeno, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 657.
- [56] F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1321 (2005).

- [57] R. Balian and N. R. Werthamer Phys. Rev. **131**, 1553 (1963).
- [58] P. A. Frigeri, D. F. Agterberg, A. Koga, and M. Sigrist Phys. Rev. Lett. **92**, 097001 (2004).
- [59] I. I. Mazin and David J. Singh Phys. Rev. Lett. **79**, 733 (1997); I. I. Mazin and D. J. Singh Phys. Rev. Lett. **82**, 4324 (1999)
- [60] P. W. Anderson Phys. Rev. B **30**, 1549 (1984); P. W. Anderson Phys. Rev. B **30**, 4000 (1984).
- [61] D. J. Bishop, C. M. Varma, B. Batlogg, E. Bucher, Z. Fisk, and J. L. Smith Phys. Rev. Lett. **53**, 1009 (1984).
- [62] Andrew Huxley, Ilya Sheikin, Eric Ressouche, Nolwenn Kernavanois, Daniel Braithwaite, Roberto Calemczuk, and Jacques Flouquet Phys. Rev. B **63**, 144519 (2001).
- [63] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189-1190 (1956).
- [64] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175-1204 (1957).
- [65] H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Mendez and P. A. G. Pisani, Phys. Lett. B **680** (2009) 384 [arXiv:0905.0157 [hep-th]].
- [66] B. Morariu and A. P. Polychronakos, Nucl. Phys. B **610**, 531 (2001) [hep-th/0102157].
- [67] S. Bellucci and A. Nersessian, Phys. Lett. B **542**, 295 (2002) [hep-th/0205024].

- [68] K. Li and S. Dulat, Eur. Phys. J. C **46**, 825 (2006) [hep-th/0508193].
- [69] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, [arXiv:1111.0511 [hep-th]].
- [70] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, M. Nieto, [arXiv:1109.6666 [math-ph]].
- [71] M. R. Douglas, H. Liu, G. W. Moore and B. Zwiebach, JHEP **0204** (2002) 022 [hep-th/0202087].
- [72] L. Mezincescu, hep-th/0007046.
- [73] D. Bigatti and L. Susskind, Phys. Rev. D **62**, 066004 (2000) [hep-th/9908056].
- [74] R. H. Landau, New York, USA: Wiley (1990) 483 p.
- [75] N. Zettili, New York, USA: Wiley (2001).
- [76] C. M. Bender, S. Boettcher, P. Meisinger, J. Math. Phys. **40**, 2201-2229 (1999). [quant-ph/9809072].
- [77] D. Bazeia, A. Das, L. Greenwood, L. Losano, Phys. Lett. **B673**, 283-287 (2009). [arXiv:0811.0923 [hep-th]].
- [78] A. Das, J. Gamboa, F. Méndez and F. Torres, Phys. Lett. A **375**, 1756-1759 (2011).
- [79] A. N. Pronin and L. V. Prokhorov, Vestn. St. Peterburg. Univ. (Ser. 4 Fiz. Khim.) **2000N2**, 99 (2000) [Vestn. St. Peterburg. Univ. **2000N12**, 99 (2000)].
- [80] M. Tinkham, "Introduction to superconductivity", 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1996)

- [81] P. G. De Gennes, "Superconductivity of Metals and Alloys", Benjamin, New York (1966) (reprinted, Perseus Books, Reading, MA (1999)).
- [82] V.P.Mineev and K.V. Samokhin. "Introduction to Unconventional Superconductivity", Gordon and Breach Science Publishers, 1999.
- [83] A. J. Leggett, "Quantum Liquids", Oxford University Press, 2006.
- [84] W. Meissner, R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* 21, 787 (1933)
- [85] E. Maxwell, *Phys. Rev.* **78**, 477 (1950); C. A. Reynolds, B. Serin, W. H. Wright and L. B. Nesbitt, *Phys. Rev.* **78**, 487 (1950).
- [86] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950)
- [87] T. Tsuneto, "Superconductivity and Superfluidity", Cambridge University Press, 1998.
- [88] C.J.Pethick and H.Smith, "Bose Einstein Condensation in Dilute Gases", Cambridge University Press, 2002.
- [89] A. Messiah, *De Gruyter/berlin* 1979, 585p.
- [90] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mecanique Quantique*, Editions Mir (1966).
- [91] D. Vollhardt and P. Wolfle. "The Superfluid Phases of Helium 3", Taylor and Francis, 2002.
- [92] P.W. Anderson, "Basic notions of condensed matter physics "
- [93] C. Kittel, "Quantum theory of Solids";
- [94] E. K. U. Gross, E. Runge and O. Heinonen, "Many-Particle Theory" Adam Hilger, Bristol, 1991.

- [95] A. Griffin, D.W. Snoke and S. Stringari, "Bose-Einstein Condensation", Cambridge, 1995.
- [96] L. Pitaevski and S. Stringari, "Bose Einstein Condensation", Oxford, 2003.
- [97] P. G. De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, New York (1966) (reprinted, Perseus Books, Reading, MA (1999)).
- [98] M. W. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1996).
- [99] D. J. Bishop, C. M. Varma, B. Batlogg, E. Bucher, Z. Fisk, and J. L. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1009 (1984)
- [100] H. Tou, Y. Kitaoka, K. Asayama, N. Kimura, Y. Onuki, E. Yamamoto and K. Maezawa, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1374-1377 (1996)
- [101] T. M. Rice and M. Sigrist, *J. Phys. Condens. Matter* **7**, L643 (1995).
- [102] I. Mazin and D. J. Singh, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 733 (1997)
- [103] K. Ishida, et al, *Nature* **396**, 658 (1998).
- [104] A. B. Shick and W. E. Pickett, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 300 (2001).
- [105] See e.g. L. Pitaevskii in *Superconductivity; conventional and unconventional superconductors*, pag. 27, Springer 2008, Vol. I. Edited by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson.
- [106] J. Linder and A. Sudbø, *Phys. Rev.* **B76**, 054511 (2007).
- [107] M. Alidoust and J. Linder, *Phys. Rev.* **B82**, 224504 (2010).

- [108] A. H. Nevidomsky, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 09703 (2005).
- [109] The earliest theoretical works attempting to reconcile the seemingly incompatible FM and SC order include, A. A. Abrikosov and L. P. Gorkov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **39**, 1781 (1960); A. M. Clogston, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 266 (1962); B. S. Chandrasekhar, *Appl. Phys. Lett.* **9**, 266 (1962).
- [110] S. S. Saxena et al, *Nature* **406**, 587 (2000); D. Aoki et al., *Nature* **412**, 58 (2001).
- [111] R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz and S. Tabor, *Phys. Rev B* **37**, 9410 (1988).
- [112] A. P. Mackenzie and Y. Maeno, *Rev. of Mod. Phys.* **75**, 657 (2003).
- [113] V. P. Mineev, *J. Low Temp. Phys.* **158**, 615 (2010); V. P. Mineev and T. Champel, *Phys. Rev. B* **69**, 144521 (2004).
- [114] H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Mendez and P. A. G. Pisani, *Phys. Lett. B* **680**, 384 (2009) [arXiv:0905.0157 [hep-th]].
- [115] C. M. Bender, S. Boettcher and P. Meisinger, *J. Math. Phys.* **40**, 2201 (1999) [arXiv:quant-ph/9809072].
- [116] D. Bazeia, A. Das, L. Greenwood and L. Losano, *Phys. Lett. B* **673**, 283 (2009).
- [117] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett. B* **293**, 37 (1992) [arXiv:hep-th/9207103] ; R. Gambini and J. Pullin, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999) [arXiv:gr-qc/9809038] ; J. R. Ellis, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, *Phys. Rev. D* **61**, 027503 (2000) [arXiv:gr-qc/9906029] ;

- C. P. Burgess, J. M. Cline, E. Filotas, J. Matias and G. D. Moore, JHEP **0203** (2002) 043 [arXiv:hep-ph/0201082] ; S. Sarkar, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1025 (2002) [arXiv:gr-qc/0204092] ; G. Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 35 (2002) [arXiv:gr-qc/0012051] ; J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. D **67**, 044017 (2003) [arXiv:gr-qc/0207085] ; R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003) [arXiv:hep-ph/0301124].
- [118] G. Amelino-Camelia and T. Piran, Phys. Rev. D **64**, 036005 (2001) [arXiv:astro-ph/0008107] ; S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001) [arXiv:hep-th/0105082] ; V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004) [arXiv:hep-th/0312310] ; V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002) [arXiv:hep-ph/0205211] ; V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001) [arXiv:hep-ph/0111026].
- [119] For a recent discussion on the subject see for example G. Amelino-Camelia, Nature **418**, 34 (2002) [arXiv:gr-qc/0207049] ; J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, kappa- Poincare Phys. Lett. B **539**, 126 (2002) [arXiv:hep-th/0203040] , and references therein.
- [120] J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **88**, 190403 (2002) [arXiv:hep-th/0112090] ; J. Magueijo and L. Smolin, scale," Phys. Rev. D **67**, 044017 (2003) [arXiv:gr-qc/0207085] ; A. A. Deriglazov, Phys. Lett. B **603**, 124 (2004) [arXiv:hep-th/0409232] ; S. Hossenfelder, Phys. Lett. B **649**, 310 (2007) [arXiv:gr-qc/0612167] ; S. Mignemi, Int. J. Mod. Phys. D **15**, 925 (2006) [arXiv:gr-qc/0403038] ; D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros, Phys. Rev. D **70**, 084007 (2004) [arXiv:gr-qc/0303067] ; R. Aloisio, A. Ga-

- lante, A. F. Grillo, E. Luzio and F. Mendez, Phys. Lett. B **610**, 101 (2005) [arXiv:gr-qc/0501079].
- [121] J. Magueijo and L. Smolin, Class. Quant. Grav. **21**, 1725 (2004) [arXiv:gr-qc/0305055].
- [122] I. T. Drummond and S. J. Hathrell, Phys. Rev. D **22**, 343 (1980).
- [123] R. Lafrance and R. C. Myers, Phys. Rev. D **51**, 2584 (1995) [arXiv:hep-th/9411018].
- [124] A. Accioly and H. Blas, Phys. Rev. D **64**, 067701 (2001) [arXiv:gr-qc/0107003].
- [125] J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos and G. Volkov, Gen. Rel. Grav. **32**, 1777 (2000) [arXiv:gr-qc/9911055].
- [126] C. Barcelo, M. Visser and S. Liberati, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 799 (2001) [arXiv:gr-qc/0106002]. ;
C. Barcelo, S. Liberati and M. Visser, Living Rev. Rel. **8**, 12 (2005) [arXiv:gr-qc/0505065].
- [127] B. Chen and R. Kantowski, Phys. Rev. D **78**, 044040 (2008).
- [128] A. Bonanno, M. Reuter, Phys. Rev. D **60**, 084011 (1999). [gr-qc/9811026].
- [129] C. Leiva, J. Saavedra and J. Villanueva, Mod. Phys. Lett. A **24**, 1443 (2009) [arXiv:0808.2601 [gr-qc]].
- [130] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, SPIRES entry *San Francisco 1973, 1279p*

-
- [131] K. S. Virbhadra and F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000).
- [132] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane and S. Scarpetta, *Gen. Rel and Grav.* **33**, 1435 (2001).
- [133] V. Bozza, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002) [arXiv:gr-qc/0208075].
- [134] D. Walsh, R. F. Carswell and R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979).
- [135] J. Wambsganss, *Living Rev. Rel.* **1**, 12 (1998) [arXiv:astro-ph/9812021].
- [136] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* **62**, 084003 (2000) [arXiv:astro-ph/9904193].
- [137] S. Mollerach and E. Roulet. *2002*
- [138] A. F. Grillo, E. Luzio and F. Mendez. *Phys. Rev. D* **77**, 104033 (2008).