

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Física



Modelos de Energía Oscura Phantom

Esteban Andrés González Banda

Profesor Guía:
Norman Cruz Marín

Tesis para optar al grado de Doctor en
Ciencia con Mención en Física

Santiago - Chile
2019

Modelos de Energía Oscura Phantom

Esteban Andrés González Banda

Este trabajo de graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Norman Cruz Marín, profesor titular del Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile, y ha sido aprobado por la siguiente comisión calificadora.

Dra. Paola Arias Reyes _____

Dr. Miguel Pino Rozas _____

Dr. Norman Cruz Marín _____

Dr. Felipe Herrera Urbina _____

Dr. Samuel Lepe Santa Cruz _____

Dr. Roberto Bernal Valenzuela
Director del Departamento de Física

Dr. Guillermo Romero Huenchuñir
Director del programa de Postgrado

Resumen

Hoy en día es aceptado que el Universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, la cual es muy bien ajustada por el Modelo Estándar de la Cosmología. En este modelo, la expansión del Universo es producto de la Energía Oscura, representada matemáticamente por la constante cosmológica Λ , y puede ser interpretada como un fluido barotrópico de la forma $p = \omega\rho$, con índice barotrópico $\omega = -1$. Lamentablemente, este modelo no está exento de problemas, como el conocido “problema de la constante cosmológica” a nivel fundamental, y las recientes observaciones astronómicas que dan cuenta una muy probable Ecuación de Estado Phantom para la Energía Oscura, es decir, $\omega < -1$. Estos fluidos Phantom presentan varios problemas desde el punto de vista físico, como violar las Condiciones de energía Nula y Fuerte, así como dar origen a soluciones que presentan singularidades a un tiempo futuro finito.

El objetivo de este trabajo de tesis es abordar los problemas asociados a considerar una componente de la Energía Oscura con un comportamiento Phantom, en el marco de tres líneas de investigación distintas: 1) ¿Es posible evitar la singularidad futura en un universo dominado por Energía Oscura Phantom?, 2) ¿Es posible evitar los problemas asociados a un fluido Phantom? y 3) ¿Es posible obtener un universo en expansión acelerada sin la inclusión de Λ ?

La primera línea de investigación será abordada desde el punto de vista de las Ecuaciones de Estado Generalizadas, mientras que la segunda y tercera línea de investigación desde el punto de vista de la cosmología con fluidos disipativos,

tanto en la teoría no causal de Eckart como en la teoría causal de Israel-Stewart.

En general, es perfectamente posible describir tanto la evolución futura como la evolución pasada del universo sin singularidades, con una Ecuación de Estado para la Energía Oscura con un índice barotrópico Phantom, pero variable en el tiempo. Evitando así tanto las singularidades del tipo Big Bang, como las singularidades tipo Big Rip. Además, en la teoría de Eckart (y también en la de Israel-Stewart) es posible establecer una Ecuación de Estado Phantom efectiva para la Energía Oscura, gracias a la disipación de bulto que experimenta la Materia Oscura, evitando así todos los problemas relacionados con los fluidos Phantom. Más aún, un universo dominado sólo por materia puede expandirse de manera acelerada gracias a la contribución de la presión disipativa, asociada a la viscosidad de bulto, que suple la carencia de una Energía Oscura en la teoría de Israel-Stewart.

Palabras Claves: Energía Oscura, Materia Oscura, Energía Oscura Phantom, Ecuaciones de Estado Generalizadas, Teoría de Eckart, Teoría de Israel-Stewart.

Abstract

Nowadays it is well accepted that the Universe is going through a late time acceleration phase, which is well fitted by the Standard Model of Cosmology. In this model, the expansion of the Universe is due to the Dark Energy, represented mathematically by the cosmological constant Λ , which can be interpreted as a barotropic fluid of the form $p = \omega\rho$, with barotropic index $\omega = -1$. Regrettably, this model is not exempt of problems, like the well known “cosmological constant problem” at fundamental level, and the latest astronomical observations that leads to a very probable Phantom Equation of State for the Dark Energy, i. e., $\omega < -1$. These Phantom fluids present serious problems from a physical point of view, like the violation of Null and Strong Energy Conditions, as well as give arise to cosmological solutions that present singularities at a finite future time.

The goal of this thesis work is to study the problems associated with the assumption of a Phantom behavior for the Dark Energy, from the framework of three different line of investigation: 1) Is it possible to avoid the future singularities present in the universes dominated by a Phantom Dark Energy?, 2) Is it possible to avoid the problems associated with these Phantom fluids?, and 3) Is it possible to obtain an accelerating expanding universe without the inclusion of Λ ?

The first line of investigation will be studied from a point of view of the Generalized Equations of State, while the second and third line of investigation will be studied from a point of view of the dissipative cosmology, both in the non causal theory of Eckart and the full causal one of Israel-Stewart.

In general, it is perfectly possible to describe both the future and the past evolution of the universe without singularities, with a Phantom Equation of State for the Dark Energy with a barotropic index variable in time. Thus avoiding both singularities: the Big Bang type one and the Big Rip type. Furthermore, in Eckart's theory (and also in Israel-Stewart's theory) it is possible to establish an effective Phantom Equation of State for the Dark Energy thanks to the bulk viscosity experienced by Dark Matter, thus avoiding all problems related to Phantom fluids. Moreover, a universe dominated only by matter can expand rapidly thanks to the contribution of dissipative pressure, associated with the bulk viscosity, which supplies the not inclusion of a Dark Energy component in the Israel-Stewart theory.

Keywords: Dark Energy, Dark Matter, Phantom Dark Energy, Generalized Equations of State, Eckart theory, Israel-Stewart theory.

Dedicatoria

Este trabajo de tesis esta dedicado a Natividad Gomez Campos y Joan Sánchez Constansó, quienes en el momento más difícil de mi vida y de mis estudios, se transformaron en un pilar fundamental para continuar, sobretodo cuando en mi mente y en mi corazón sólo abundaban los deseos de desertar. Fueron ellos, quienes a más de 11.000 km de mi patria y mi gente, se transformaron en las personas más cercanas a mi, se transformaron en mis amigos, se transformaron en mi familia. De no ser por ellos, tal vez el contenido de este trabajo de tesis ni siquiera existiría y, tal vez, hoy no estaría a un paso de convertirme en Doctor en Ciencia con Mención en Física. La deuda que tengo con ustedes es grande, y lo menos que puedo hacer es dedicarles el trabajo más importante de mi vida académica. Cada una de las paginas de este trabajo es gracias a ustedes, a quienes me trataron como uno de los suyos y me demostraron que podía salir adelante, que era fuerte, que no necesité, necesito, ni necesitaré a nadie para alcanzar mis sueños. Algún día saldará mi deuda como corresponde, pero por ahora esto es para ustedes, mi familia catalana, quienes me recibieron como un inquilino y me despidieron como un hijo.

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo de tesis fue posible gracias a la contribución financiera de la Universidad de Santiago de Chile (USACH) y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT).

A la USACH se le agradece la financiación del primer año de mis estudios de Doctorado en Ciencia con Mención en Física, mediante una beca de arancel y manutención entregada por la Vicerrectoría Académica. Además, se le agradece la financiación de un semestre extra a la duración del programa de Postgrado para el término del desarrollo de esta tesis, mediante una beca de arancel.

A CONICYT se le agradece la financiación de los siguientes tres años de mis estudios de Doctorado en Ciencia con Mención en Física, mediante la beca de arancel y manutención CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional/2016-21160331. Además, se le agradece la financiación de un semestre extra a la duración del programa de Postgrado para el término del desarrollo de esta tesis, mediante la extensión de la beca de manutención; así como la financiación de una estancia doctoral de nueve meses en el Instituto de Ciencias del Espacio, en Barcelona España.

Tabla de contenidos

Introducción	1
1 Fundamentos básicos de la cosmología	8
1.1 Las ecuaciones de Friedmann	8
1.2 El modelo cosmológico estándar	13
1.3 Ajustes de modelos cosmológicos con datos observacionales de SNe Ia	15
1.4 Restricción de los parámetros del Modelo Estándar con JLA	22
2 Ecuaciones de estado generalizadas	25
2.1 Evolución del universo bajo un fluido phantom	25
2.2 Condiciones de Little Rip al futuro y regularidad al pasado	28
2.3 Soluciones regulares a partir de GEoS	33
2.4 Ajuste de los modelos regulares con SNe Ia	42
3 Cosmología disipativa en la teoría de Eckart	53
3.1 La teoría de Eckart con constante cosmológica	54
3.2 Phantom efectivo y consecuencias del equilibrio termodinámico	56
3.3 Ajuste de la ecuación diferencial con SNe Ia: caso WDM	60
3.4 Ajuste de la ecuación diferencial con SNe Ia: caso CDM	74
4 Cosmología disipativa en la teoría de Israel-Stewart	88

4.1	La teoría de Israel-Stewart con constante cosmológica	89
4.2	Solución analítica en la teoría de Israel-Stewart sin constante cos- mológica	95
4.3	Ajuste de la solución analítica con SNe Ia	100
	Conclusiones	109
	Glosario de términos	114
	Referencias bibliográficas	116
	Anexo I	126
	Anexo II	132

Índice de tablas

- 2.1 Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al modelo cosmológico estándar Λ CDM; mientras que la segunda, tercera y cuarta fila corresponden a los valores de mejor ajuste de los modelos I, II y III, estudiados como soluciones regulares y Little Rip. Los parámetros de la curva de la luz para los modelos Λ CDM, I y III son: $M_B = -19.08 \pm 0.02$, $\alpha = 0.14 \pm 0.01$ y $\beta = 3.11 \pm 0.08$; mientras que para el modelo II son: $M_B = -19.07 \pm 0.02$, $\alpha = 0.14 \pm 0.01$ y $\beta = 3.10 \pm 0.08$ 49

- 3.1 Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste, para el análisis WDM. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (3.20); mientras que la tercera, cuarta, quinta y sexta fila corresponden a los casos particulares de la ecuación diferencial anterior, donde s es igual a -1 , 0 , 1 y 2 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α para todos los casos es 0.14 ± 0.01 . El parámetro β es 3.11 ± 0.08 para todos los casos, salvo para el caso s libre, donde es igual a 3.12 ± 0.08 . El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.08 ± 0.02 para todos los casos, salvo para los casos $s = 1$ y $s = 2$, donde es igual a -19.07 ± 0.02 61
- 3.2 Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste, para el análisis CDM. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (3.20); mientras que la tercera, cuarta, quinta y sexta fila corresponden a los casos particulares de la ecuación diferencial anterior, donde s es igual a -1 , 0 , 1 y 2 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α para todos los casos es 0.14 ± 0.01 . El parámetro β es 3.11 ± 0.08 para todos los casos, salvo para el caso $s = -1$, donde es igual a 3.10 ± 0.08 . El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.07 ± 0.02 para los casos s libre, $s = 0$ y $s = 2$; -19.08 ± 0.02 para los casos Λ CDM y $s = -1$; y -19.06 ± 0.02 para el caso $s = 1$ 75

- 4.1 Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo Unión 2.1, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda, tercera, cuarta y quinta fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (4.8), en los casos particulares donde ϵ es igual a 1, 0.5, 0.1 y 0.01, respectivamente. Debido a que para el ajuste se utiliza el catálogo de Unión 2.1, no aparecen en la tabla los parámetros de la curva de la luz característicos de JLA. 94
- 4.2 Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; mientras que la segunda y tercera fila corresponde a los casos general y particular en estudio, respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α y β para todos los casos es 0.14 ± 0.01 y 3.11 ± 0.08 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.08 ± 0.02 en el caso Λ CDM y -19.09 ± 0.02 en los casos general y particular. 102

Índice de Ilustraciones

1.1	Gráfico de dispersión del módulo de la distancia μ de cada SNe Ia en función de su corrimiento al rojo z , obtenidas del catálogo JLA. Para la obtención de μ se utilizaron los valores de $M_B = -19.08$, $\alpha = 0.14$ y $\beta = 3.11$. Debido a que SNe Ia distantes tienen mayor μ que las entregadas por modelos en desaceleración, esta curva sólo puede ser replicada por modelos que representen expansión acelerada, prueba irrefutable de la reciente expansión acelerada del Universo.	20
1.2	Restricción conjunta y marginada de Ω_m para el modelo Λ CDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente.	24
2.1	Gráfico del índice barotrópico (2.24) en función de $H_0 t$. Ambas curvas son para $\rho_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.	35

2.2	Gráfico del índice barotrópico (2.28) en función de H_0t . Ambas curvas son para $\beta = 1$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.	36
2.3	Gráfico del índice barotrópico (2.36) en función de H_0t . Ambas curvas son para $\rho_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.	39
2.4	Gráfico del índice barotrópico (2.40), asociado a la factor de escala (2.37), en función de H_0t . Ambas curvas son para $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.	40
2.5	Gráfico del índice barotrópico (2.44), asociado al factor de escala (2.41), en función de H_0t . Ambas curvas son para $a_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.	42
2.6	Gráfico del factor de escala en función de H_0t , de los cinco modelos estudiados como universos que cumplen son ser regulares al pasado y Little Rip hacia el futuro. Las condiciones de los gráficos han sido establecidas sólo para poder exponer claramente la regularidad tanto al pasado, como al futuro de la solución.	43
2.7	Restricción conjunta y marginada de Ω_m y \hat{B} para el modelo I, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 2.1.	46

2.8	Restricción conjunta y marginada de Ω_m , A y \hat{B} para el modelo II, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 2.1.	47
2.9	Restricción conjunta y marginada de Ω_m , \hat{B} y $\hat{\xi}$ para el modelo III, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 2.1.	48
2.10	Gráfico del módulo de la distancia de los modelos I, II y III, a los cuales se les ha restado el módulo de la distancia entregado por Λ CDM. La línea continua corresponde al modelo I, la línea discontinua al modelo II, y la línea discontinua-punteada corresponde al modelo III. Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$	51
3.1	Restricción conjunta y marginada de s , Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.	62

- 3.2 Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = -1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 63
- 3.3 Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 0$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 64
- 3.4 Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 65
- 3.5 Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 2$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 66

3.6	Gráfico del módulo de la distancia obtenido de la ecuación diferencial (3.20) para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM, en el análisis WDM. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s . Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.	68
3.7	Gráfico del parámetro de Hubble adimensional E en función del corrimiento al rojo z , para el modelo Λ CDM y los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .	69
3.8	Gráfico del phantom efectivo ω_p en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .	71
3.9	Gráfico de la condición de equilibrio termodinámico $ \Pi/p $ en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .	73

- 3.10 Restricción conjunta y marginada de s , Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. 76
- 3.11 Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = -1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. 77
- 3.12 Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 0$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 78
- 3.13 Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . . 79

3.14	Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 2$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. . . .	80
3.15	Gráfico del módulo de la distancia obtenido de la ecuación diferencial (3.20) para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM, en el análisis CDM. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s . Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.	82
3.16	Gráfico del parámetro de Hubble adimensional E en función del corrimiento al rojo z , para el modelo Λ CDM y los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis CDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s	84
3.17	Gráfico del phantom efectivo ω_p en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis CDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s	85

4.1	Restricción conjunta y marginada de ξ_0 , ϵ y γ para el caso general dado por la solución (4.26), y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.2.	103
4.2	Restricción conjunta y marginada de ξ_0 y ϵ para el caso particular dado por la solución (4.36), y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.2.	104
4.3	Gráfico del módulo de la distancia obtenido de los casos general y particular para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM. La línea discontinua representa el caso general y la línea discontinua-punteada el caso particular. Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.	105
4.4	Ejemplos ilustrativos de un determinado factor de escala y de una determinada densidad de energía, dados como Ansätze. (a) Representa el gráfico del factor de escala como función del tiempo. (b) Representa el gráfico de la densidad de energía como función del tiempo.	133

Introducción

Han pasado poco más de cien años desde que Albert Einstein, entre los años 1915 y 1916, publicara la Teoría de la Relatividad General [1], cuyo acontecimiento dio origen a lo que hoy conocemos como la cosmología moderna. En el año 1917, el mismo Einstein resolvió las ecuaciones de su nueva teoría [2] considerando un modelo de Universo donde la materia se distribuía uniformemente por todo el espacio, a pesar de que no existía evidencia observacional en aquella época que apoyara este supuesto, y considerando además que el Universo debía ser esférico. Einstein encontró que el Universo en su conjunto podía evolucionar, concepto que por ese entonces resultaba sorprendente, ya que si bien se observaban los movimientos locales de las estrellas, se creía que el Universo en su conjunto debía ser estático. Einstein consideró esta idea como muy establecida y por ende no podía ser abandonada. Esto lo llevo a introducir una constante Λ (conocida como la constante cosmológica) en sus ecuaciones de campo, con el fin de contrarrestar los efectos gravitacionales de la materia, que tendían a contraer el espacio, mientras que el efecto de la constante era producir una suerte de repulsión universal. Fue Alexander Friedmann, quien entre 1922 y 1924, encontraría las ecuaciones que gobiernan la evolución del Universo [3, 4], considerando materia homogéneamente distribuida, al igual que Einstein, pero suponiendo que la constante Λ era libre tanto en valor como en signo. En sus trabajos se mostró que la teoría daba lugar a un número muy variado de comportamientos posibles y, lo que fue muy importante al observarse luego la expansión del Universo, que un

universo dinámico era la situación más común de todas las soluciones posibles. Más adelante el mismo Einstein llamaría a esta constante su “mayor metedura de pata” cuando Edwin Hubble en 1929 publicó los datos que indicaban que el Universo efectivamente se expande, mediante mediciones de corrimiento al rojo de galaxias [5]. Es necesario destacar que Hubble nunca mencionó que el Universo efectivamente se expande, sino que sólo publicó los datos, incluso sin mencionar que las mediciones de corrimiento al rojo utilizadas pertenecían a Vesto Slipher [6]. Fue Georges Lemaître en 1927 [7, 8] quien mencionó que el Universo se encuentra en expansión. Muchos años más tarde, en 1998, los proyectos independientes “Supernova Cosmology Project” y la “High-Z Supernova Search Team” obtuvieron simultáneamente resultados que sugerían una aceleración en la expansión del Universo [9, 10]. Expansión que se podía explicar de manera simple mediante la inclusión de la constante cosmológica.

Hoy en día, las recientes observaciones cosmológicas han permitido establecer con precisión que el Universo se encuentra en una fase de expansión acelerada [9–13]. Expansión que se ha iniciado recientemente en términos cósmicos, a un corrimiento al rojo de alrededor de $z = 0.64$ [14], convirtiéndose en uno de los mayores desafíos de la física teórica. En el contexto de la Relatividad General, la reciente y tardía aceleración en la expansión del Universo puede ser producida por un fluido exótico llamado DE (Energía Oscura, del inglés Dark Energy), el cual necesariamente debe violar SEC (Condición de Energía Fuerte, del inglés Strong Energy Condition) y poseer una presión negativa, la cual genera un efecto contrario a la atracción gravitacional, provocando la expansión del Universo a grandes escalas cosmológicas [15–17]. Esta DE es la componente mayoritaria del Universo, representando alrededor de tres cuartas partes de la total composición del mismo, y puede ser representada como un fluido barotrópico, cuya EoS (Ecuación de Estado, del inglés Equation of State) toma la forma $p = \omega\rho$, donde p es la presión del fluido, ρ la densidad de energía del fluido y ω se conoce como

índice barotrópico, el cual debe ser constante y con un valor cercano a -1 , de acuerdo a la mayoría de los análisis relacionados con la data observacional, generalmente compatibles con la inclusión Λ .

El modelo más aceptado para describir la evolución del Universo es el denominado Modelo Estándar de la cosmología o Λ CDM (donde CDM refiere a Materia Oscura Fría, del inglés Cold Dark Matter). Modelo en el cual la reciente expansión acelerada del Universo se puede entender como la transición entre la era de la dominación de la DM (Materia Oscura, del inglés Dark Matter) y la era actual, donde domina la DE. Esta DE está presente en el modelo mediante la constante cosmológica Λ y cuya EoS posee un índice barotrópico $\omega = -1$. El gran logro de este modelo radica en su capacidad de explicar con éxito los datos cosmológicos provenientes de SNe Ia (Supernovas tipo Ia, del inglés Type Ia Supernovae) [9, 10, 18], CMB (Radiación Cómica de Fondo, del inglés Cosmic Microwave Background) [19, 20], BAO (Oscilaciones Acústicas de los Bariones, del inglés Baryon Acoustic Oscillations) [21] y los datos asociados al parámetro de Hubble H_0 [14, 22–26]. Aún así, este modelo presenta los siguientes problemas desde el punto de vista teórico: ¿Por qué el valor observado de Λ es 120 órdenes de magnitud menor que el valor anticipado físicamente? Esta interrogante es conocida como el Problema de la Constante Cosmológica [27–32] y puede ser representada mediante las siguientes dos preguntas abiertas: ¿Por qué el valor observado de la energía del vacío posee un valor tan pequeño pero distinto de cero? y ¿Por qué se observa una densidad de energía del vacío que es cercana a la densidad de la materia, a pesar de que su razón puede variar hasta en 120 órdenes de magnitud durante la evolución cósmica? Esta última pregunta se conoce como el Problema de la Coincidencia [33]. Más aún, el modelo Λ CDM presenta serios desafíos observacionales y tensiones [34]. Por ejemplo, los datos cosmológicos indican que el índice barotrópico de la DE se encuentra muy cerca del valor de -1 , pero más probablemente por debajo de -1 . Así lo muestran los

últimos resultados del satélite Planck, los cuales indican que $\omega = -1.03 \pm 0.03$, con ω constante y para un espacio plano [19]. Por otro lado, los nueve años de mediciones realizadas por WMAP (Sonda de Anisotropía de Microondas de Wilkinson, del inglés Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) en combinación con mediciones de CMB, BAO y H_0 para un espacio plano entregan $\omega = -1.073^{+0.090}_{-0.089}$, que en combinación con mediciones de SNe la entregan $\omega = -1.084 \pm 0.063$ [20]. Más aún, los 1.5 años de mediciones realizadas por el proyecto Pan-STARRS1, en combinación con BAO, CMB y H_0 , y asumiendo un espacio plano, han encontrado el valor de $\omega = -1.166^{+0.072}_{-0.069}$, el cual es inconsistente con el valor de -1 a un nivel de 2.3σ [35]. Estos resultados son indicadores que un comportamiento phantom de la DE, donde phantom se refiere a un tipo de fluido cuyo índice barotrópico es $\omega < -1$ y que viola SEC y NEC (Condición de Energía Nula, del inglés Null Energy Condition), no se puede descartar de los datos cosmológicos actuales [36, 37] (más trabajos sobre esta posibilidad se encuentran en [38, 39]). Estos fluidos phantom poseen además otros serios problemas aparte de la violación a las condiciones de energía. Por ejemplo, si se quiere obtener ecuaciones phantom a partir de un campo escalar acoplado minimalmente con la gravitación, necesariamente se ha de partir asociando una energía cinética negativa al campo escalar, es decir, si la EoS utilizada se quiere interpretar como un campo escalar asociado con algún potencial $V(\phi)$, entonces se debe resolver el sistema

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1)$$

Estos campos violan SEC, NEC, tienen la ya mencionada energía cinética negativa y son físicamente inestables [40, 41]. Además, modelos cosmológicos obtenidos a partir de fluidos phantom, presentan singularidades en su evolución futura (también llamada tardía), las cuales se conocen como soluciones Big Rip [42].

En cosmología, uno asume fluidos perfectos como una buena aproximación a la descripción de los fluidos que componen el Universo. Aún así, los fluidos perfectos son descripciones provenientes de la termodinámica en equilibrio, en

donde no incrementan su entropía y cuya dinámica es reversible. Sólo cuando se analizan las perturbaciones cosmológicas, se consideran procesos no adiabáticos. En este sentido, se asume que la DM debe comportarse como un fluido perfecto sin presión, es decir, por una EoS no relativista con $\omega = 0$. Sin embargo, en el caso de fluidos no perfectos aparecen efectos disipativos, como viscosidad, lo que da lugar a una descripción más general y realista de los fluidos en ambientes astrofísicos [43, 44]. De un curso estándar de mecánica de fluidos sabemos que existen dos tipos de viscosidad: la viscosidad de cizalle y la viscosidad de bulo. Debido a que el Universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas, la viscosidad de cizalle es despreciada al menos a tiempos tardíos. Sólo la viscosidad de bulo está presente en los fluidos cosmológicos y su presión disipativa debe ser descrita por alguna aproximación termodinámica relativista para fluidos imperfectos. Un aspecto importante que merece ser mencionado es que mediciones de la constante de Hubble H_0 muestran problemas entre las obtenidas de la LSS (Estructura a Gran Escala, del inglés Large Scale Structure) y las obtenidas por el CMB, tensión que puede ser aliviada cuando se incluye viscosidad en la DM [45]. Más aún, la nueva era de detectores de ondas gravitacionales han abierto la posibilidad de detectar efectos disipativos en la DM y la DE a través de la dispersión y la disipación que experimentan las ondas gravitacionales cuando se propagan por un fluido imperfecto [46].

La teoría convencional de la evolución del Universo incluye un gran número de procesos disipativos, es por esta razón que se hace necesario el desarrollo de un buen modelo de procesos disipativos cosmológicos, teniendo como candidatos la teoría de Eckart y la teoría de Israel-Stewart. La teoría de Eckart ha sido ampliamente investigada debido a su simplicidad, convirtiéndose en el punto de partida para obtener una primera aproximación del comportamiento de los efectos disipativos en la cosmología a tiempos tardíos [47–50] o en escenarios inflacionarios [51]. Todo esto a pesar de que la teoría de Eckart es una teoría de primer

orden no causal, presentando el problema de propagaciones superlumínicas y algunas inestabilidades. Por ende, desde el punto de vista de una descripción consistente de la termodinámica relativista de fluidos imperfectos, es necesario incluir una descripción causal, la cual es entregada por la teoría de Israel-Stewart.

El objetivo de esta tesis es abordar algunos los problemas mencionados de la constante cosmológica presentes en el modelo estándar de la cosmología, los cuales hemos agrupado en tres líneas de investigación diferentes:

- Considerando una EoS phantom para la DE y que la evolución futura del Universo estará gobernada por el dominio de la misma, ¿Qué tipo de evolución tendrá el Universo?, ¿Es posible evitar las singularidades futuras o Big Rip?
- Considerando una muy probable EoS phantom para la DE, ¿Cómo evitamos los problemas asociados a este tipo de fluidos?
- Considerando el denominado problema de la constante cosmológica, ¿Es posible obtener un universo en expansión acelerada sin la inclusión de la constante cosmológica?

En el capítulo 1 se discutirá los aspectos básicos de la Cosmología Moderna, así como el ajuste de los modelos cosmológicos con la data observacional de SNe Ia. En el capítulo 2 se abordará la primera línea de investigación desde el punto de vista de las GEoS (Ecuaciones de Estado Generalizadas, del inglés Generalized Equations of State), suponiendo que el universo se encuentra en una etapa tardía de su evolución cósmica, donde sólo domina la DE. Este único componente material del universo será modelado con una GEoS que en general representa una EoS del tipo phantom, cuyo índice barotrópico no necesariamente es constante. En el capítulo 3 se abordará la segunda línea de investigación desde el punto de vista de la cosmología con fluidos disipativos en la teoría no causal de Eckart. En esta teoría, fluidos imperfectos generan aceleración en la expansión

debido a la negatividad de la presión viscosa, la cual es introducida a través de una presión efectiva, y que aparece producto de la presencia de la viscosidad de bulto. Considerando que la presión efectiva total determina el comportamiento en la expansión del universo, en presencia de la viscosidad de bulto esta presión efectiva puede ser negativa incluso en el caso en que el fluido satisface NEC y SEC, entregando una forma físicamente aceptable de explicar la reciente expansión acelerada en el Universo, así como un comportamiento phantom para la DE, sólo considerando constante cosmológica. En el capítulo 4 se abordará la tercera línea de investigación, también desde el punto de vista de los fluidos disipativos, pero en el contexto de la teoría causal de Israel-Stewart. En este caso y considerando lo visto en la segunda línea de investigación, estudiaremos la posibilidad de reproducir la expansión acelerada del Universo, sólo mediante la negatividad de la presión viscosa, sin incluir una componente de DE, modelos conocidos como modelos unificados de DM. En todos los casos restringiremos los parámetros libres de los modelos estudiados con el “background” cosmológico, utilizando los datos provenientes de SNe Ia. Se finalizará esta tesis con algunas conclusiones generales y particulares relacionadas con cada uno de los capítulos anteriormente señalados.

El contenido de esta tesis se encuentra basado principalmente en los trabajos “Generalized equations of state and regular universes”, publicado en la revista Journal of Physics: Conference Series [52]; “Analysing dissipative effects in the Λ CDM model”, publicado en la revista Journal of Cosmology and Astroparticle Physics [53]; “Linking little rip cosmologies with regular early universes”, publicado en la revista Physical Review D [54]; y los trabajos en proceso de publicación “Exact analytical solution for an Israel-Stewart Cosmology” [55] y “Testing dissipative dark matter in causal thermodynamics” [56].

Capítulo 1

Fundamentos básicos de la cosmología

En este capítulo se discutirá los aspectos fundamentales de la Cosmología Moderna, que nos permitirán entender y profundizar tanto en el Modelo Estándar de la Cosmología, como la reciente expansión acelerada del Universo. Se comenzará discutiendo las ecuaciones derivadas de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, también conocidas como ecuaciones de Friedmann, las cuales nos permiten encontrar la evolución del universo; siendo explicado brevemente el modelo Λ CDM. Posteriormente se discutirá sobre los ajustes a modelos cosmológicos con SNe Ia, prueba esencial de la reciente expansión acelerada del Universo. Finalmente se realizará una restricción a los parámetros libres del Modelo Estándar, mecanismo que se puede extender para realizar ajustes a los modelos de universos propuestos en esta tesis.

1.1 Las ecuaciones de Friedmann

En la Teoría de la Relatividad General, la gravedad es originada por la curvatura del espacio-tiempo producto de la materia, cuya dinámica está descrita por las

ecuaciones de campo de Einstein, las cuales son un conjunto de diez ecuaciones diferenciales, no todas independientes, de segundo orden, no lineales, dadas por la expresión

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R el escalar de curvatura o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento, G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz. Desde aquí, y en adelante, se considerará las unidades naturales $8\pi G = c = 1$.

La resolución de las ecuaciones de Einstein en forma analítica implica tener grados importantes de simetría, de manera que el lado izquierdo de la ecuación (1.1) pueda evaluarse en forma directa. En el caso de la cosmología se utiliza el denominado Principio Cosmológico, el cual establece que a escalas suficientemente grandes, el Universo es homogéneo e isotrópico, afirmación hoy en día sustentada por observaciones que indican que este principio es válido para escalas superiores a $100Mpc$ [57]. Además, asumiendo un Universo dinámico, este principio requiere que la métrica del Universo sea la métrica FLRW (Abreviatura de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (1.2)$$

donde t es el tiempo cósmico, a es el factor de escala, r es la coordenada radial comóvil, θ y ϕ las coordenadas angulares, y k describe el tipo de curvatura del universo, siendo $k = 1$ un espacio esférico, $k = 0$ un espacio plano y $k = -1$ un espacio hiperbólico. Considerando además el tensor de energía-momento de un fluido ideal

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

donde U^μ es la 4-velocidad, las ecuaciones de campo de Einstein nos entregan las denominadas Ecuaciones de Friedmann, dadas respectivamente por

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{6}(\rho + 3p), \quad (1.5)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.6)$$

donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo cósmico y H se conoce como el parámetro de Hubble. Este sistema de ecuaciones describe la evolución del universo, siendo sólo dos ecuaciones linealmente independientes, para tres incógnitas que son ρ , p y a . Para cerrar el sistema, se relaciona la densidad de energía del fluido con su presión mediante una EoS. En particular esta EoS puede ser como la del ya mencionado fluido barotrópico, cuya forma equivalente de escritura es

$$p = \omega\rho = (\gamma - 1)\rho. \quad (1.7)$$

La razón de utilizar la EoS de un fluido barotrópico no es antojadiza, y se sustenta en que muchos fluidos conocidos pueden ser descritos por este tipo de EoS. Por ejemplo, la radiación puede ser representada mediante una EoS barotrópica cuyo índice barotrópico es $\omega = 1/3$ ó $\gamma = 5/3$, mientras que en el caso del polvo se tiene $\omega = 0$ ó $\gamma = 1$ (fluido sin presión o no relativista).

Una consideración importante es que si calculamos la velocidad del sonido adiabática en el fluido, según la definición termodinámica $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$, entonces para un fluido barotrópico se tiene $c_s^2 = \omega$, y como nada puede superar la velocidad de la luz, entonces

$$0 \leq \omega \leq 1 \quad \text{ó} \quad 1 \leq \gamma \leq 2. \quad (1.8)$$

Más aún, si consideramos la ecuación (1.5) sin constante cosmológica y teniendo en cuenta que $a > 0$, esto porque el factor de escala no es más que una medida de cuan grande es el universo, entonces un universo en expansión acelerada requiere que $\ddot{a} > 0$. Si consideramos un universo con una única componente material, la cual es modelada por la EoS (1.7), entonces el universo se encontrará

en expansión acelerada sólo si se cumple que su índice barotrópico satisface la restricción

$$\omega < -\frac{1}{3} \text{ ó } \gamma < -\frac{4}{3}, \quad (1.9)$$

lo cual entra en contradicción con lo indicado en la ecuación (1.8). Cuando no es posible especificar explícitamente el contenido material de la teoría, se utilizan las denominadas condiciones de energía, las cuales toda materia “físicamente razonable” debería satisfacer [58]. Para un fluido perfecto estas condiciones se traducen en

- NEC: $\rho + p \geq 0$.
- WEC: $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$.
- DEC: $\rho \geq |p|$.
- SEC: $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 3p \geq 0$,

donde WEC es la Condición de Energía Débil, del inglés Weak Energy Condition; y DEC es la Condición de Energía Dominante, del inglés Dominant Energy Condition. Por ende, para un fluido barotrópico se tienen las siguientes consideraciones

- Si $-1/3 \leq \omega < 1$ ó $2/3 \leq \gamma < 2$, no se viola ninguna condición de energía y no es posible obtener un universo en expansión acelerada.
- Si $-1 \leq \omega < -1/3$ ó $0 \leq \gamma < 2/3$, se viola SEC y es posible obtener un universo en expansión acelerada. A este tipo de fluidos se les denomina quintaesencia.
- Si $\omega < -1$ ó $\gamma < 0$, se viola SEC y NEC, y es posible obtener un universo en expansión acelerada. A este tipo de fluidos se les denomina phantom.

Por otro lado, si resolvemos la ecuación (1.4) para un universo plano y sin ningún contenido material salvo la constante cosmológica, entonces obtenemos

como solución un universo gobernado por el factor de escala

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right), \quad (1.10)$$

donde a_0 es el factor de escala al tiempo actual. Esta solución es conocida como universo de Sitter y claramente representa un universo en expansión acelerada. En este contexto, la constante cosmológica puede ser interpretada como un fluido con densidad de energía $\rho_\Lambda = \Lambda$ y presión $p_\Lambda = -\Lambda$, lo que se traduce en una EoS barotrópica con $\omega = -1$. Es importante notar que, en el caso del universo de Sitter, la densidad de energía de la constante cosmológica es constante durante toda la evolución cósmica. En el caso de la densidad de energía para la materia no relativista, su evolución puede ser fácilmente encontrada a partir de la ecuación (1.6), siendo descrita por la expresión

$$\rho_m = \frac{\rho_{0,m}}{a^3} = \rho_{0,m} (1+z)^3, \quad (1.11)$$

donde $\rho_{0,m}$ es la densidad de energía de la materia al tiempo actual, mientras que en el lado derecho de la igualdad se utilizó la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo z , dada por

$$1+z = \frac{a_0}{a}. \quad (1.12)$$

Lo mismo se puede hacer para la densidad de energía de la radiación, siendo dada por la expresión

$$\rho_{rad} = \frac{\rho_{0,rad}}{a^4} = \rho_{0,rad} (1+z)^4, \quad (1.13)$$

donde $\rho_{0,rad}$ es la densidad de energía de la radiación al tiempo actual.

Considerando las condiciones de energía, vemos que claramente tanto la radiación como la materia no son capaces de producir una aceleración en la expansión del universo, más bien todo lo contrario, ambos fluidos por sí solos cumplen con $\ddot{a} < 0$, es decir, un universo que se encuentra en expansión desacelerada. Eso sí, debido a esta misma condición, ambos fluidos no violan ninguna

de las cuatro condiciones de energía aquí expuestas. Por otro lado, la constante cosmológica conduce a un universo en expansión acelerada, pagando el precio de violar SEC. Note que la constante cosmológica se encuentra justo en la frontera de un fluido quintaesencia que sólo viola SEC y de un fluido phantom que viola SEC y NEC.

1.2 El modelo cosmológico estándar

El modelo cosmológico más aceptado hoy en día es el modelo Λ CDM. En este modelo el Universo se encuentra compuesto por cinco fluidos materiales: radiación, materia bariónica, DM, DE y neutrinos. La DM es fría, es decir, al igual que la materia bariónica es no relativista, y es la responsable de la formación de la LSS. Por otro lado, la DE es la responsable de la reciente expansión acelerada del Universo, siendo representada en las ecuaciones de Friedmann por la constante cosmológica Λ .

Si consideramos la ecuación (1.4) teniendo en cuenta que $\rho = \rho_{tot} = \rho_m + \rho_{rad}$, donde $\rho_m = \rho_{DM} + \rho_b$, con ρ_{DM} la densidad de energía de la DM y ρ_b la densidad de energía de la materia bariónica; $\rho_{rad} = \rho_f + \rho_n$, con ρ_f la densidad de energía de los fotones y ρ_n la densidad de energía de los neutrinos relativistas; y usando las ecuaciones (1.11) y (1.13), encontramos que el parámetro de Hubble de este modelo en función del corrimiento al rojo, está dado por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda - \Omega_k(1+z)^2}, \quad (1.14)$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble a tiempo actual y

$$\Omega_{rad} = \frac{\rho_{0,rad}}{3H_0^2}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_{0,m}}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad \text{y} \quad \Omega_k = \frac{k/a_0^2}{3H_0^2}, \quad (1.15)$$

son los parámetros (adimensionales) de densidad de radiación, materia, DE y curvatura, respectivamente. Según los últimos resultados del satélite Planck [19]

$\Omega_k = 0.001 \pm 0.002$, lo que es consistente con un Universo plano; Ω_{rad} es despreciable, hoy en día, con respecto a la materia y la DE; $\Omega_m = 0.315 \pm 0.017$, es decir, prácticamente un 32% del Universo corresponde a materia, donde sólo un 17% de este contenido corresponde a materia bariónica; mientras que un 68% del contenido material del Universo corresponde a DE.

De la ecuación (1.14), considerando de antemano un espacio plano, vemos que la evolución del Universo puede dividirse en tres grandes eras: La era de la dominación de la radiación, la era de la dominación de la materia y la era de la dominación de la DE. A tiempos actuales nos encontramos en la etapa de transición final de la era de la dominación de la materia a la era de la dominación de la DE. Nótese que a tiempos tardíos de la evolución del Universo cuando $z \rightarrow -1$ ($z = 0$ representa el tiempo actual), el parámetro de Hubble tiende asintóticamente a la solución de Sitter, es decir, bajo este modelo nuestro Universo tiende a tiempos tardíos a una expansión exponencial. Es además esta transición la responsable del paso de un Universo en expansión desacelerada a la de una expansión acelerada, es decir, a aproximadamente $z = 0.64$ las densidades de materia y DE eran prácticamente iguales. Más atrás en el tiempo, la densidad de DE era despreciable con respecto a la densidad de materia, así como a tiempos tempranos, cuando $z \rightarrow \infty$, la densidad de radiación predominaba por sobre la densidad de materia. Recordemos que este modelo es exitoso al lograr explicar aspectos observacionales tan importantes como la existencia y estructura del CMB, la LSS en la distribución de galaxias, la aceleración en la expansión del Universo observado en la luz de las galaxias distantes y SNe Ia, entre otros.

En este trabajo se estudiará sólo dos eras, la era del dominio de la DE y la transición entre la era del dominio de la materia a la del dominio de la DE. Bajo esta consideración, podemos despreciar en la ecuación (1.14) la radiación ($\Omega_{rad} \approx 0$) y asumimos un espacio plano ($\Omega_k = 0$), lo que nos permite reescribir el

parámetro de Hubble de la forma

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}, \quad (1.16)$$

donde $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

1.3 Ajustes de modelos cosmológicos con datos observacionales de SNe Ia

Como se ha mencionado en la introducción, en 1998 y de manera simultánea los proyectos independientes “Supernova Cosmology Project”, a cargo de Adam G. Riess, y la “High-Z Supernova Search Team”, a cargo de Saul Perlmutter y Brian P. Schmidt, obtuvieron resultados que sugerían una aceleración en la expansión del Universo. En el caso de la “Supernova Cosmology Project”, su catálogo contaba con 50 SNe Ia, 34 a bajo corrimiento al rojo ($z \leq 0.15$) y 16 a alto corrimiento al rojo ($0.16 \leq z \leq 0.97$) [9]. Mientras que en el caso de la “High-Z Supernova Search Team”, su catálogo contaba con 42 SNe a alto corrimiento al rojo ($0.18 \leq z \leq 0.83$) [10]. Hoy en día, la expansión acelerada del Universo es un hecho, lo que le valió el Premio Nobel de Física en 2011 a Riess, Perlmutter y Schmit, mientras que los catálogos superan las 500 SNe Ia. Dentro de los más importantes se encuentran Union 2.1 [18], el cual contiene 557 SNe Ia con corrimientos al rojo entre $0.015 \leq z \leq 1.4$; JLA (Análisis de la Curva de la Luz Conjunta, del inglés Joint Light-Curve Analysis) [59], el cual contiene 740 SNe Ia con corrimientos al rojo entre $0.01 \leq z \leq 1.3$ y Phanteon [60], el cual contiene 1048 SNe Ia con corrimientos al rojo entre $0.01 \leq z \leq 2.3$.

Debido a que este trabajo de tesis está enfocado en estudiar la reciente expansión acelerada del Universo y la evolución futura del universo bajo una ecuación de estado phantom para la DE, es que se utilizará el catálogo de SNe Ia provisto por JLA. Esta elección se hace evidente ya que en comparación con

Union 2.1, se tiene un catálogo con datos de 183 SNe la más dentro del mismo rango de corrimientos al rojo. No se utilizará Phanteon por el hecho de que abarca datos de SNe la con corrimientos al rojo de hasta $z = 2.3$, es decir, los modelos ajustados deben considerar una era donde la dominación de la DM es importante con respecto a la DE.

Para realizar el ajuste de los modelos cosmológicos con los datos de SNe la provenientes de JLA, se debe tener en consideración que cada modelo tiene un conjunto de parámetros libres, los cuales se deben ajustar o restringir según una serie de datos provenientes del catálogo. Para tal fin se utiliza el teorema de Bayes, el cual en teoría de probabilidad se puede escribir de la siguiente manera

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta) P(\theta)}{P(x)}, \quad (1.17)$$

expresión que nos dice que para saber la probabilidad de que evento θ ocurra dado que x es cierto, basta con saber la probabilidad de que el evento x ocurra dado que θ es cierto, junto con las probabilidades observadas de θ y x independientes entre si. En el caso de un modelo teórico dado por un conjunto de parámetros indeterminados θ y un conjunto de datos experimentales x , el teorema de Bayes se puede leer de la siguiente forma [61]

- $P(\theta|x)$ se denomina posteriori o posterior y representa la probabilidad de obtener los parámetros θ del modelo dado el conjunto de datos observacionales x , es decir, lo que buscamos al realizar el ajuste.
- $P(x|\theta)$ se denomina función de verosimilitud o likelihood y representa la probabilidad de obtener un set de datos dado los parámetros del modelo. Visto de otro modo, es el como se piensa que los datos x están distribuidos suponiendo que los valores de θ son los correctos. Aquí es donde entra el modelo cosmológico teórico.
- $P(\theta)$ se denomina priori o prior y representa lo que se piensa sobre los parámetros indeterminados θ después de ver los datos. En general, el prior

es el conocimiento previo de los parámetros y por ende se determina de experimentos anteriores, de rangos físicamente aceptables, etc.

- $P(x)$ se denomina evidencia y representa la certeza de que los datos x fueron generados por el modelo. Esta es la probabilidad más complicada de determinar del teorema, ya que no es posible definir una probabilidad de que un modelo, que estamos probando es cierto, entregue resultados observacionales.

Como se observa, tanto la función de verosimilitud como el prior son fácilmente calculables. Como función de verosimilitud se puede usar una distribución de Gauss que relacione los datos observacionales x con el modelo teórico con parámetros θ , mientras que para el prior se puede considerar restricciones a los parámetros de la teoría derivados de otros aspectos físicos. La dificultad de encontrar el posterior radica en determinar la evidencia $P(x)$. Esta última puede ser calculada mediante una integración sobre todos los posibles valores de los parámetros θ del modelo, es decir

$$P(x) = \int_{\Theta} P(x, \theta) d\theta. \quad (1.18)$$

Lamentablemente, la integral anterior no puede ser calculada debido a que no se conoce la forma de $P(x, \theta)$. Al no conocer el valor de la evidencia, se tiene como alternativa intentar aproximar el valor que tiene el posterior mediante un algoritmo de Monte Carlo. Desafortunadamente, para tomar muestras directamente de esta distribución, no sólo se debe resolver la ecuación (1.17) sino que también se debe invertir, lo que la vuelve aún más complicada de resolver. La solución a este problema provienen de los algoritmos llamados MCMC (Abreviatura de Markov Chain Monte Carlo) [62], donde se construye una cadena de Markov para realizar una aproximación de Monte Carlo.

En nuestro caso se utilizará un algoritmo de MCMC de código libre y programado puramente en Python llamado *emcee* [63]. Para utilizar el algoritmo

debemos construir tanto la función de verosimilitud como el prior. Considerando que el prior depende de cada modelo, en esta sección sólo se construirá la función de verosimilitud. Para ésta se utiliza una distribución de Gauss de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{N} e^{-\chi^2/2}, \quad (1.19)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización. Es necesario recalcar que el algoritmo trabaja con el logaritmo natural de cada una de las probabilidades, es decir, considera la ecuación (1.17) aplicando el logaritmo natural a ambos lados de la igualdad. Para la construcción de χ^2 se considera el módulo de la distancia teórico para cada SNe la μ_{th} y el módulo de la distancia observacional μ .

El módulo de la distancia teórico para cada SNe la está definido como

$$\mu_{th}(z, \vec{p}) = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z, \vec{p})}{Mpc} \right] + 25, \quad (1.20)$$

donde el vector \vec{p} representa los parámetros libres de cada uno de los modelos cosmológicos que se desean ajustar y d_L es la distancia luminosa, dada por

$$d_L(z, \vec{p}) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z', \vec{p})}, \quad (1.21)$$

donde c es la velocidad de la luz dada en unidades de km/s , H_0 es la constante de Hubble para la cual se considera el valor fiducial fijo de $70 km s^{-1}/Mpc$ (el ajuste con JLA no varía según el valor de H_0) y $E(z, \vec{p})$ está definido como

$$H(z, \vec{p}) = H_0 E(z, \vec{p}). \quad (1.22)$$

Por otro lado, en el catálogo de JLA el estimador de distancia usado asume que las SNe la con idéntico color, forma y ambiente galáctico, poseen en promedio la misma luminosidad intrínseca para todos los corrimientos al rojo. Esta hipótesis está cuantificada por la formula de Tripp [64] como

$$\mu = m_b^* - (M_B - \alpha \times X_1 + \beta \times C), \quad (1.23)$$

donde m_b^* corresponde al pico de magnitud observado en el marco de la banda B , X_1 es el parámetro de estiramiento, C es el parámetro de color, y M_B , α y β son parámetros de “nuisance” (que puede ser traducido como parámetros de molestia) en la distancia estimada. Los tres primeros parámetros son provistos por el catálogo JLA, mientras que los tres últimos tienen que ser estimados y marginados en conjunto con los parámetros libres presentes en el vector \vec{p} . En la figura 1.1 se muestra un gráfico de dispersión del módulo de la distancia observacional en función del corrimiento al rojo, obtenido del catálogo JLA para un determinado valor de los parámetros M_B , α y β .

Tal como se menciona en [59], el estimador de distancia dado por la ecuación (1.23) puede ser escrito en notación matricial, mediante la formación de una matriz \mathbf{A} de la forma

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{M}_b, \quad (1.24)$$

donde

$$\boldsymbol{\eta} = \left((m_{b,1}^*, X_{1,1}, C_1), \dots, (m_{b,n}^*, X_{1,n}, C_n) \right), \quad (1.25)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}_1 - \beta\mathbf{A}_2, \text{ with } (\mathbf{A}_k)_{i,j} = \delta_{3,j+k}, \quad (1.26)$$

son el vector n -dimensional y la matriz $n \times n$, respectivamente, con $n = 740$ el número de SNe Ia presentes en el catálogo. Además, el catálogo de JLA entrega una matriz de covarianza \mathbf{C} , que codifica la incertezas sistemáticas y estadísticas. Por lo tanto, la función χ^2 de la ecuación (1.19) toma la forma

$$\chi^2 = (\boldsymbol{\mu}(\vec{p}_J) - \boldsymbol{\mu}_{th}(z, \vec{p}))^\dagger \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\mu}(\vec{p}_J) - \boldsymbol{\mu}_{th}(z, \vec{p})), \quad (1.27)$$

donde $\vec{p}_J = (M_B, \alpha, \beta)$. La ecuación (1.27) es la expresión final de χ^2 que se utilizará en los análisis de MCMC, función que se debe minimizar con la finalidad de encontrar los mejores parámetros que se ajusten a los datos y los intervalos de confianza. Para este proceso, se utilizará para el vector de parámetros \vec{p}_J , los siguientes prior: $-20 < M_B < -18$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 5$.

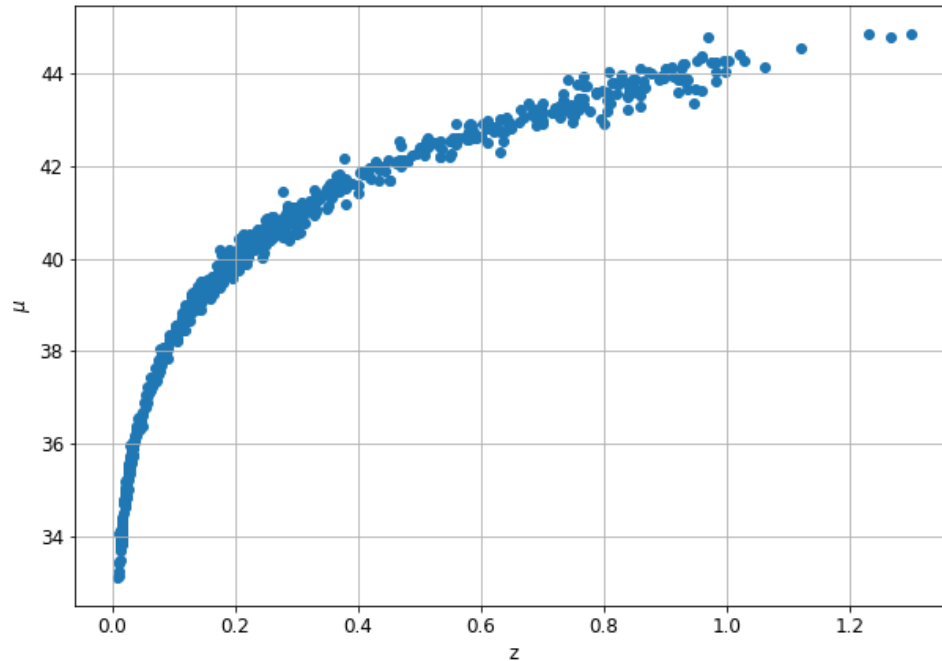


Figura 1.1: Gráfico de dispersión del módulo de la distancia μ de cada SNe Ia en función de su corrimiento al rojo z , obtenidas del catálogo JLA. Para la obtención de μ se utilizaron los valores de $M_B = -19.08$, $\alpha = 0.14$ y $\beta = 3.11$. Debido a que SNe Ia distantes tienen mayor μ que las entregadas por modelos en desaceleración, esta curva sólo puede ser replicada por modelos que representen expansión acelerada, prueba irrefutable de la reciente expansión acelerada del Universo.

Un aspecto importante que debe ser recalcado en este procedimiento es que, con la finalidad de obtener un mejor ajuste a los datos x presentes en el catálogo, es posible usar un modelo con una mayor cantidad de parámetros libres θ . El problema es que se está intentando maximizar la función de verosimilitud artificialmente, lo que resultaría en un sobreajuste. Para resolver este problema

se utilizan dos criterios que nos permiten establecer que tan bueno es un ajuste estadístico, estos son el AIC (Criterio de Información de Akaike, del inglés Akaike Information Criterion) y el BIC (Criterio de Información Bayesiano, del inglés Bayesian Information Criterion). Siendo el primero definido de la forma

$$AIC = 2k - 2 \ln(\mathcal{L}_{max}), \quad (1.28)$$

donde \mathcal{L}_{max} es el máximo valor de la función de verosimilitud, calculada para los parámetros que mejor se ajustan a los datos, y k es el número de parámetros libres del modelo. En cuanto al BIC, este se encuentra dado por la expresión

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\mathcal{L}_{max}), \quad (1.29)$$

donde n es el número de SNe la presentes en el catálogo.

Como se observa tanto el AIC como el BIC intentan solucionar el problema de sobreajuste, introduciendo una penalización que depende del número total de parámetros de cada uno de los modelos ajustados. Esta penalización es mucho mayor en el BIC que en el AIC, debido a que la penalización del primero además depende del logaritmo natural del total de los datos observacionales del catálogo. El modelo más favorecido por las observaciones, comparado con algún otro modelo, corresponde al que obtenga el valor más bajo de AIC/BIC. Por ende, si bien se calculará tanto el AIC como el BIC en cada uno de los ajustes, el análisis se centrará en el valor otorgado por el BIC, donde en general una diferencia entre 2 – 6 en BIC entre dos modelos es considerada evidencia en contra del modelo con mayor BIC, una diferencia de 6 – 10 en BIC es considerada evidencia fuerte y un valor mayor a 10 en BIC es considerada evidencia muy fuerte.

1.4 Restricción de los parámetros del Modelo Estándar con JLA

Con lo visto en la sección anterior, se restringirá los parámetros libres del modelo Λ CDM con los datos observacionales de SNe Ia, provistos por el catálogo JLA. Para tal fin, se ha construido un algoritmo en el lenguaje de programación de código abierto Python, el cual se encuentra detallado en el Anexo I. Entre los aspectos más importantes que se hacen necesarios destacar son:

- Como valores iniciales para los parámetros libres θ se utiliza una pequeña vecindad de los parámetros obtenidos al maximizar la función de verosimilitud.
- El algoritmo de *emcce* requiere para su funcionamiento la dimensión, número de caminantes y número de pasos. La dimensión corresponde al número de parámetros libres del modelo (sin olvidar los parámetros libres del catálogo JLA); el número de caminantes debe ser al menos el doble de la dimensión, por lo que en general se usó al triple o cuádruple de la dimensión; y como número de pasos se usó entre 5.000 y 7.000 según la dimensión del modelo.
- Antes de correr definitivamente el algoritmo se utilizan 2000 pasos de calentamiento o “burning”, con la finalidad de explorar todo el espectro de parámetros dados por el prior.
- Los parámetros que mejor se ajustan a los datos son siempre calculados a 1σ de nivel de confianza, es decir, el mejor valor corresponde al percentil 50 de la distribución entregada por el algoritmo, mientras que el error inferior corresponde al percentil 50-16 y el superior al percentil 84-50.
- Para corroborar que el algoritmo está convergiendo correctamente se utiliza la fracción de aceptación o “acceptance fraction”, la cual debe tener un valor,

al finalizar el algoritmo, de entre 0.2 y 0.5. En caso de que el valor sea mayor a 0.5, se debe modificar el valor el parámetro a del algoritmo *emcee* (por defecto es 2) a un valor mayor; mientras que si es menor a 2, se debe disminuir el valor del parámetro a .

Todos los ajustes a los modelos estudiados en este trabajo utilizan el mismo algoritmo. Sólo basta con modificar la distancia luminosa según el parámetro de Hubble derivado del modelo cosmológico que se desea ajustar, como se puede ver de las ecuaciones (1.20) y (1.21). En el caso del modelo Λ CDM se utiliza directamente el parámetro de Hubble dado por la ecuación (1.16), pero considerando que $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$, es decir, este modelo sólo tiene un parámetro libre y por ende su vector de parámetros puede ser escrito de la forma $\vec{p} = (\Omega_m)$, para el cual se utiliza el prior: $0 < \Omega_m < 1$.

En la figura 1.2 se presenta el conjunto de regiones creíbles para los parámetros del modelo Λ CDM, para combinaciones de sus vectores de parámetros \vec{p} y \vec{p}_J . En cuanto a los parámetros que mejor se ajustan a los datos, son: $\Omega_m = 0.29 \pm 0.03$, $M_B = -19.08 \pm 0.02$, $\alpha = 0.14 \pm 0.01$ y $\beta = 3.11 \pm 0.08$. En cuanto a los criterios de bondad de ajuste se tiene: $\chi_{min}^2 = 692.1$, $AIC = 700.1$ y $BIC = 718.5$. Es necesario mencionar que el valor de χ_{min}^2 se obtiene mediante la evaluación de la ecuación (1.27) en los parámetros que mejor ajustan a los datos.

Los valores de los parámetros del modelo Λ CDM que mejor ajustan a los datos, expuestos arriba, están en concordancia con los indicados en el trabajo de Betoule et. al. [59], que es donde se propone el catálogo JLA. Mientras que el valor de Ω_m se encuentra también en concordancia con el valor indicado en los últimos resultados de Planck [19], donde $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$. Es por esto, y considerando que Λ CDM es hasta ahora el mejor modelo cosmológico, que todos los modelos propuestos y estudiados en este trabajo de tesis, serán siempre comparados con el Modelo Estándar, según los parámetros que mejor ajustan a los datos expuestos en este capítulo.

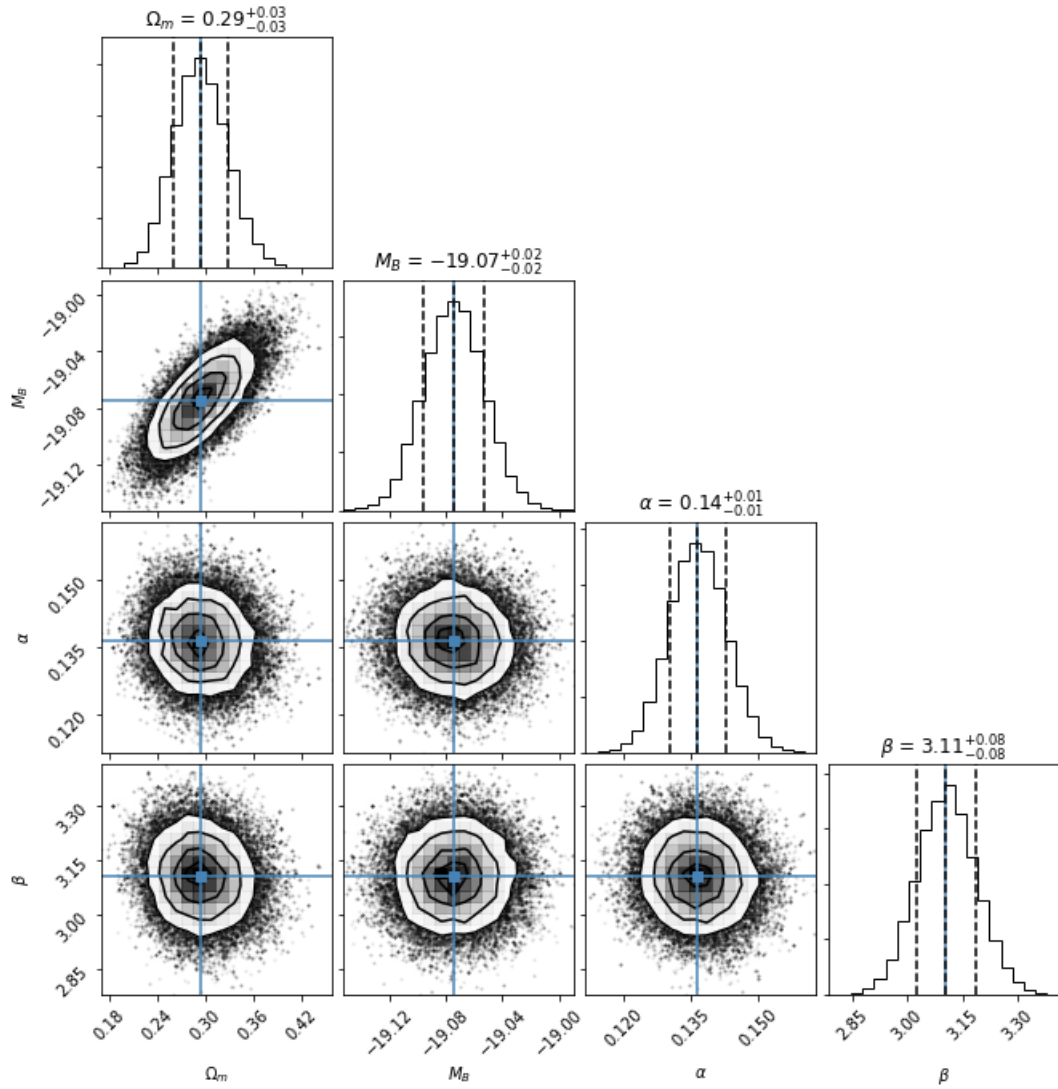


Figura 1.2: Restricción conjunta y marginada de Ω_m para el modelo Λ CDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente.

Capítulo 2

Ecuaciones de estado generalizadas

En este capítulo se discutirá la primera línea de investigación, en la cual se supone una etapa tardía en la evolución del Universo donde sólo domina la DE. Esta DE no será representada por la constante cosmológica Λ como en el Modelo Estándar de la Cosmología, sino que estará representada por una GEoS cuyos índices barotrópicos son phantom y por lo general no constantes. El aspecto más importante de las GEoS estudiadas en este capítulo es que conducen a universos capaces no sólo de evitar la singularidad futura característica de los fluidos phantom, sino que también evitan la singularidad inicial o Big Bang. Las soluciones capaces de evitar la singularidad tipo Big Rip dan lugar a universos Little Rip, cuya singularidad ocurre a tiempo infinito; mientras que las soluciones que no presentan singularidad del tipo Big Bang dan lugar a universos regulares.

2.1 Evolución del universo bajo un fluido phantom

Como se ha mencionado previamente, los fluidos phantom poseen los problemas de las violaciones de SEC y NEC, la energía cinética negativa de sus campos es-

calares, ser estos últimos físicamente inestables, y que su evolución futura posee una singularidad denominada Big Rip (esta última se puede traducir literalmente como gran rasgadura). Para hacer más evidente este último punto se debe tomar en consideración las ecuaciones (1.4) y (1.6) para un espacio plano, sin constante cosmológica y con un universo dominado por un fluido barotrópico con índice barotrópico $\omega < -1$, lo que conduce al siguiente factor de escala

$$a(t) = \left(1 - \sqrt{\frac{3\rho_0}{4}} |1 + \omega| t \right)^{-2/|3(1+\omega)|}, \quad (2.1)$$

donde $a(t=0) = 1$ y $\rho(t=0) = \rho_0$. El factor de escala anterior posee una singularidad al tiempo

$$t_{BR} = \sqrt{\frac{4}{3\rho_0}} \frac{1}{|1 + \omega|}, \quad (2.2)$$

es decir, el factor de escala se vuelve infinito a un tiempo finito de su evolución cósmica.

El estudio de una evolución tardía del Universo bajo un fluido phantom está motivada en el hecho de que en un futuro, la contribución de la DM como componente material del Universo será despreciable con respecto a la DE, y considerando las mediciones que dan cuenta de una posible EoS phantom para la DE, hace necesario estudiar universos dominados por un fluido con $\omega < -1$, pero que no necesariamente estén dados por EoS barotrópicas estándar como la indicada en la ecuación (1.7) sino que, por ejemplo, GEoS de la forma

$$p(\rho) = -\rho - B\rho^\lambda, \quad (2.3)$$

donde B y λ son ambas constantes y $B > 0$. Note que $\omega = -1 - B\rho^{\lambda-1}$, es decir, se tiene un índice barotrópico evidentemente phantom, pero variable en el tiempo. Esta GEoS fue introducida por Barrow [65] con la finalidad de extender el rango de los diferentes comportamientos inflacionarios. El punto interesante es que, al igual que a tiempos tardíos se asume una dominación de la DE, ésta también se puede suponer como dominante a tiempos muy tempranos, donde no

se sabe la real composición del Universo. Si se analiza el parámetro de Hubble del modelo estándar (1.14), donde la DE es una constante durante toda la evolución cósmica, entonces claramente se observa la posible dominación que puede tener la DE a tiempos tempranos. Más aún, estudios teóricos como el llamado “running vacuum energy” en teoría cuántica de campos [66–68], dan lugar a constantes cosmológicas con una evolución dinámica durante la evolución cósmica, por lo que G_{EoS} como la indicada en la ecuación (2.3), podrían perfectamente representar el comportamiento de una componente material única a tiempos tempranos.

Considerando el contexto anterior, la ecuación (2.3) conduce, para un espacio plano y en el caso particular en que $\lambda = 1/2$ y $B > 0$, a un universo emergente, cuyo factor de escala cumple con $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \text{const.} > 0$, y por ende evita la singularidad inicial o Big Bang. Una variación a la ecuación (2.3) fue introducida por Mukherjee et al. [69] de la forma

$$p(\rho) = -A\rho - B\rho^{1/2}, \quad (2.4)$$

la cual para $A < 1$ y $B > 0$ da origen a un universo emergente en un espacio plano, cuyo factor de escala también evita la singularidad inicial, ya que $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \text{const.} > 0$. Por otro lado, la ecuación (1.4) puede ser integrada para universo con curvatura positiva ($k = 1$) y dominado sólo por un fluido dado por la G_{EoS} (2.4) en el caso particular en que $A = 1/3$, lo que conduce a un factor de escala de la forma

$$a(t) = \frac{2}{B\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{B\sqrt{3}}{2}t + \alpha\right) + \beta, \quad (2.5)$$

donde α y β son constantes de integración. Esta solución también evita la singularidad inicial ya que $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty$ y posee un valor mínimo del factor de escala a $t_{min} = -\frac{2\alpha}{B\sqrt{3}}$, donde $a(t_{min}) = \frac{2}{B\sqrt{3}} + \beta$. A este tipo de universo regular se le conoce como universo rebotante o “bouncing”.

Si bien la regularidad de estas tres soluciones fueron estudiadas en [52, 69] en el contexto de tiempos tempranos, el aspecto importante a destacar de estas

soluciones es que, además, son capaces de evitar la singularidad futura o Big Rip, presente en la ecuación (2.1), es decir, pueden representar universos tipo Little Rip. Así, el factor de escala de los tres universos derivados de las G_{EoS} anteriormente mencionadas cumplen con $a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, por lo que el factor de escala se vuelve infinito sólo a un futuro infinito [70–72]. Al igual que estas soluciones, muchas otras soluciones han sido estudiadas como universos regulares o como universos Little Rip, pero no como universos capaces de cumplir ambas características al mismo tiempo.

2.2 Condiciones de Little Rip al futuro y regularidad al pasado

A continuación, se obtendrán las condiciones que debe satisfacer el factor de escala $a(t)$, a fin de evitar la singularidad inicial o Big Bang y la singularidad a tiempos tardíos del tipo Big Rip. Para esto, primero se debe entender en detalle la evolución del factor de escala a partir de la prueba detallada en el Anexo II. Esta demuestra que cuando se considera un universo plano con sólo un fluido dominante, y una EoS con un índice barotrópico $\omega < -1/3$, entonces los únicos universos sin singularidades a tiempos tempranos son los del tipo emergente y rebotante.

Tanto el universo rebotante como el emergente necesitan un factor de escala que se comporte como una función convexa o estrictamente convexa. Esta condición es obtenida imponiendo un índice barotrópico que cumpla con $\omega < -1/3$ (ver ecuación (1.5)). La diferencia entre considerar las condiciones phantom ($\omega < -1$) y quintaesencia ($\omega < -1/3$), radica en la posibilidad de tener singularidades tipo Big Rip en el futuro. Por consiguiente, primero se considerarán resultados encontrados previamente que permiten determinar las condiciones para que una

solución sea Little Rip, para posteriormente analizar las condiciones que permiten evitar, además, singularidades pasadas y así poder unir ambas condiciones con la finalidad de obtener las condiciones generales que permiten universos que son regulares y Little Rip al mismo tiempo. Finalmente, se estudiará el comportamiento del índice barotrópico ω cuando $\rho = 0$ en los modelos rebotantes.

Las condiciones bajo las cuales la densidad de energía de la DE, con un índice barotrópico $\omega < -1$, es capaz de evitar una singularidad a tiempo finito, fueron discutidas en [73, 74]. En resumen, asumiendo que el factor de escala puede ser escrito de la forma

$$a(t) = e^{f(t)}, \quad (2.6)$$

entonces, la condición para que este factor de escala sea una función sin singularidades para todo tiempo t futuro, se puede traducir en una función sin singularidades $f(t)$ (a pesar de que esta última puede tender a $-\infty$, como se menciona rigurosamente en el Anexo II). Por ende, las condiciones $\omega < -1$ y $\rho > 0$ conducen a $d\rho/da > 0$, lo cual para $f(t)$ implica la siguiente restricción

$$\ddot{f} > 0. \quad (2.7)$$

Así, todos los modelos Little Rip con $\omega < -1$ son descritos por un factor de escala, cuya forma está dada por la ecuación (2.6), con una función sin singularidades f que satisface la ecuación (2.7). En [73], las condiciones consideran además el caso en que la densidad de energía como función del factor de escala $f(a)$ es especificado, pero en este caso, sólo se hacen necesarias las condiciones sobre el factor de escala.

Se debe recalcar que las condiciones para tener un universo Little Rip, sólo considera tiempos futuros o una etapa tardía de la evolución cósmica. Singularidades tempranas aparecen cuando el factor de escala cumple con $a(t_0) = 0$, $a \xrightarrow{t \rightarrow t_0} -\infty$, ó $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$, a algún tiempo específico t_0 . Considerando las singularidades tempranas y la convexidad del factor de escala, es posible modificar la

ecuación (2.6) mediante una constante no negativa, de tal forma que las condiciones para el Little Rip son incluidas en las condiciones generales para que un universo regular exista a todo tiempo t . En base a lo anterior, el factor de escala tomaría la forma

$$a(t) = \exp(g(t)) + s, \quad (2.8)$$

donde g es elegida como una función sin singularidades, al igual que f , para así evitar las singularidades del tipo $a \xrightarrow{t \rightarrow \pm t_0} \infty$ y $a(t_0) = 0$; y s es una función no negativa, para así evitar singularidades del tipo $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ y $g \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\infty$. Así, es necesario considerar $s > 0$, con la finalidad de obtener un universo con un tamaño mínimo. En los otros casos, donde la función $g(t)$ no converge a $-\infty$, no es necesario considerar la constante s y se permite tomar el valor particular de $s = 0$. Por lo tanto, la ecuación (2.8) representa un factor de escala que evita ambos tipos de singularidades: la singularidad inicial o Big Bang y la singularidad a tiempos tardíos o Big Rip.

Se torna necesario ahora estudiar como la condición $\omega < -1$ conduce a las condiciones correspondientes sobre g y s . Para esto, se consideran las ecuaciones (1.4–1.7), asumiendo un espacio plano y sin constante cosmológica. En el caso en que exista un punto t_0 tal que $p(t_0) = \rho(t_0) = 0$, entonces el valor de $\omega(t)$ a $t = t_0$, estará dado por el siguiente límite

$$\omega(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p(t)}{\rho(t)}. \quad (2.9)$$

En este sentido, usando la restricción $\omega < -1$ y la ecuación (1.6), se obtiene

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3\rho}{a}(\omega + 1) > 0, \quad \text{para } \rho \neq 0. \quad (2.10)$$

Ya que los únicos modelos posibles son los rebotantes o los emergentes, entonces de la ecuación (1.4) se puede ver que ρ alcanza el valor de 0 sólo al tiempo del rebote t_b , en el universo rebotante. En el caso del universo emergente, el factor de escala es una función que siempre crece. En este sentido, es posible reescribir

la ecuación (2.10), para el caso $\rho(t_b) = 0$, como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{da}(t_b) &= \lim_{t \rightarrow t_b} -\frac{3\rho(t)}{a(t)}(\omega(t) + 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_b} -\frac{3}{a(t)} \left[3 \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 \right] \left(\left[-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^2} \right] + 1 \right) = 6 \frac{\ddot{a}(t_b)}{a(t_b)^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En consecuencia, la condición $d\rho/da > 0$ debe ser cumplida a todos los tiempos, excepto para el universo rebotante si $\ddot{a}(t_b) = 0$. Por consiguiente, en este caso la desigualdad (2.10) se convierte en una igualdad al tiempo del bouncing $t = t_b$. Insertando la ecuación (2.8) en la ecuación (1.4), se puede ver que ρ puede ser expresado de la forma

$$\rho = 3(\dot{a}/a)^2 = 3 \left(\frac{\dot{g}e^g}{e^g + s} \right)^2. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, la condición $d\rho/da > 0$, entrega

$$\frac{d\rho}{da} = 6 \frac{[\dot{g}e^{2g} + \ddot{g}e^g s + \dot{g}^2 e^g s]}{(e^g + s)^3} > 0, \quad (2.13)$$

y finalmente, de las ecuaciones (2.10) y (2.13), se tiene que $\omega < -1$ si y sólo si

$$e^g \ddot{g} + \dot{g} s + \dot{g}^2 s > 0, \quad (2.14)$$

a todos los tiempos, excepto al tiempo t_b en el universo rebotante si $\ddot{a}(t_b) = 0$, caso en el cual la desigualdad se vuelve una igualdad al tiempo del rebote $t = t_b$.

Es necesario notar que las funciones $a(t)$ en las ecuaciones (2.6) y (2.8) son muy similares, salvo por la constante s . Por lo tanto, si $s = 0$, las condiciones para un universo Little Rip y para el universo sin singularidades pasadas, son las mismas que las indicadas en la ecuación (2.14) para $s = 0$. De hecho, este es el caso de la mayoría de las situaciones consideradas.

En resumen, las condiciones para un universo regular a todo tiempo finito con $s = 0$, son

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) > 0, & t \neq t_b, \\ \ddot{g}(t) \geq 0, & t = t_b. \end{cases} \quad (2.15)$$

En el otro caso, cuando la constante $s > 0$, las condiciones para tener un universo regular a todo tiempo finito son

$$\begin{cases} G(t) > 0, & t \neq t_b, \\ G(t) \geq 0, & t = t_b, \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $G(t) = e^{g(t)}\ddot{g}(t) + \ddot{g}(t)s + \dot{g}(t)^2s$. La relación entre la función f en la ecuación (2.6) y la función g con la constante s de la ecuación (2.8), es

$$g(t) = \ln(\exp(f(t)) - s). \quad (2.17)$$

Para finalizar, se analizará en detalle qué pasa con el índice barotrópico ω cuando $\rho = 0$. Para este propósito, vamos a suponer que tenemos un universo rebotante dominado por un fluido phantom con $\omega(t) < -1$. Más aún, asumamos que al tiempo del rebote, $t = t_b$, se cumple la relación $p(t_b) \neq 0$. Entonces, usando la ecuación (1.7) se obtiene que $\omega(t_b) = -\infty$. Ahora si $P(t_b) = 0$, entonces $\ddot{a}(t_b) = 0$. Además, de las ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.7), resulta que $\omega(t)$ está dado por

$$\omega(t) = \lim_{s \rightarrow t} -\frac{2}{3} \frac{a(s)\ddot{a}(s)}{\dot{a}(s)^2} - \frac{1}{3}. \quad (2.18)$$

Para conocer el valor de $\omega(t_b)$, vamos se utiliza una propiedad detallada en el Anexo II, la cual implica que si f es una función analítica en t_0 , tal que $f(t_0) = \dot{f}(t_0) = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right| = \infty$. Considerando esta propiedad tanto en \ddot{a} como f y usando $\ddot{a} \geq 0$ en la ecuación (2.18), se llega a la conclusión de que el comportamiento de ω en t_b , está dado por

$$\omega(t_b) = -\infty. \quad (2.19)$$

Este resultado no sólo nos dice que pasa con el índice barotrópico al tiempo del rebote, si no que también si el factor de escala representa un universo rebotante o emergente. Este último se debe a que cuando el factor de escala representa un universo emergente, entonces el índice barotrópico es una función regular. Por lo tanto, si al tiempo del rebote se cumple con $\omega(t_b) = -\infty$, entonces el modelo es ciertamente un universo rebotante.

2.3 Soluciones regulares a partir de G_{EoS}

En esta sección se considerarán modelos obtenidos para universos dominados por un sólo fluido de tipo exótico, que ya han sido estudiados anteriormente como universos emergentes o Little Rip, pero no como soluciones capaces de evitar ambas singularidades al mismo tiempo. Todas las soluciones derivadas de una G_{EoS} se obtienen de la integración directa de la ecuación (1.4), tomando en consideración la ecuación (1.6) y las condiciones iniciales $a(t_0) = a_0$ y $\rho(t_0) = \rho_0$.

i) Modelo I: En este modelo, se restringe la G_{EoS} del fluido al caso dado por la ecuación (2.3), en el caso particular $\lambda = 1/2$, es decir

$$p(\rho) = -\rho - B\rho^{1/2}. \quad (2.20)$$

Como se ha mencionado anteriormente, la solución derivada de esta G_{EoS} con $B > 0$ fue encontrada en [65], y fue analizada en [52] como una solución regular a tiempos tempranos. El comportamiento a tiempos tardíos de esta G_{EoS}, conduce a un factor de escala como función del tiempo cósmico, dado por la expresión

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \frac{2\rho_0^{1/2}}{3B} \left[\exp \left(\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right) - 1 \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Es necesario destacar que, el comportamiento doble exponencial de esta solución fue encontrado previamente para una fuente de viscosidad de bulto, en presencia de una constante cosmológica efectiva [75]. En esta solución, el comportamiento asintótico del factor de escala es $a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ y $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} a_0 \exp \left(-\frac{2\rho_0^{1/2}}{3B} \right)$.

Se demostrará que esta solución cumple con ser regular del tipo emergente y Little Rip. Considerando el hecho de que el factor de escala tiene un valor mínimo $a_{min} = a_0 \exp \left(-\frac{2\rho_0^{1/2}}{3B} \right) > 0$, es posible utilizar la ecuación (2.8) con $s = 0$. En tal caso, la función $g(t)$ es igual a la función $f(t)$, y puede ser representada por

$$g(t) = \frac{2\rho_0^{1/2}}{3B} \exp \left(\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right) + \ln(a_0) - \frac{2\rho_0^{1/2}}{3B}, \quad (2.22)$$

cuya segunda derivada con respecto al tiempo cósmico es

$$\ddot{g}(t) = \frac{B\rho_0^{1/2}}{2} \exp\left(\frac{B\sqrt{3}}{2}(t-t_0)\right), \quad (2.23)$$

de donde se observa que $\ddot{g} > 0$. Por lo tanto, usando la ecuación (2.15), se concluye que esta solución representa un universo regular y Little Rip. Este universo está dominado por un fluido phantom y es del tipo emergente, lo cual se deduce del comportamiento del índice barotrópico $\omega(t)$. Insertando la ecuación (2.21) en la ecuación (2.18), se obtiene

$$\omega(t) = -1 - \frac{B \exp\left[-\frac{1}{2}B\sqrt{3}(t-t_0)\right]}{\rho_0^{1/2}}. \quad (2.24)$$

La expresión anterior nos muestra que $\omega(t) < -1$ para todo tiempo finito, y que el factor de escala representa un universo emergente, ya que ω es una función regular. Como se observa en la figura 2.1, el índice barotrópico posee un comportamiento phantom durante toda la evolución cósmica y representa una expansión del tipo de Sitter a un tiempo futuro infinito.

ii) Modelo II: Como se mencionó anteriormente, Mukherjee et al. [69] tomó una ecuación de estado dada por ecuación (2.4), y encontró para $A > -1$ y $B > 0$ un factor de escala de la forma

$$a(t) = a_i (\beta + e^{\alpha t})^\gamma, \quad (2.25)$$

donde a_i y β son constantes positivas, $\alpha = B\sqrt{3}/2 > 0$, y $\gamma = 2/3(A+1)$. En esta solución, el comportamiento asintótico del factor de escala es $a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ y $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} a_i \beta^\gamma$.

Se demostrará que esta solución cumple con ser regular del tipo emergente y Little Rip. Considerando el hecho de que $a_{min} = a_i \beta^\gamma > 0$, nuevamente podemos usar la ecuación (2.8) con $s = 0$. Por ende, la función $g(t)$ (que nuevamente es igual a $f(t)$), es

$$g(t) = \ln(a_i) + \gamma \ln(\beta + e^{\alpha t}), \quad (2.26)$$

y donde $\ddot{g}(t)$ toma la forma

$$\ddot{g}(t) = \frac{\gamma\beta\alpha^2 e^{\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2}, \quad (2.27)$$

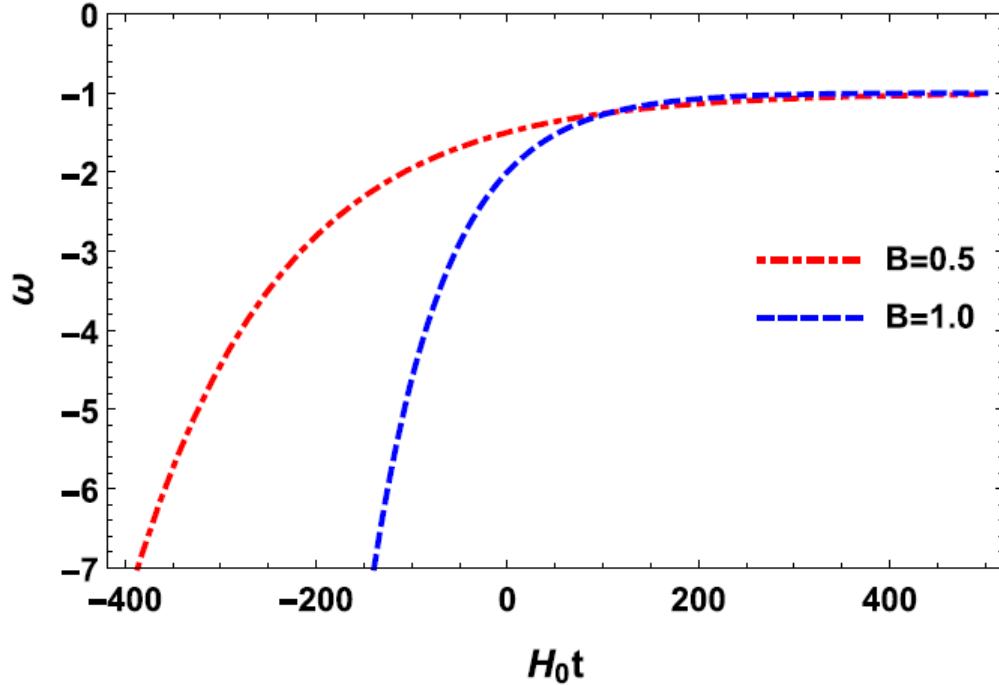


Figura 2.1: Gráfico del índice barotrópico (2.24) en función de $H_0 t$. Ambas curvas son para $\rho_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.

la cual cumple con la condición $\ddot{g} > 0$. Por lo tanto, de la ecuación (2.15) se concluye que esta solución representa un universo regular y Little Rip. Este universo es del tipo emergente y está dominado por un fluido phantom. Este hecho puede ser demostrado usando la ecuación (2.25) y la ecuación (2.18), lo cual conduce a

$$\omega(t) = -1 - \frac{2\beta e^{-\alpha t}}{3\gamma}, \quad (2.28)$$

expresión que nos indica que $\omega(t) < -1$ para todo tiempo t , y que el factor de escala representa un universo emergente al ser $\omega(t)$ una función regular. Como

se observa de la figura 2.2, el índice barotrópico es phantom durante toda la evolución cósmica y representa una expansión de Sitter a tiempos tardíos.

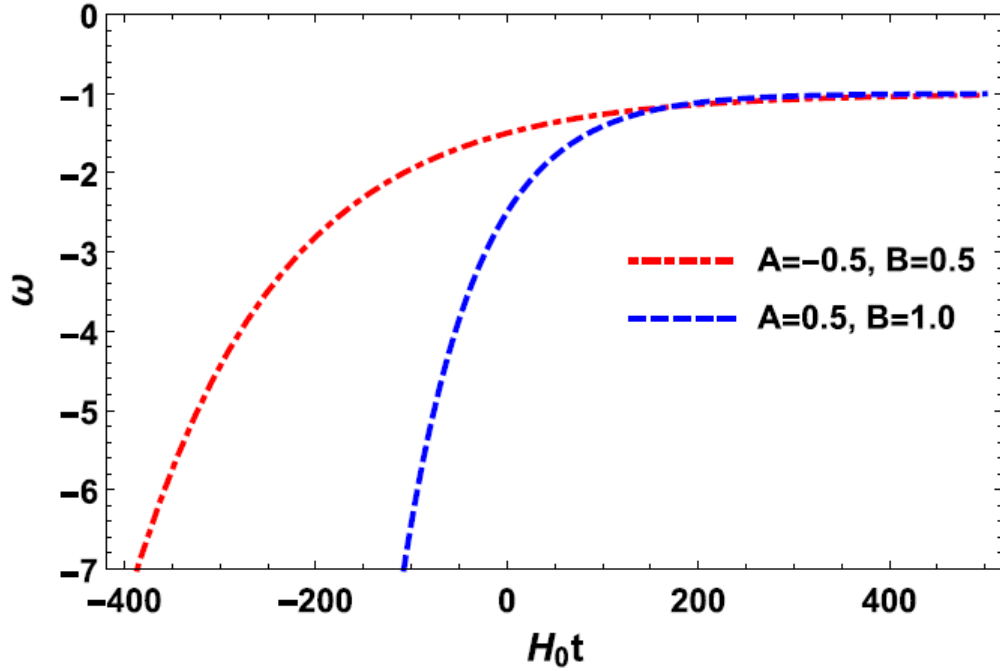


Figura 2.2: Gráfico del índice barotrópico (2.28) en función de H_0t . Ambas curvas son para $\beta = 1$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.

iii) Modelo III: Una GEqS para un fluido no perfecto de la forma

$$p(\rho) = -\rho - f(\rho) - \xi(H), \quad (2.29)$$

fue introducida en [76, 77]. La función $f(\rho)$ es arbitraria y $\xi(H)$ es, en general, una función del parámetro de Hubble que se relaciona con la presión efectiva de un fluido con viscosidad. En el caso más simple donde $\xi(H) = \xi = \text{const.}$ y considerando $f(\rho) = B\rho^{1/2}$, la GEqS dada por la ecuación (2.29) toma la forma

$$P(\rho) = -\rho - B\rho^{1/2} - \xi. \quad (2.30)$$

Para un universo plano, una solución exacta para la G_{EoS} (2.30) fue encontrada en [76], en término de la densidad de energía como función del tiempo. Usando esta expresión, es relativamente directo ver que sólo a un tiempo infinito, la densidad de energía se vuelve infinita, lo cual corresponde a un universo Little Rip, bajo condiciones de viscosidad. Como estamos interesados en explorar el comportamiento de esta solución en mayor detalle, se integrarán las ecuaciones de Friedmann, con la finalidad de encontrar una forma explícita para el factor de escala en función del tiempo cósmico. Usando la ecuación (2.30) en la ecuación (1.6), se obtiene

$$a(\rho) = a_0 \left(\frac{B\rho_0^{1/2} + \xi}{B\rho^{1/2} + \xi} \right)^{\frac{2\xi}{3B^2}} \exp \left[\frac{2}{3B} \left(\rho^{1/2} - \rho_0^{1/2} \right) \right], \quad (2.31)$$

expresión con la cual, a partir de las ecuación (1.4), (1.6) y (2.30), es posible obtener la densidad de energía como función del tiempo, dada por la expresión

$$\rho(t)^{1/2} = \frac{\exp \left[\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right] \eta - \xi}{B}, \quad (2.32)$$

donde $\eta = B\rho_0^{1/2} + \xi$. Finalmente, a partir de las ecuaciones (2.31) y (2.32), se obtiene el factor de escala como función del tiempo cósmico

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \frac{2}{3B^2} \left[\exp \left(\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right) \eta - \eta \right] - \frac{\xi\sqrt{3}}{3B}(t - t_0) \right\}. \quad (2.33)$$

En esta solución, el comportamiento asintótico del factor de escala es $a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ y $a \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \infty$.

Se demostrará que esta solución cumple con ser regular del tipo rebotante y Little Rip. En esta solución, el menor valor del factor de escala es $a_{min} = a_0 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^{-\frac{2\xi}{3B^2}} \exp \left(-\frac{2\rho_0^{1/2}}{3B} \right)$ y se obtiene al valor particular $t_b = t_0 + \frac{2}{B\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\xi}{\eta} \right)$. Por ende, usando la ecuación (2.8) con $s = 0$, se obtiene

$$g(t) = \ln(a_0) - \frac{\xi\sqrt{3}}{3B}(t - t_0) + \frac{2\eta}{3B^2} \left[\exp \left(\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right) - 1 \right], \quad (2.34)$$

con $\ddot{g}(t)$ dado por la expresión

$$\ddot{g}(t) = \frac{\eta}{2} \exp \left[\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right], \quad (2.35)$$

donde es evidente la condición $\ddot{g} > 0$. Por lo tanto, usando la ecuación (2.15), se demuestra que el factor de escala estudiado es un universo Little Rip, regular del tipo rebotante y dominado por un fluido phantom. Debido a las últimas dos características, es posible utilizar el criterio detallado en el Anexo II para establecer que un universo es rebotante. Usando la Eq. (2.33) en la ecuación (2.18), es posible obtener el índice barotrópico $\omega(t)$, y toma la forma

$$\omega(t) = -1 - \frac{B^2 \exp \left[\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right]}{\left(\eta \exp \left[\frac{B\sqrt{3}}{2}(t - t_0) \right] - \xi \right)^2}, \quad (2.36)$$

expresión que deja en evidencia que $\omega < -1$ para todo tiempo t y que el factor de escala representa un universo rebotante, considerando el hecho de que $\omega(t_b) = -\infty$. Como se observa de la figura 2.3, el índice barotrópico es phantom durante toda la evolución cósmica y representa una expansión de Sitter a tiempos tardíos.

iv) Modelo IV: Un factor de escala, dado como Ansatz, que experimenta un comportamiento exponencial fue estudiado en [78], cuya forma exacta está dada por la expresión

$$a(t) = a_0 e^{\alpha(t-t_0)^{2n}}, \quad (2.37)$$

donde a_0 y α son constantes positivas. Si n es un número natural distinto de cero, entonces la solución representa un universo rebotante; mientras que si $n < 1/2$ ó n es un número no natural positivo, la solución representa un universo con una singularidad a un tiempo finito t_0 , o un universo emergente, con $a = 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Se demostrará que esta solución cumple con ser regular, centrándonos en su comportamiento como universo rebotante y Little Rip. El tiempo al cual el factor de

escala realiza el rebote es $t_b = t_0$, tiempo al cual el factor de escala toma el valor mínimo de $a_{min} = a_0$. Por ende, usando la ecuación (2.8) con $s = 0$, la función g , que nuevamente coincide con f , está dada por

$$g(t) = \ln(a_0) + \alpha(t - t_0)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.38)$$

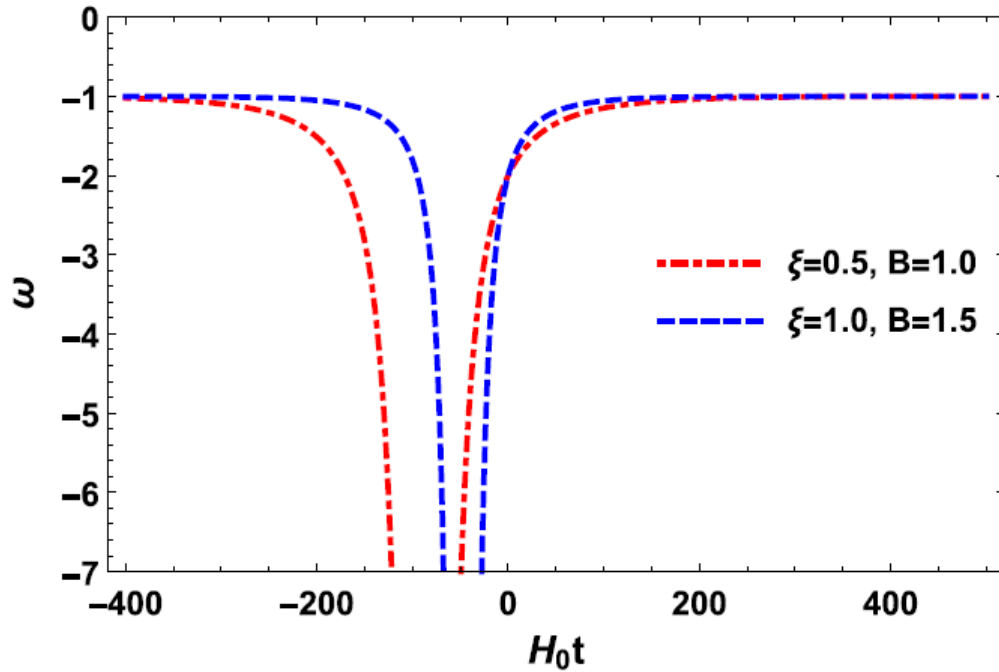


Figura 2.3: Gráfico del índice barotrópico (2.36) en función de $H_0 t$. Ambas curvas son para $\rho_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.

cuya regularidad y la de sus derivadas proviene del hecho que $n \in \mathbb{N}$. Así, la segunda derivada de la función g con respecto al tiempo cósmico es

$$\ddot{g}(t) = \alpha 2n(2n - 1)(t - t_0)^{2(n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.39)$$

La expresión anterior cumple con que $\ddot{g} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$. Por ende, efectivamente la solución estudiada es un universo regular y Little Rip. Si bien, ya

se mencionó que el universo es del tipo rebotante, se usará el criterio establecido para demostrarlo, junto con que el fluido derivado de la solución es del tipo phantom. Usando la ecuación (2.37) en la ecuación (2.18), se concluye que

$$\omega(t) = -1 - \frac{(2n - 1)}{3n\alpha(t - t_0)^{2n}}, \quad (2.40)$$

la cual cumple con $\omega(t) < -1$ para todo tiempo t , y efectivamente es un universo rebotante, ya que $\omega(t_0) = -\infty$. Como se observa en la figura 2.4, el índice barotrópico de la GEqS asociada a la solución es phantom durante toda la evolución cósmica y representa una expansión de Sitter a tiempos tardíos.

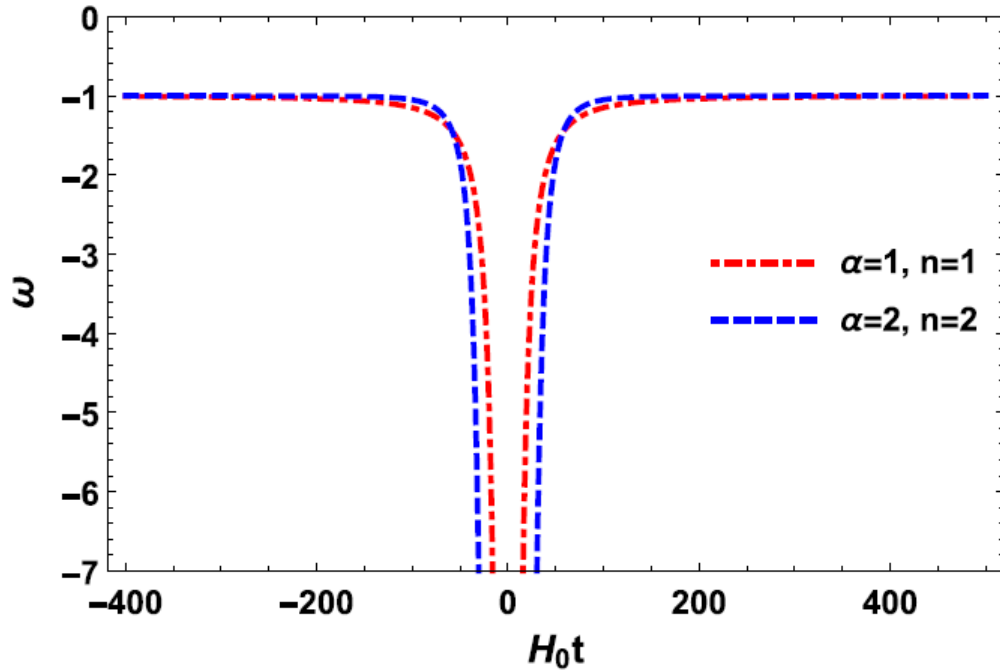


Figura 2.4: Gráfico del índice barotrópico (2.40), asociado a la factor de escala (2.37), en función de H_0t . Ambas curvas son para $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.

v) Modelo V: Un comportamiento del tipo ley de potencia para el factor de

escala, dado como Ansatz, fue también estudiado en [78], el cual toma la forma

$$a(t) = a_0 + \alpha(t - t_0)^{2n}, \quad (2.41)$$

donde a_0 y α son constantes positivas, y n es un número natural positivo.

Se demostrará que esta solución cumple con ser regular y Little Rip. Esta solución tiene la característica que el menor valor que toma el factor de escala es $a_{min} = a_0$, y se obtiene al valor particular $t_b = t_0$. Por ende, usando la ecuación (2.8) en el caso particular $s = 0$, la función g obtenida es

$$g(t) = \ln(a_0 + \alpha(t - t_0)^{2n}), \quad (2.42)$$

expresión que conduce a

$$\ddot{g}(t) = \frac{2\alpha(t - t_0)^{2n-1}[a_0(2n - 1) - \alpha(t - t_0)^{2n}]}{[a_0 + \alpha(t - t_0)^{2n}]^2}. \quad (2.43)$$

En este caso, el signo de la función \ddot{g} no es inmediato. Esto se debe al hecho de que el dominio donde $\omega < -1$ depende directamente de los parámetros libres a_0 y α . Para corroborar este análisis, se estudiará la posibilidad de una GEoS asociada a la solución del tipo phantom. Usando la ecuación (2.41) en la ecuación (2.18), se obtiene

$$\omega(t) = -1 - \frac{a_0(2n - 1) - \alpha(t - t_0)^{2n}}{3\alpha n(t - t_0)^{2n}}, \quad (2.44)$$

expresión que cumple con la característica $\omega(t) < -1$ sólo en el intervalo $t \in (t_0 - t_s, t_0 + t_s)$, donde $t_s = [(2n - 1)a_0/\alpha]^{1/2n}$. Por lo tanto, $\ddot{g} > 0$ sólo si t pertenece al intervalo anteriormente señalado, lo cual implica que el universo estudiado cumple con ser emergente y Little Rip. Además, el universo es de tipo rebotante, ya que $\omega(t_0) = -\infty$. Como se observa de la figura (2.5), la evolución del índice barotrópico no es siempre phantom, incluso pudiendo ser a tiempos tempranos y tardíos del tipo quintaesencia, en base a esto, la expansión tipo de Sitter a tiempos tardíos depende de los parámetros libres asociados al factor de escala.

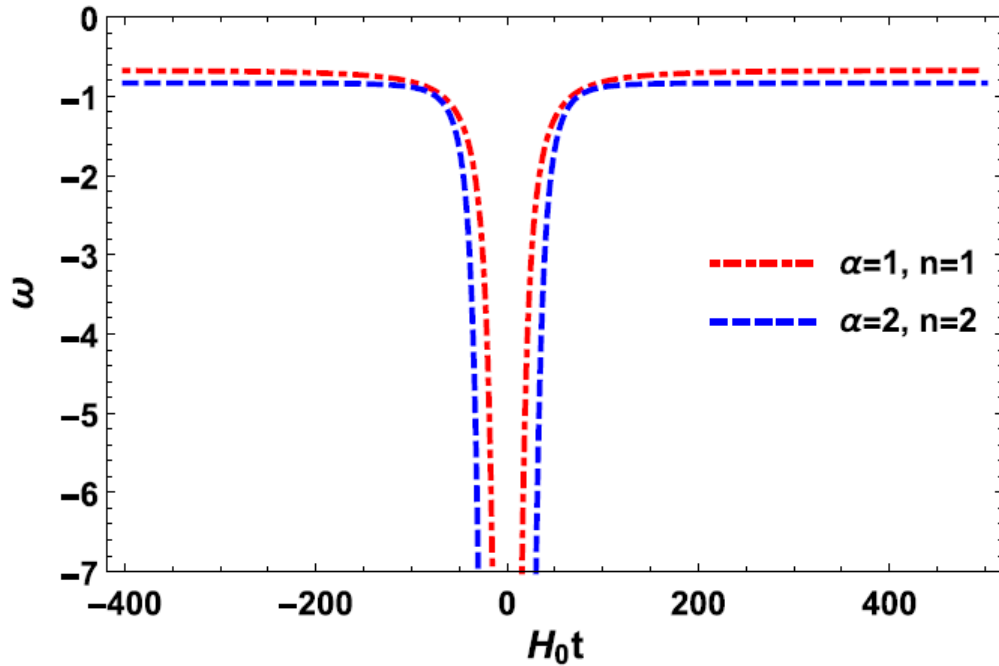


Figura 2.5: Gráfico del índice barotrópico (2.44), asociado al factor de escala (2.41), en función de $H_0 t$. Ambas curvas son para $a_0 = 1$ y $t_0 = 0$. Los valores de los parámetros libres han sido elegidos sólo para exponer claramente el comportamiento de la función.

En la figura 2.6 se representa gráficamente el comportamiento de los cinco factores de escala estudiados como universos que cumplen con ser regulares, del tipo rebotante o emergente, y Little Rip.

2.4 Ajuste de los modelos regulares con SNe Ia

En esta sección se discutirán los resultados derivados de ajustar los parámetros libres de los modelos I, II y III, estudiados anteriormente, con los datos de SNe Ia del catálogo JLA. No se ajustaran los modelos IV y V, debido a que los factores de escala son escogidos a mano y, por ende, no tienen asociado física relevante, como una G_{EoS} que los origine, a pesar de que posteriormente se les puede

asociar una mediante la ecuación (2.18). Más aún, estos dos últimos modelos sólo han sido considerados como pruebas explícitas de las condiciones estudiadas en este capítulo y no como universos válidos bajo las condiciones estudiadas.

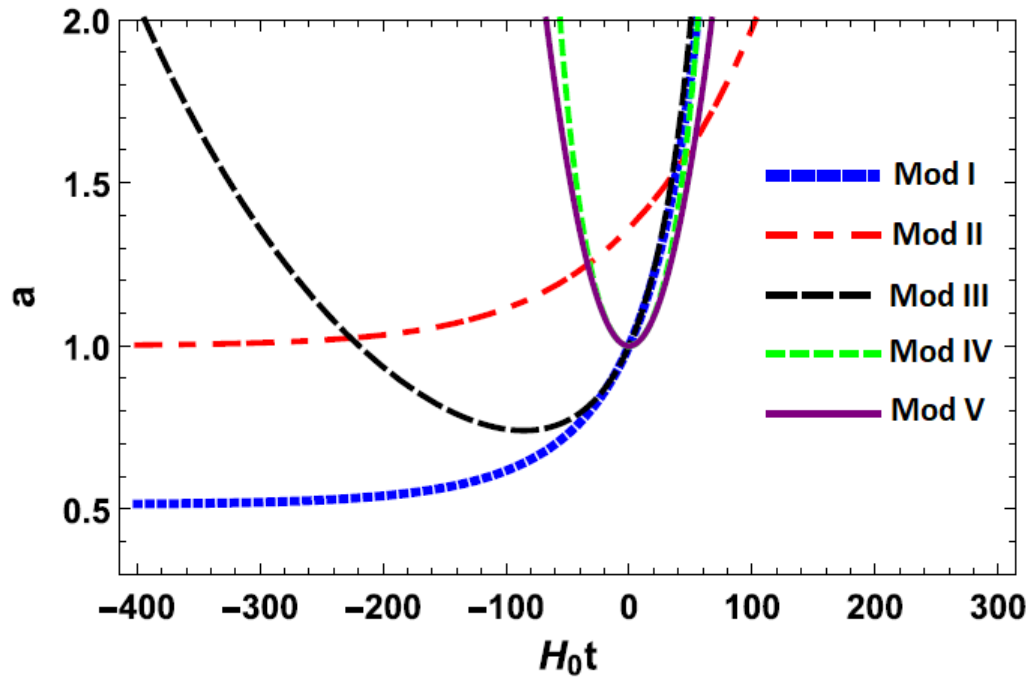


Figura 2.6: Gráfico del factor de escala en función de $H_0 t$, de los cinco modelos estudiados como universos que cumplen con ser regulares al pasado y Little Rip hacia el futuro. Las condiciones de los gráficos han sido establecidas sólo para poder exponer claramente la regularidad tanto al pasado, como al futuro de la solución.

Es necesario hacer énfasis en que el correspondiente factor de escala para cada modelo sólo es válido cuando la densidad de DM puede ser despreciada en comparación con la densidad de DE. Como los datos de SNe la son obtenidos en una época donde claramente esta condición no se cumple, entonces para realizar el ajuste, no es posible utilizar directamente los factores de escala de cada modelo. Por lo tanto, para el ajuste se utilizan las ecuaciones (1.4) y (1.22)

añadiendo el componente de materia usual, así

$$E(z, \vec{p}) = \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \frac{\rho_{DE}}{3H_0^2}}, \quad (2.45)$$

donde $\rho_{DE}/3H_0^2$ es la componente de DE. Esta puede ser encontrada a partir de la ecuación de conservación (1.6), la cual puede ser reescrita teniendo en cuenta la ecuación (1.12), donde sin pérdida de generalidad se asume $a_0 = 1$, de la forma

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{3}{(1+z)} (\rho + p) = 0, \quad (2.46)$$

y depende de cada modelo, como sigue:

i) Para el modelo I, se considerará la GEqS (2.20), con la finalidad de resolver la ecuación diferencial de primer orden (2.46), lo que conduce a la siguiente ecuación

$$\rho(z) = \left[\rho_0^{1/2} - \frac{3B}{2} \ln(1+z) \right]^2, \quad (2.47)$$

expresión con la cual, considerando que $\rho(z) = \rho_{DE}(z)$, podemos definir la componente de DE de este modelo para la ecuación (2.45), por

$$\frac{\rho_{DE}(z)}{3H_0^2} = \left[(1 - \Omega_m)^{1/2} - \hat{B} \ln(1+z) \right]^2, \quad (2.48)$$

donde se ha introducido las constantes adimensionales

$$\hat{B} = \frac{\sqrt{3}B}{2H_0} \quad \text{y} \quad \Omega_{DE} = \frac{\rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.49)$$

En la ecuación (2.48) se ha utilizado la relación $\Omega_m + \Omega_{DE} = 1$. Por lo tanto, el vector de parámetros de este modelo es $\vec{p} = (\Omega_m, \hat{B})$, para los cuales se utilizan los prior: $0 < \Omega_m < 1$ y $0 < \hat{B} < 1$.

ii) En el modelo II, la expresión para la densidad de energía, usando la GEqS (2.4) con $A > -1$ y $B > 0$, está dada por

$$\rho(z) = \frac{1}{(1+A)^2} \left\{ \left[(1+A) \rho_0^{1/2} - B \right] (1+z)^{3(1+A)/2} + B \right\}^2. \quad (2.50)$$

Por ende, la componente de DE de la ecuación (2.45) es

$$\frac{\rho_{DE}(z)}{3H_0^2} = \frac{1}{(1+A)^2} \left\{ \left[(1+A)(1-\Omega_m)^{1/2} - \hat{B} \right] (1+z)^{3(1+A)/2} + \hat{B} \right\}^2, \quad (2.51)$$

donde se ha definido las constantes adimensionales (observe de antemano que A ya es una constante sin dimension)

$$\hat{B} = \frac{B}{\sqrt{3}H_0} \text{ y } \Omega_{DE} = \frac{\rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.52)$$

Nuevamente se considera la relación $\Omega_m + \Omega_{DE} = 1$, esta vez en la ecuación (2.51), por ende, el vector de parámetros de este modelo es $\vec{p} = (\Omega_m, A, \hat{B})$, para el cual se utilizan los prior: $0 < \Omega_m < 1$, $-1 < A < 1$ y $0 < \hat{B} < 1$.

iii) Para el modelo III, no es posible obtener una expresión analítica de la densidad de energía como función del corrimiento al rojo. Esto se debe a que la ecuación (2.31) no es una función inyectiva. Así, en este caso y por simplicidad, se hará uso de las ecuaciones (2.32) y (2.33), con la finalidad de obtener numéricamente la densidad de energía ρ como función de a y, consecuentemente, como función de z . Como condiciones iniciales se usará $t_0 = 0$, $a(t = 0) = 1$, y se definen las siguientes constantes adimensionales

$$\hat{B} = \frac{\sqrt{3}B}{H_0}, \quad \hat{\xi} = \frac{\xi}{H_0^2} \text{ y } \Omega_{DE} = \frac{\rho_0}{3H_0^2}. \quad (2.53)$$

Nuevamente se debe tener en consideración que $\Omega_m + \Omega_{DE} = 1$, por lo que el vector de parámetros de este modelo es $\vec{p} = (\Omega_m, \hat{B}, \hat{\xi})$, para el cual se consideran los siguientes prior: $0 < \Omega_m < 1$, $0 < \hat{B} < 1$ and $0 < \hat{\xi} < 1$. Es importante mencionar que, para ciertos valores de los parámetros libres Ω_m , \hat{B} and $\hat{\xi}$, el rebote de la solución puede ocurrir cercano a $z = 0$, es decir, al tiempo presente. Por lo tanto, es necesario imponer el requerimiento físico de que el rebote ocurra, al menos, a $z > 1.4$. Esta condición elimina la no inyectividad de la solución a los corrimientos al rojo que están presentes en el catálogo de JLA.

Los valores que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 2.1. En las figuras 2.7-2.9 se representan las

regiones creíbles de los modelos I, II y III, para combinaciones de sus respectivos vectores de parámetros \vec{p} y \vec{p}_J .

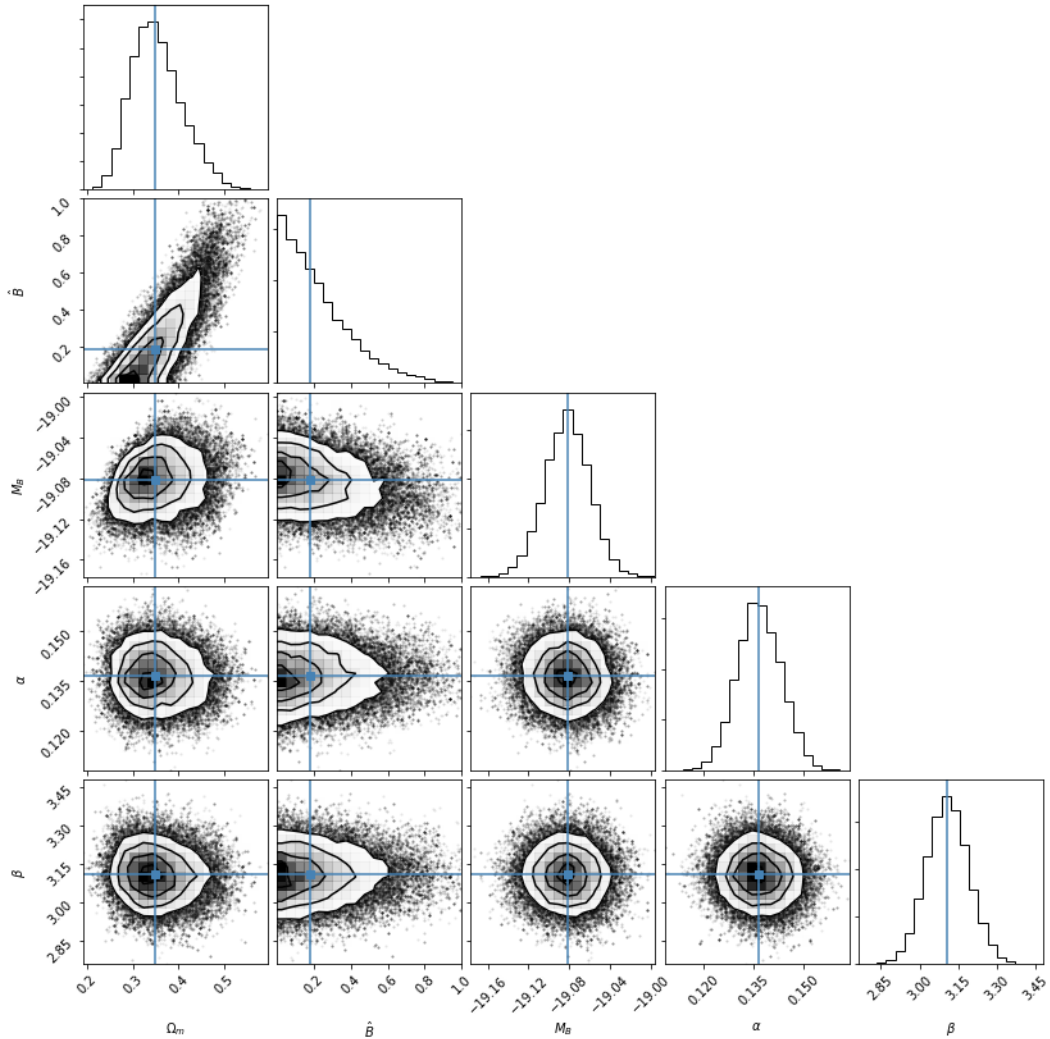


Figura 2.7: Restricción conjunta y marginada de Ω_m y \hat{B} para el modelo I, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la [Tabla 2.1](#).

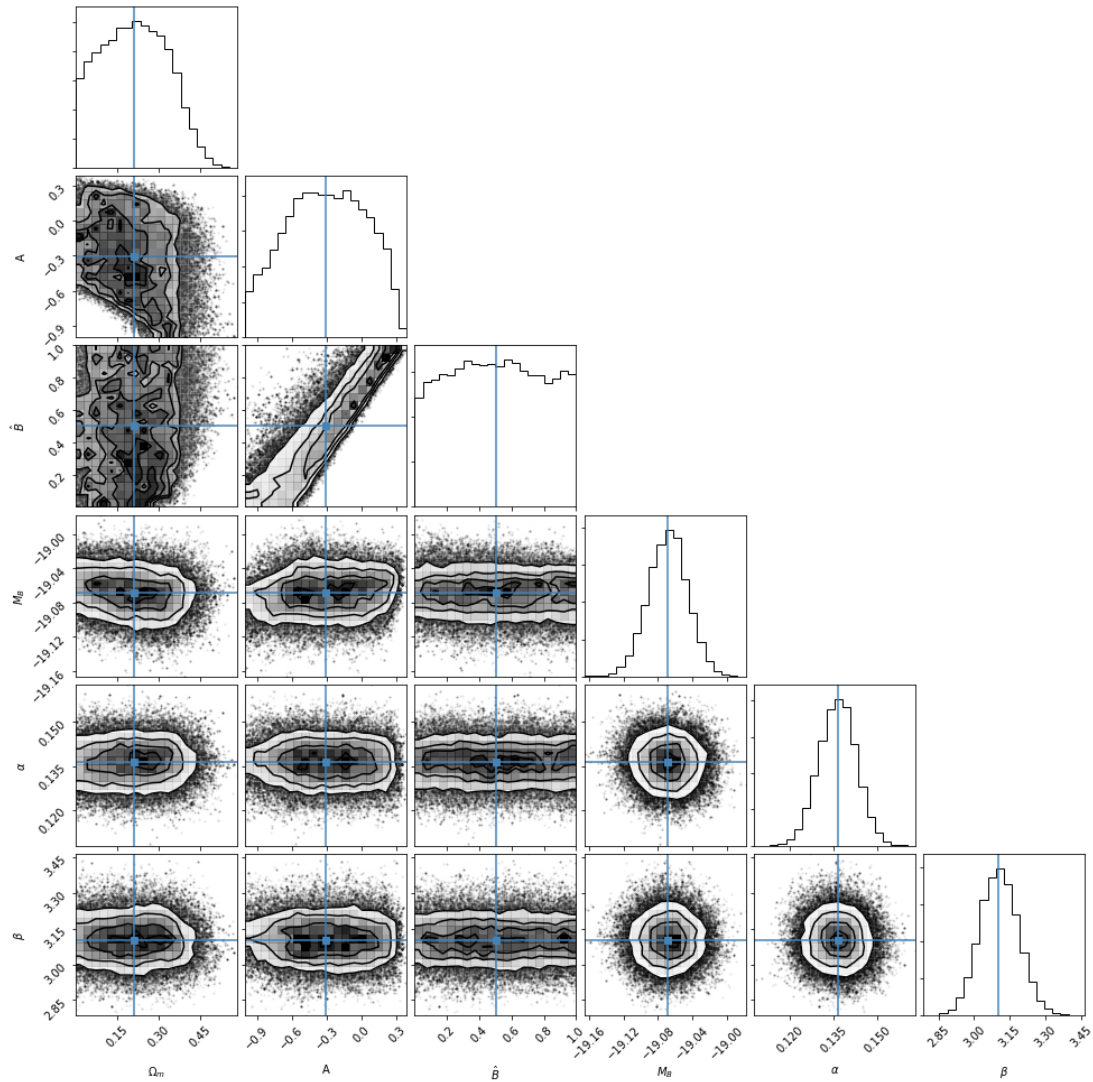


Figura 2.8: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , A y \hat{B} para el modelo II, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 2.1.

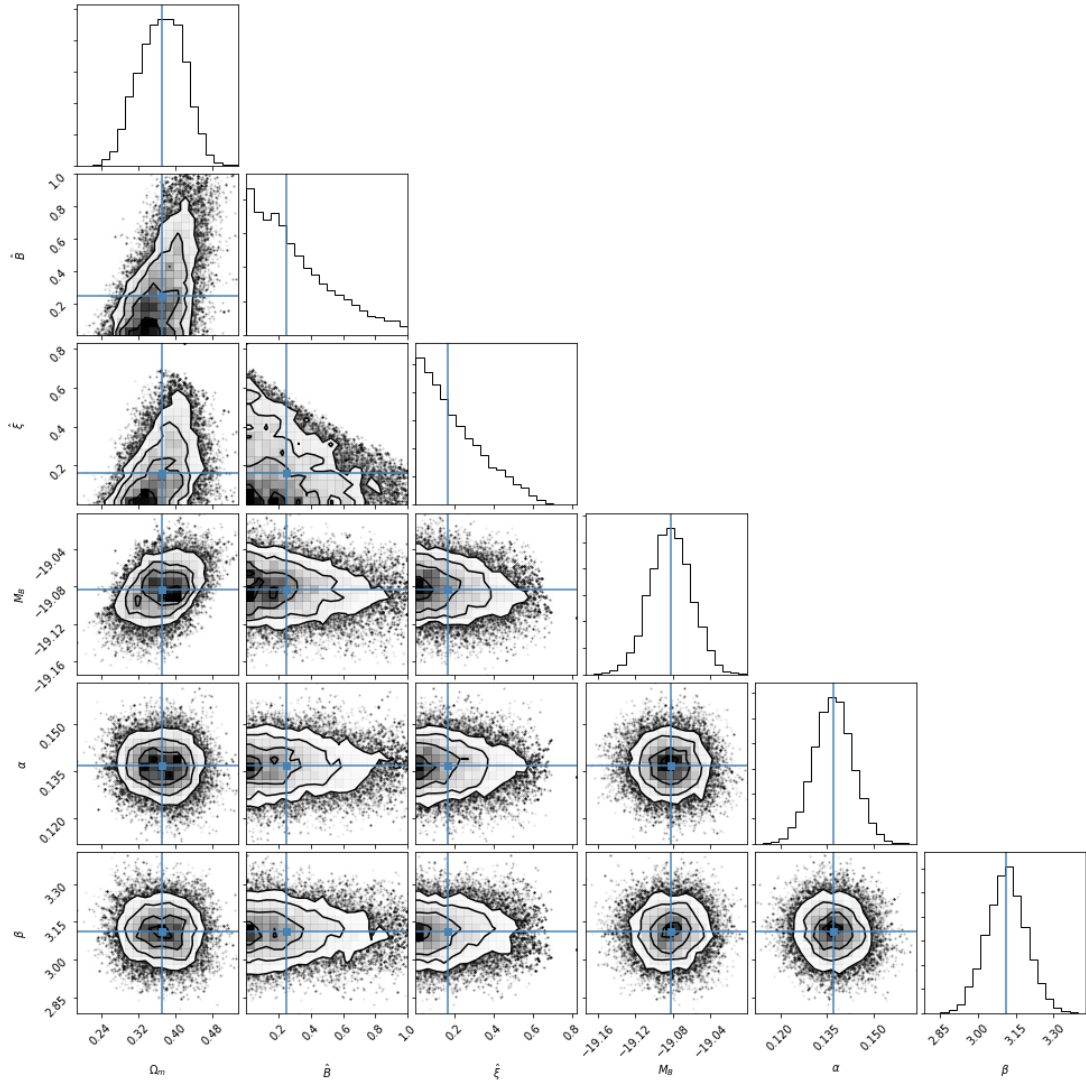


Figura 2.9: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , \hat{B} y $\hat{\xi}$ para el modelo III, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la [Tabla 2.1](#).

Modelo	Valores de mejor ajuste				Bondad de ajuste		
	Ω_m	A	\hat{B}	$\hat{\xi}$	χ^2_{min}	AIC	BIC
Λ CDM	0.29 ± 0.03	-	-	-	692.1	700.1	718.5
I	$0.35^{+0.06}_{-0.05}$	-	$0.18^{+0.23}_{-0.13}$	-	693.1	703.1	726.1
II	0.21 ± 0.13	$-0.31^{+0.36}_{-0.37}$	0.50 ± 0.33	-	692.1	704.1	731.7
III	0.37 ± 0.05	-	$0.25^{+0.32}_{-0.18}$	$0.17^{+0.20}_{-0.12}$	693.8	705.8	733.4

Tabla 2.1: Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al modelo cosmológico estándar Λ CDM; mientras que la segunda, tercera y cuarta fila corresponden a los valores de mejor ajuste de los modelos I, II y III, estudiados como soluciones regulares y Little Rip. Los parámetros de la curva de la luz para los modelos Λ CDM, I y III son: $M_B = -19.08 \pm 0.02$, $\alpha = 0.14 \pm 0.01$ y $\beta = 3.11 \pm 0.08$; mientras que para el modelo II son: $M_B = -19.07 \pm 0.02$, $\alpha = 0.14 \pm 0.01$ y $\beta = 3.10 \pm 0.08$.

Como se observa en la Tabla 2.1, el modelo Λ CDM en conjunto con los tres modelos ajustados en esta sección, exhiben un parámetro de bondad de ajuste muy similar, en cuanto al valor de χ^2_{min} se refiere. Además, el modelo II tiene exactamente el mismo valor de χ^2_{min} que el obtenido para el modelo estándar de la cosmología, mientras que el de los modelos I y III difieren en tan sólo 1 y 1.7 puntos, respectivamente. Aún así, el AIC nos indica que, estadísticamente, el modelo Λ CDM es el más favorecido por las observaciones, debido a que tiene el menor valor de AIC. Más aún, la diferencia en AIC entre el modelo estándar y el modelo II es de 4 puntos, es decir, si bien ambos modelos ajustan de igual forma a los datos observacionales de SNe Ia, Λ CDM sigue siendo el mejor modelo a nivel estadístico, debido principalmente a que sólo necesita de un parámetro libre para

poder ajustar los datos. El BIC permite ver este hecho mucho más claramente. Nuevamente, el modelo con menor valor de BIC es el Modelo Estándar de la Cosmología, seguido de la primera solución (principalmente porque sólo considera un parámetro libre más que Λ CDM), cuyos valores de BIC difieren en 7.6 puntos. Así, se tiene evidencia fuerte de que Λ CDM es mucho mejor modelo que el modelo II.

Un aspecto importante a destacar es que las tres soluciones ajustadas en esta sección poseen altos valores de AIC/BIC en comparación con Λ CDM, debido a que poseen muchos más parámetros libres que este último. Pero, estos parámetros libres en ningún momento son añadidos para mejorar el ajuste a los datos, sino que sólo para poder obtener una DE del tipo phantom. Por ende, podemos concluir de que estos modelos, que representan un universo dominado por una DE phantom dinámica en el tiempo, y que a tiempos tempranos son universos regulares y a tiempos tardíos Little Rip, pueden ajustar muy bien la data observacional proveniente de SNe Ia, agregando la respectiva componente material. Más aún, en la figura 2.10, es posible observar que estos tres modelos difieren muy levemente de Λ CDM, a pesar de que en esencia son muy diferentes. Note que la diferencia más notable entre los modelos comienza a ocurrir a $z > 0.6$, es decir, donde comienza la dominación de la DM por sobre la DE. Esto se debe a que los modelos estudiados, que son phantom siempre, producen mayor aceleración en el universo en una época donde debería ser mucho menor, como se observa en las líneas continua y continua-punteada.

Finalmente, prestando atención a los valores Ω_m obtenidos de cada uno de los modelos, se observa que estos valores permanecen en la región aceptada del valor $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$, dado por los últimos resultados de Planck. Pero, en algunos casos como el modelo III, se puede llegar a tener hasta 0.1 puntos de diferencia en el valor de Ω_m . Esto se debe al hecho de que, en este modelo además tenemos efectos de disipación, los cuales provocan una expansión en la

aceleración del universo y, por lo tanto, se necesita menos cantidad de DE para dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo.

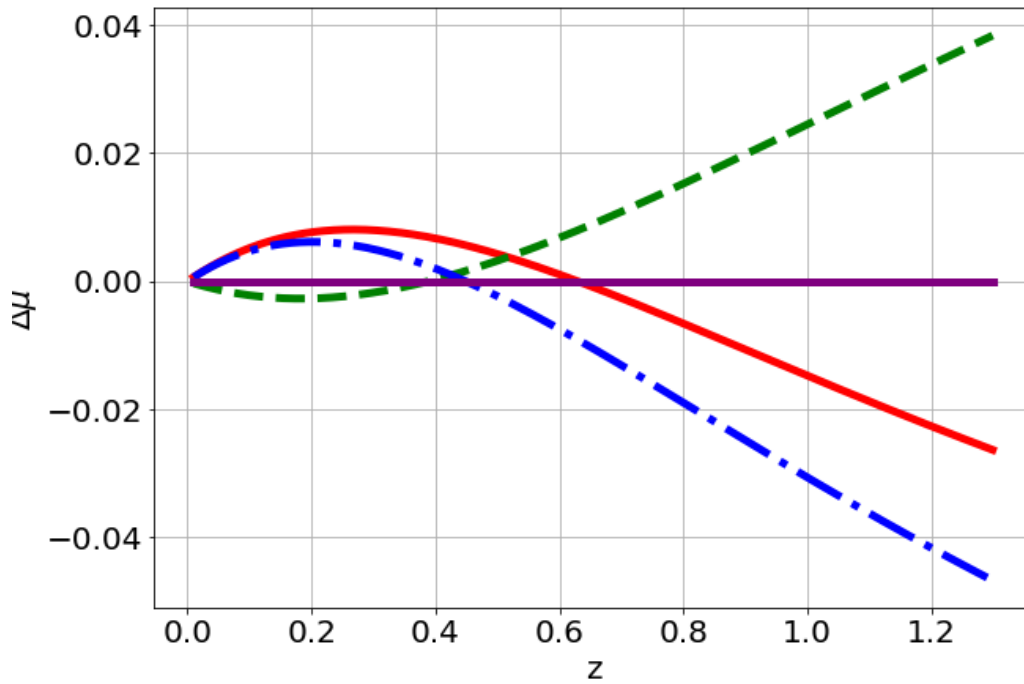


Figura 2.10: Gráfico del módulo de la distancia de los modelos I, II y III, a los cuales se les ha restado el módulo de la distancia entregado por Λ CDM. La línea continua corresponde al modelo I, la línea discontinua al modelo II, y la línea discontinua-punteada corresponde al modelo III. Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.

Con los resultados expuestos en este capítulo podemos ver que se ha establecido un nuevo procedimiento, que permite encontrar nuevas soluciones cosmológicas, las cuales no poseen singularidades a todo tiempo finito, lo que es una considerable extensión a las familias de soluciones regulares que han sido estudiadas previamente en la literatura. Un punto importante a destacar de este

procedimiento es que, el comportamiento phantom de todas las soluciones es considerado como una característica clave del método estudiado. El resultado, desde el punto de vista físico, es que ahora se tiene un modelo teórico bien fundado, el cual explica el comportamiento phantom consistentemente, y que abre la posibilidad de una descripción sólida de los tiempos tempranos y tardíos del Universo, de una manera sólida sin singularidades. Si los resultados de los recientes estudios astronómicos, que indican una posible cosmología phantom, son confirmados con observaciones más precisas, entonces la importancia de los modelos teóricos acá obtenidos podría ser primordial.

Capítulo 3

Cosmología disipativa en la teoría de Eckart

En este capítulo se discutirá la segunda línea de investigación desde el punto de vista de la cosmología con fluidos disipativos en el marco de la teoría de Eckart. Se supondrá un espacio espacialmente plano, cuya métrica está dada por la métrica de FLRW, y que el Universo se encuentra dominado por dos elementos del sector oscuro plenamente identificados: DE, representada por la constante cosmológica Λ ; y DM, la cual experimenta procesos disipativos durante su evolución cósmica. En este contexto, la presencia de viscosidad en la DM genera una presión viscosa negativa, la cual produce una aceleración en la expansión del universo. Considerando que la presión total del universo determina el comportamiento de la expansión del mismo, es posible establecer un índice barotrópico efectivo para la DE, como una combinación de la constante cosmológica Λ y la presión viscosa de la DM, y que puede cruzar la barrera phantom a pesar de que sus fluidos constituyentes no lo son. En este sentido, no se tendrían los problemas asociados a los fluidos phantom, como la violación de NEC, la singularidad futura, y los problemas asociados a sus campos escalares.

3.1 La teoría de Eckart con constante cosmológica

Al trabajar en cosmología con fluidos que experimentan procesos disipativos, se hace necesaria una teoría termodinámica relativista fuera del equilibrio que nos permita describir el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$, siendo Eckart el primero en desarrollarla [79]. En esta teoría, las ecuaciones de campo de Einstein (1.1), bajo la métrica FLRW (1.2), toman la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \equiv \dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6}(\rho + 3P_{eff}) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P_{eff}) = 0, \quad (3.3)$$

de las cuales también sólo dos son linealmente independientes. Como se puede observar, en relación a las ecuaciones de campo obtenidas para un fluido ideal, la primera ecuación de Friedmann (1.4) no sufre cambios; mientras que la segunda y tercera ecuación de Friedmann, llamadas también ecuación de aceleración y de conservación, dadas respectivamente por las ecuaciones (1.5) y (1.6), se ven modificadas cambiando la presión en equilibrio del fluido p por una presión efectiva, es decir $p \rightarrow P_{eff}$, siendo ésta última dada por la expresión

$$P_{eff} = p + \Pi, \quad (3.4)$$

donde Π es la presión disipativa debido a la viscosidad de Bulto ξ que experimenta la DM, definida por

$$\Pi = -3H\xi. \quad (3.5)$$

Para poder encontrar una ecuación que describa la evolución del universo en esta teoría, es necesario definir el coeficiente de viscosidad de bulto, para el cual

se supone una dependencia con la densidad de energía de la DM del tipo ley de potencia

$$\xi = \xi_0 \rho^s, \quad (3.6)$$

donde ξ_0 y s son parámetros constantes, con $\xi_0 > 0$ debido a la segunda ley de la termodinámica [80]. Este tipo de comportamiento para la viscosidad ha sido ampliamente investigado en la literatura [42, 53, 75, 81], a pesar del hecho de que no existe un fundamento termodinámico completo que justifique su elección [82, 83]. Aún así, se considera este tipo de comportamiento para la viscosidad, debido a que permite obtener soluciones cosmológicas adecuadas [55]. Así, considerando una EoS barotrópica para la DM, indicada en la ecuación (1.7), con $1 \leq \gamma < 2$, es posible obtener a partir de las ecuaciones (3.1-3.6) una ecuación de evolución para el parámetro de Hubble H , la cual está dada por

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - 3\xi_0 H (3H^2 - \Lambda)^s - \Lambda\gamma = 0. \quad (3.7)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden, cuyas soluciones quedan en términos de los parámetros libres s , ξ_0 , γ y Λ .

Si bien la teoría de Eckart es una teoría termodinámica fuera del equilibrio, esta desviación del mismo es considerada pequeña, es decir, la teoría es construida estando muy cerca del equilibrio termodinámico. Esta forma de construir la teoría impone que la presión disipativa debe de ser más pequeña que la presión del fluido de DM, es decir,

$$\left| \frac{\Pi}{p} \right| \ll 1, \quad (3.8)$$

condición que, en principio, es un requerimiento físicamente aceptable ya que, por ejemplo, desde el punto de vista de la física de fluidos, la viscosidad de bulto puede ser generada por la colisión entre las partículas del fluido debido a su expansión. Es por esto que es lógico pensar que físicamente esta presión disipativa tenga que ser mucho menor que la presión del fluido en equilibrio. El problema con esta condición de equilibrio es que, en principio, la DM es no

relativista, por ende, no posee presión ($p = 0$) y claramente no se cumpliría la condición indicada en la ecuación (3.8). En consecuencia, se considera una EoS barotrópica para la DM con un índice barotrópico libre, sin suponer de antemano una EoS del tipo polvo con $\gamma = 1$.

3.2 Phantom efectivo y consecuencias del equilibrio termodinámico

El objetivo es que la DE, la cual está representada por la constante cosmológica, sea de manera efectiva una EoS phantom. Para esto, es posible considerar las ecuaciones (3.1) y (3.2), teniendo en cuenta la ecuación (3.4), lo que conduce a una cuarta ecuación de campo de Einstein, de la forma

$$2\dot{H} + 3H^2 = -(p + \Pi - \Lambda) = -p_{uni}, \quad (3.9)$$

ecuación que relaciona el parámetro de Hubble y su derivada con respecto al tiempo cósmico, con todas las presiones presentes en el universo. A la suma de todas las presiones se le denomina p_{uni} , y corresponde a la presión efectiva del universo en su conjunto, es decir, la presión debido a la DM, más la constante cosmológica y la presión asociada a la disipación que experimenta la DM. Notar además que la ecuación (3.9) puede verse como un símil de la ecuación de Friedmann (3.1), donde se relaciona el parámetro de Hubble con todas las densidades de energía presentes en el universo. La ecuación (3.9) puede ser reescrita convenientemente, de la forma

$$2\dot{H} + 3H^2 = -(p + p_p) = -p_{uni}, \quad (3.10)$$

donde p_p está dado por la expresión

$$p_p = \Pi - \Lambda, \quad (3.11)$$

es decir, la presión efectiva total del universo es producto de la presión de la DM, más una presión efectiva p_p . El índice barotrópico de esta presión efectiva puede ser encontrado fácilmente, considerando que $\rho_p = \Lambda$, esto ya que la primera ecuación de Friedmann no se ve modificada en la teoría de Eckart, y por ende

$$\omega_P = \frac{p_P}{\rho_P} = \frac{\Pi - \Lambda}{\Lambda} = -1 + \frac{\Pi}{\Lambda}. \quad (3.12)$$

En consecuencia, si consideramos la presión disipativa indicada en la ecuación (3.5), entonces la ecuación (3.12) toma la forma

$$\omega_P = -1 - \frac{3H\xi}{\Lambda}. \quad (3.13)$$

De la ecuación anterior es posible ver que un índice barotrópico phantom es siempre posible. Así, en el formalismo de Eckart, se puede obtener un comportamiento phantom efectivo, sin los problemas asociados a estos tipos de fluidos. Notar que este resultado general no cambia según la solución obtenida de la ecuación (3.7), asumiendo que H y Λ son siempre positivos. Además, el phantom efectivo no necesariamente es constante durante su evolución cósmica y puede ser mucho menor a -1 en el pasado, en vez de en el futuro.

Por otro lado, poniendo énfasis en la condición de equilibrio termodinámico, y tal como fue discutido previamente por Maartens [44] en el contexto de inflación, la condición para obtener una expansión acelerada cuando esta es producida sólo por la negatividad de la presión viscosa Π , es

$$-\Pi > p + \frac{\rho}{3}, \quad (3.14)$$

la cual puede ser obtenida a partir de la ecuación (3.2), sin constante cosmológica, e imponiendo la condición $\ddot{a} > 0$. La desigualdad anterior implica que la presión viscosa Π debe ser mayor que la presión propia del fluido p , lo cual entra en directa contradicción con la condición de equilibrio termodinámico (3.8), es decir, el fluido debe estar muy lejos del equilibrio. Esta situación cambia cuando se incluye la

constante cosmológica. En este caso la condición $\ddot{a} > 0$ conduce a la expresión

$$-\Pi > \frac{-2\Lambda}{3} + p + \frac{\rho}{3}, \quad (3.15)$$

la cual indica que no necesariamente la presión viscosa Π debe ser mayor que la presión de equilibrio p para obtener un universo en expansión acelerada y, por ende, la condición de equilibrio termodinámico se puede satisfacer en ciertos escenarios.

Debido a los ajustes con los datos de SNe Ia, es conveniente reescribir la ecuación (3.13) de manera adimensional. Considerando que $[\xi_0] = [H_0]^{1-2s}$, se define el coeficiente de disipación adimensional de la forma

$$\hat{\xi}_0 = \frac{3^s \xi_0}{H_0^{1-2s}}, \quad (3.16)$$

y considerando que $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$, con la condición $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, se obtiene a partir de las ecuación (1.7), (3.1) y (3.6), que

$$w_p = -1 - \frac{\hat{\xi}_0 E (E^2 + \Omega_m - 1)^s}{1 - \Omega_m}, \quad (3.17)$$

donde $E = H/H_0$, según la ecuación (1.22). Más aún, considerando que se está interesado en explorar las condiciones para que las soluciones a la ecuación (3.7) satisfagan la condición de equilibrio termodinámico, se encontrará una expresión para ω_p en términos de $|\Pi/p|$. De las ecuaciones (1.7) y (3.5), suponiendo un parámetro de Hubble siempre positivo, se obtiene

$$3H\xi = (\gamma - 1) (3H^2 - \Lambda) \left| \frac{\Pi}{p} \right|. \quad (3.18)$$

Así, introduciendo la ecuación (3.18) en la ecuación (3.13), se obtiene que ω_p está dado por

$$\omega_p = -1 - \frac{(\gamma - 1) (E^2 + \Omega_m - 1) \left| \frac{\Pi}{p} \right|}{1 - \Omega_m}, \quad (3.19)$$

en su forma adimensional. La ecuación anterior indica que si se satisface la condición de equilibrio, entonces el índice barotrópico phantom efectivo puede

ser cercano a -1 , en cierto régimen. Es necesario destacar que en la expresión anterior, el caso $\gamma = 1$ es complicado de analizar, debido a que si bien es tentador pensar que para este caso no es posible obtener un phantom efectivo, se debe recalcar que la razón $|\Pi/p| \rightarrow \infty$, y por ende se tiene una indeterminación. Así, la expresión (3.19) se supone válida sólo cuando $\gamma \neq 1$.

Se hace necesario destacar que la inclusión de una constante cosmológica no nula se fundamenta en la posibilidad, no sólo de obtener un índice barotrópico phantom para la DE, sino que también para poder posibilitar el cumplimiento de la condición de equilibrio termodinámico bajo la cual está construida la teoría de Eckart. Más aún, existen otras motivaciones para la inclusión de la constante. Por ejemplo, estudios de los modelos unificados de DM, donde la aceleración en la expansión del universo se debe sólo a la presión viscosa, presentan problemas desde el punto de vista de formación de estructura. Por otro lado, fluidos sin presión, con una viscosidad constante y variable han sido confrontados con la data observacional en [47, 48]. Sin embargo, la viscosidad de bulto induce una variación grande en el tiempo del potencial gravitatorio a tiempos tardíos, lo que conduce a inconsistencias con el efecto integrado Sachs-Wolfe en tales modelos [84–86]. En [87], con la finalidad de superar este problema, se propone un modelo con una DM viscosa, con constante cosmológica, la cual actúa generando la expansión acelerada del Universo.

El análisis de la obtención del phantom efectivo en la teoría de Eckart se desarrollará de manera numérica, ajustando los parámetros libres de la ecuación diferencial general a resolver con los datos observacionales de SNe Ia, provistos por el catálogo de JLA. Para este fin, se hace necesario obtener una expresión adimensional de la ecuación (3.7), la cual está dada por

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{3}{2E(1+z)} \left[\hat{\xi}_0 E (E^2 + \Omega_m - 1)^s - \gamma (E^2 + \Omega_m - 1) \right], \quad (3.20)$$

ecuación donde se ha utilizado la definición $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$, la relación $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$, las ecuaciones (3.16) y (1.22), y la igualdad $\dot{E} = -(1+z)HdE/dz$, la cual

relaciona la derivada temporal del parámetro de Hubble adimensional con su derivada con respecto al corrimiento al rojo z . Debido a que la condición de equilibrio termodinámico no se cumple cuando se considera CDM, es que se divide el estudio de la ecuación diferencial en dos: en el primero se considera una DM representada por una EoS, cuyo índice barotrópico es distinto del polvo ($1 < \gamma < 2$), la cual se denomina WDM (Materia Oscura Tibia, del inglés Warm Dark Matter); mientras que en la segunda se considera una DM con una EoS del tipo polvo ó $\gamma = 1$, la cual representa el caso estándar CDM. Así, la condición de equilibrio termodinámico sólo es estudiada en el primer caso. En ambos casos, la ecuación diferencial es resuelta de manera numérica bajo la condición inicial $E(z = 0) = 1$; mientras que el vector de parámetros es $\vec{p} = (s, \Omega_m, \hat{\xi}_0, \gamma)$ para el caso WDM y $\vec{p} = (s, \Omega_m, \hat{\xi}_0)$ para el caso CDM, en los cuales se utilizan los prior: $-5 < s < 10$, $0 < \Omega_m < 1$, $0 < \xi_0 < 2$ y $1 < \gamma < 2$, según corresponda. Como complemento, se ajusta la ecuación diferencial para los casos WDM y CDM, en los casos particulares en que el parámetro libre s toma los valores -1 , 0 , 1 y 2 , cuyos respectivos vectores de parámetros son $\vec{p} = (\Omega_m, \hat{\xi}_0, \gamma)$ y $\vec{p} = (\Omega_m, \hat{\xi}_0)$. En estos casos particulares se utiliza los mismos prior que en el caso donde el parámetro s es dejado libre, según corresponda.

3.3 Ajuste de la ecuación diferencial con SNe Ia: caso WDM

En esta sección se discutirán los resultados derivados de ajustar los parámetros libres de la ecuación diferencial (3.20) para el caso WDM. Los valores que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1. En las figuras 3.1-3.5 se representan las regiones creíbles de los casos s libre y $s = -1, 0, 1, 2$, para combinaciones de sus respectivos vectores de

parámetros \vec{p} y \vec{p}_j .

Caso	Valores de mejor ajuste				Bondad de ajuste		
	s	Ω_m	$\hat{\xi}_0$	γ	χ^2_{min}	AIC	BIC
Λ CDM	-	0.29 ± 0.03	-	-	692.1	700.1	718.5
s libre	$5.30^{+3.22}_{-3.46}$	$0.18^{+0.12}_{-0.06}$	$0.56^{+0.61}_{-0.35}$	$1.50^{+0.32}_{-0.33}$	692.4	706.4	738.6
$s = -1$	-1	$0.55^{+0.29}_{-0.21}$	$0.21^{+0.36}_{-0.17}$	$1.08^{+0.11}_{-0.06}$	694.5	706.5	734.2
$s = 0$	0	$0.75^{+0.18}_{-0.30}$	$0.61^{+0.38}_{-0.35}$	$1.25^{+0.29}_{-0.17}$	693.0	705.0	732.7
$s = 1$	1	$0.39^{+0.18}_{-0.12}$	$0.55^{+0.29}_{-0.26}$	$1.49^{+0.34}_{-0.33}$	691.5	703.5	731.1
$s = 2$	2	$0.22^{+0.11}_{-0.07}$	$0.51^{+0.33}_{-0.26}$	$1.51^{+0.33}_{-0.34}$	691.2	703.2	730.8

Tabla 3.1: Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste, para el análisis WDM. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (3.20); mientras que la tercera, cuarta, quinta y sexta fila corresponden a los casos particulares de la ecuación diferencial anterior, donde s es igual a -1 , 0 , 1 y 2 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α para todos los casos es 0.14 ± 0.01 . El parámetro β es 3.11 ± 0.08 para todos los casos, salvo para el caso s libre, donde es igual a 3.12 ± 0.08 . El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.08 ± 0.02 para todos los casos, salvo para los casos $s = 1$ y $s = 2$, donde es igual a -19.07 ± 0.02 .

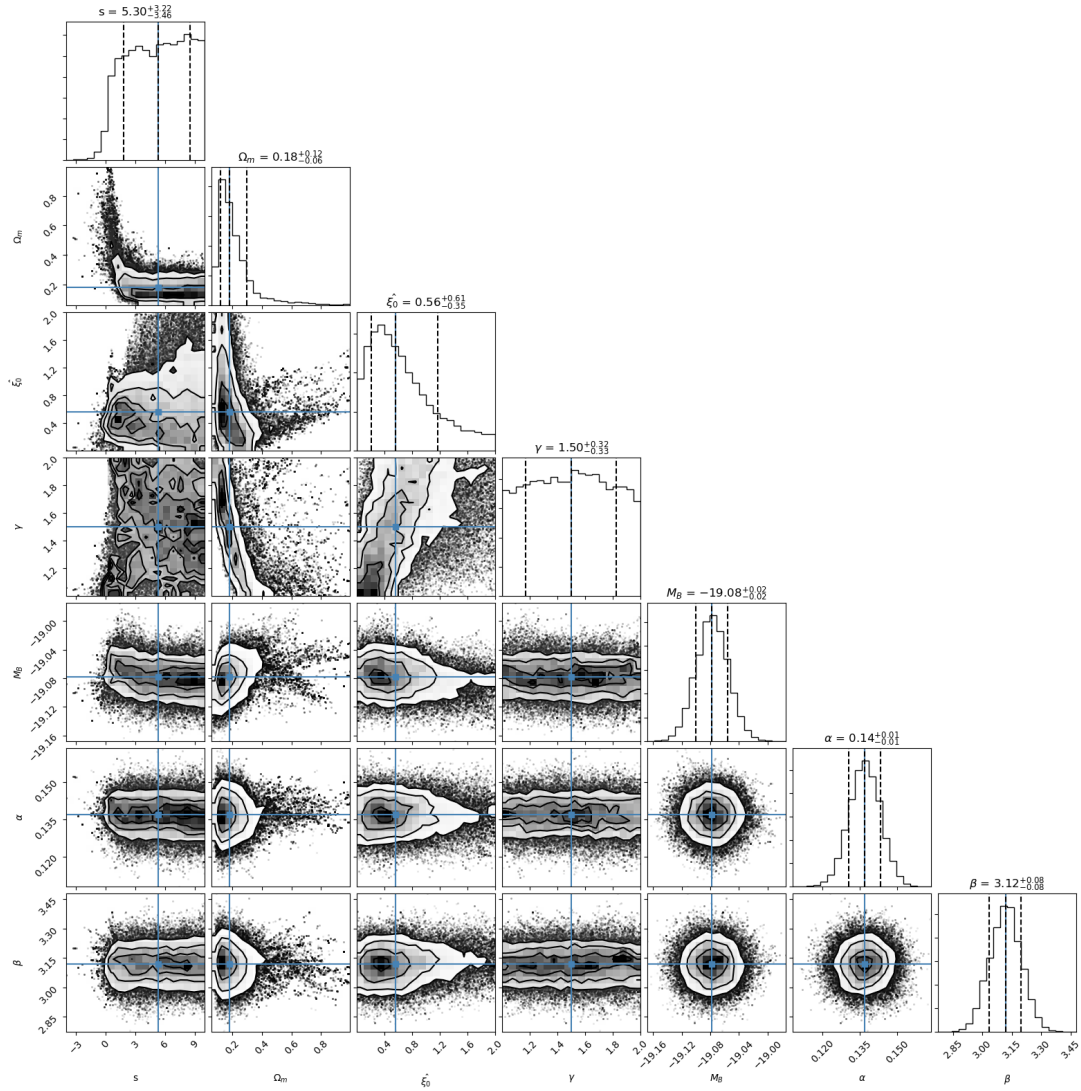


Figura 3.1: Restricción conjunta y marginada de s , Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

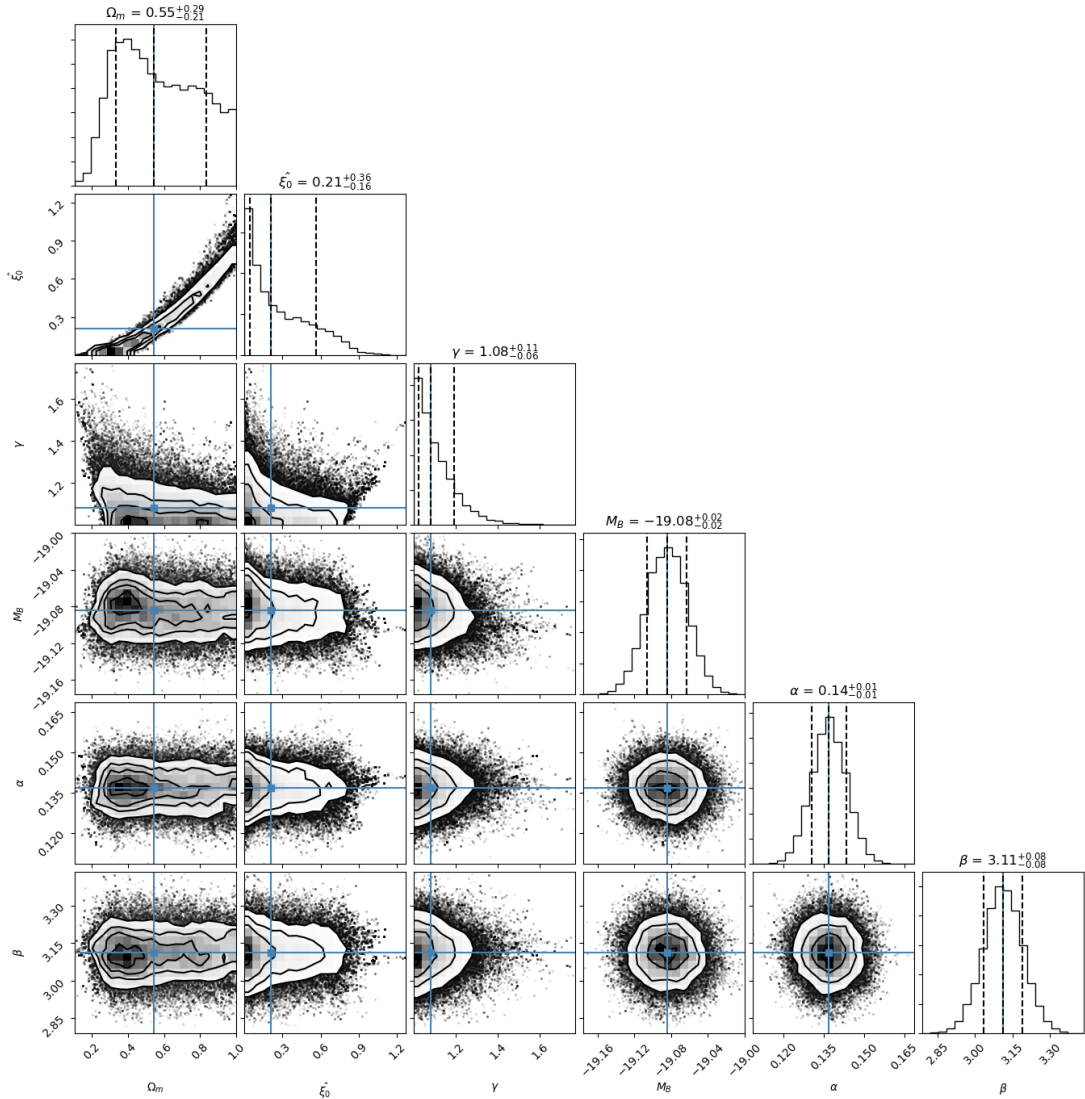


Figura 3.2: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = -1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

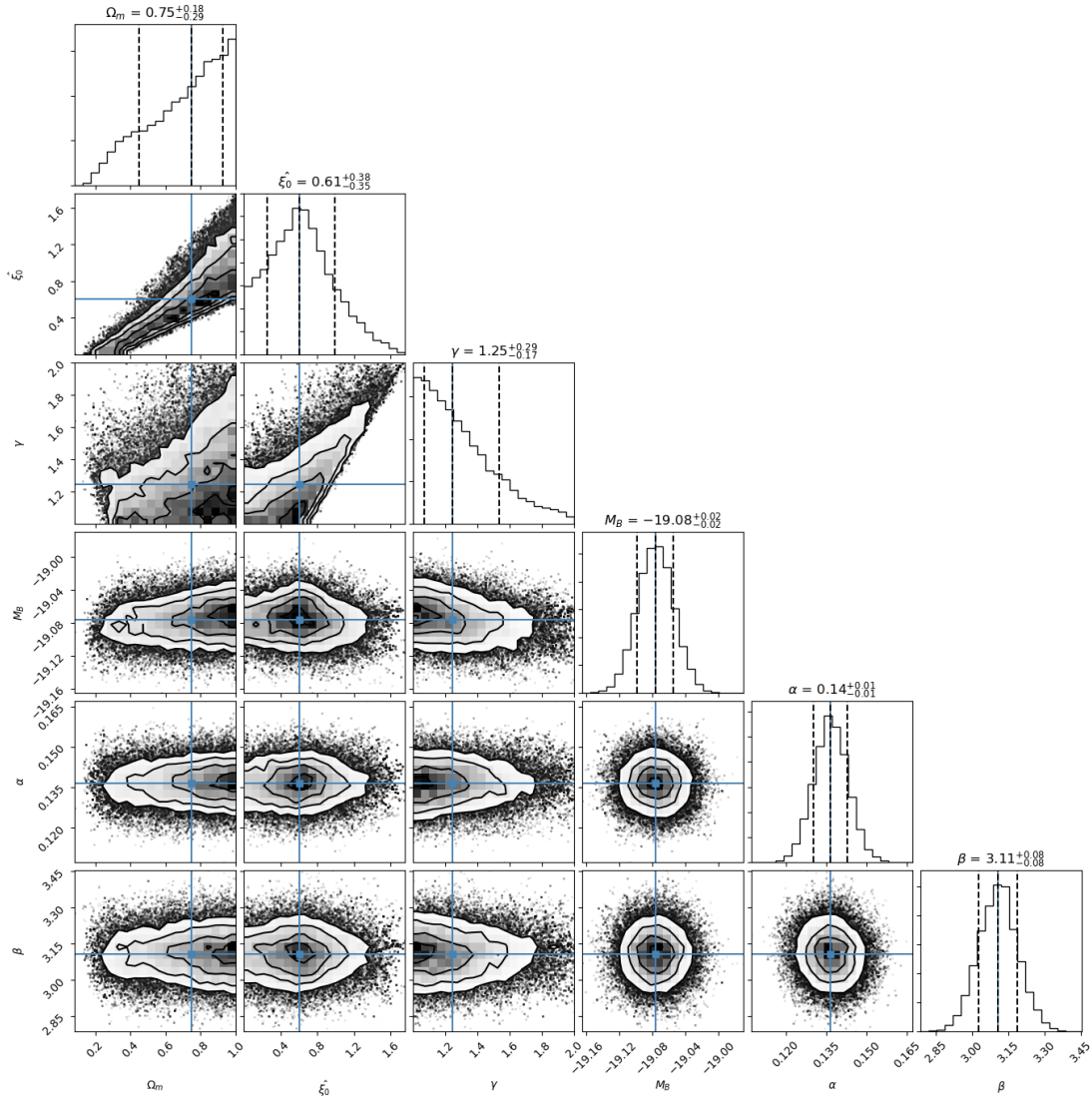


Figura 3.3: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 0$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

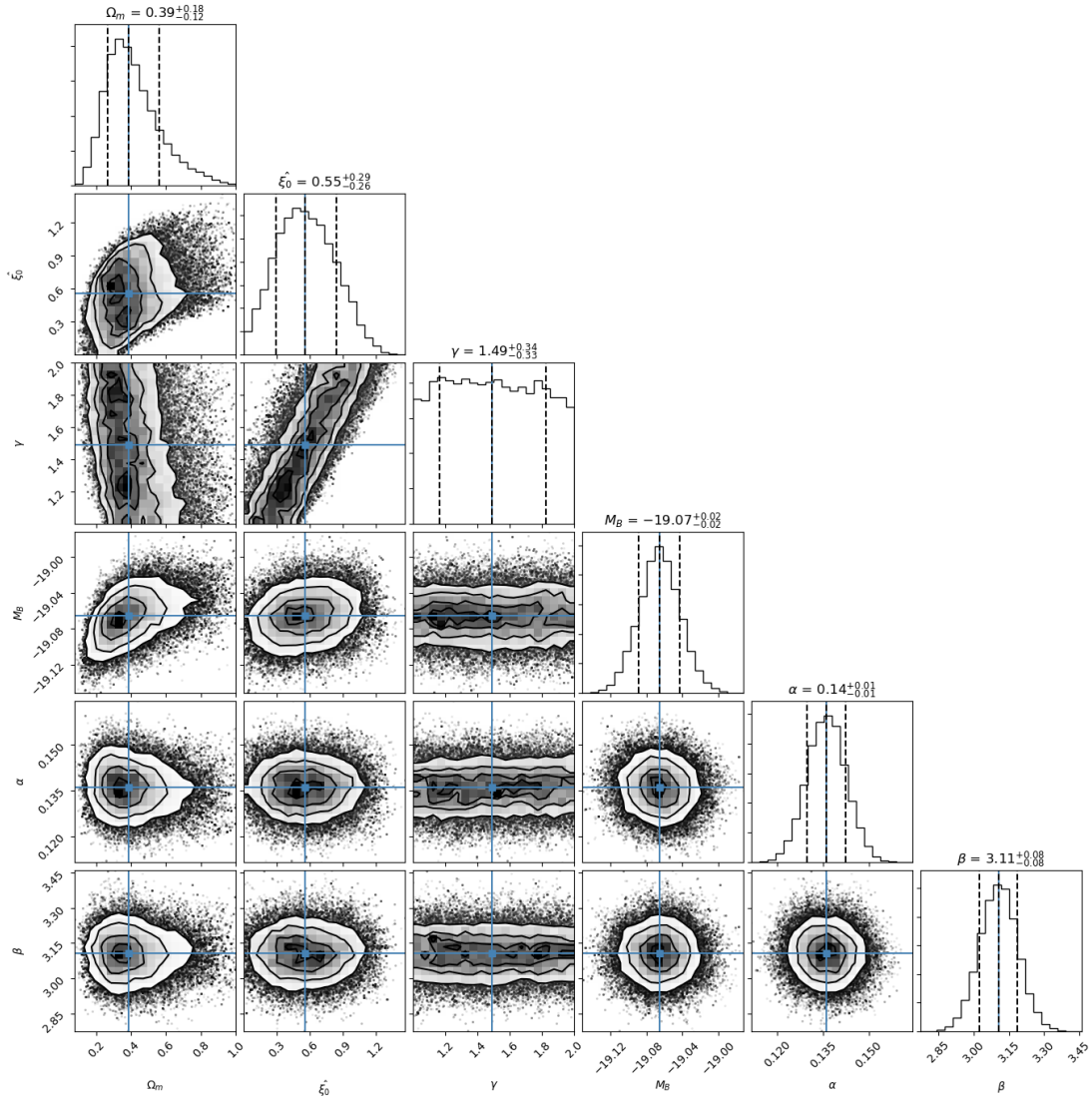


Figura 3.4: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

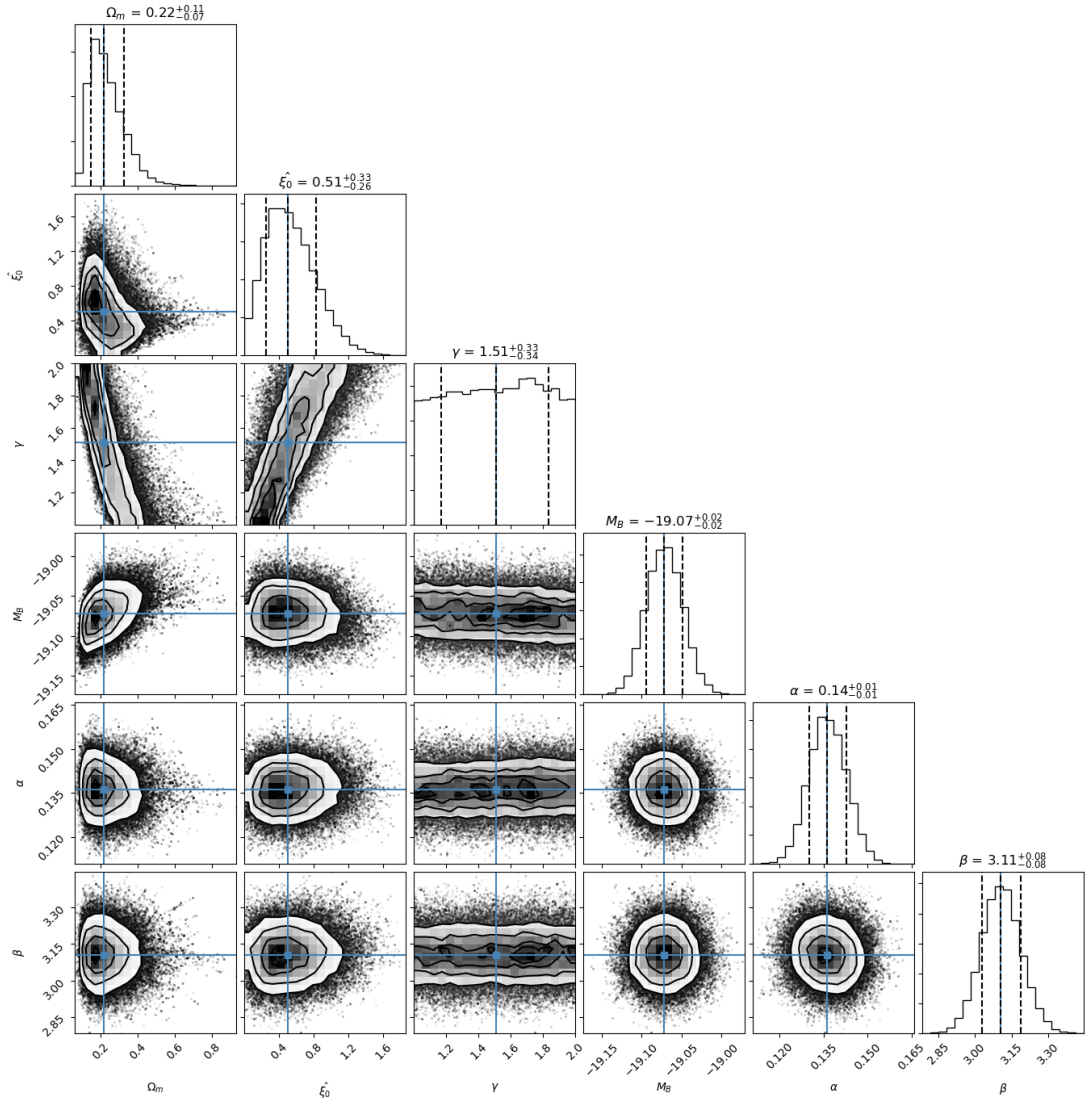


Figura 3.5: Restricción conjunta y marginada de Ω_m , $\hat{\xi}_0$ y γ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso WDM con $s = 2$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

Como se observa en la Tabla 3.1, los ajustes realizados a la ecuación diferencial general a resolver en la teoría de Eckart en los casos $s = 1$ y $s = 2$, exhiben un mejor parámetro de bondad de ajuste en cuanto al valor correspondiente a χ_{min}^2 . Mientras que el caso s libre, cuyo valor de mejor ajuste es $s = 5.3$, difiere muy poco del valor de χ_{min}^2 obtenido por el Modelo Estándar de la Cosmología. Más aún, en estos tres modelos, si consideramos el error asociado al parámetro de densidad de DM Ω_m , el valor que mejor ajusta a los datos se encuentra en plena concordancia con el entregado en las últimas mediciones del satélite Planck. Aún así, el modelo Λ CDM sigue siendo, estadísticamente, el modelo más favorecido por las observaciones de SNe Ia provenientes del catálogo JLA, debido principalmente a que sólo posee un parámetro libre; existiendo una diferencia de 12,3 puntos en BIC entre el modelo Λ CDM y el caso con menor valor de χ_{min}^2 , correspondiente al modelo con $s = 2$, es decir, tenemos evidencia muy fuerte en contra de este caso en particular. Es importante destacar que, si bien es el Modelo Estándar el más favorecido por las observaciones a nivel estadístico, los casos s libre, $s = 1$ y $s = 2$ son modelos excelentes que pueden ajustar de muy buena forma a los datos observacionales de SNe Ia, cuyos parámetros libres son parte intrínseca del modelo y no son agregados con la finalidad de mejorar el ajuste.

Los modelos más perjudicados en el ajuste al poseer un mayor valor de χ_{min}^2 , y por ende mayor BIC que el modelo Λ CDM, corresponden al ajuste de la ecuación diferencial para los casos particulares $s = -1$ y $s = 0$; cuya diferencia en χ_{min}^2 es de 2,4 y 0,9 puntos, respectivamente. La razón principal de esta gran diferencia radica en los valores obtenidos como mejor ajuste para Ω_m , los cuales tienden a 1, siendo mayor en el caso $s = 0$ que en el caso $s = -1$. Si bien, estos valores difieren en gran medida de los $\Omega_m = 0.315$ obtenidos por Planck, lo que se concluye es que en estos casos es posible dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo, sin la necesidad de una componente de DE predominante,

incluso se podría prescindir de ella, es decir, en estos casos es posible dar cuenta de la expansión acelerada del Universo sólo debido a la disipación que experimenta la DM. Esto se hace evidente en la figura 3.1, en donde se observa que a medida que los valores de s se encuentran más cercanos a 0, entonces los valores de Ω_m se disparan a 1. En la figura 3.6 se presenta un gráfico en donde al módulo de la distancia μ obtenido del modelo Λ CDM se le resta el módulo de la distancia obtenido en cada uno de los caso analizados en esta sección.

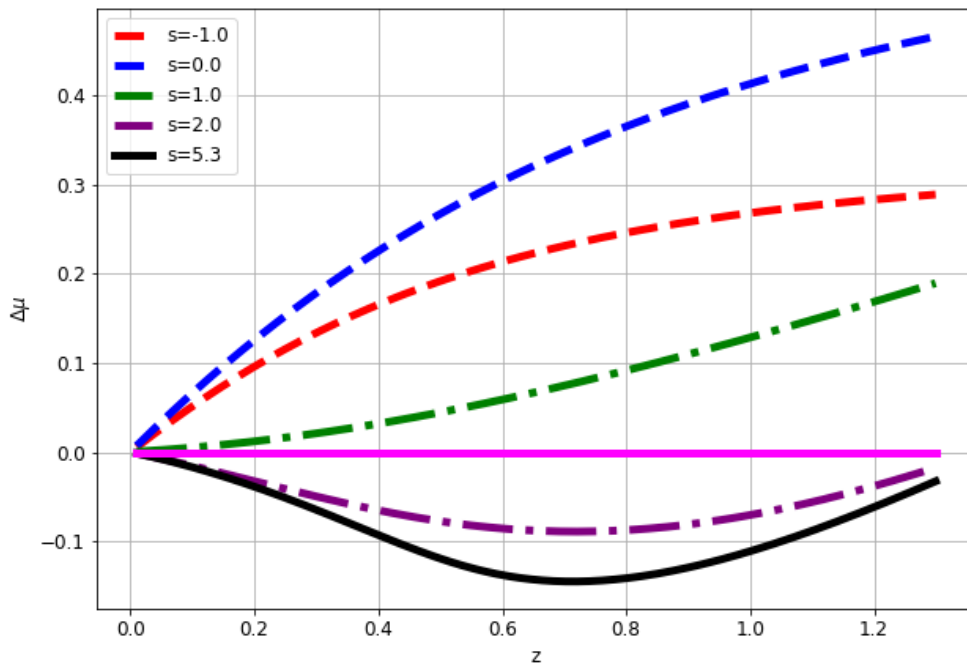


Figura 3.6: Gráfico del módulo de la distancia obtenido de la ecuación diferencial (3.20) para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM, en el análisis WDM. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s . Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.

Como se puede apreciar, todos los casos entregan un módulo de la distancia muy similar al que entrega Λ CDM; es decir, ya sea sólo con disipación o con una gran contribución de DE, es posible dar cuenta de muy buena forma de la expansión acelerada del Universo. Eso si, es posible notar como los modelos que requieren una menor (o incluso nula) cantidad de DE, conducen a un mayor módulo de la distancia que los modelos más cercanos a Λ CDM en cuanto a los valores de sus parámetros. Para entender este punto, en la figura 3.7 se presenta un gráfico del parámetro de Hubble adimensional E .

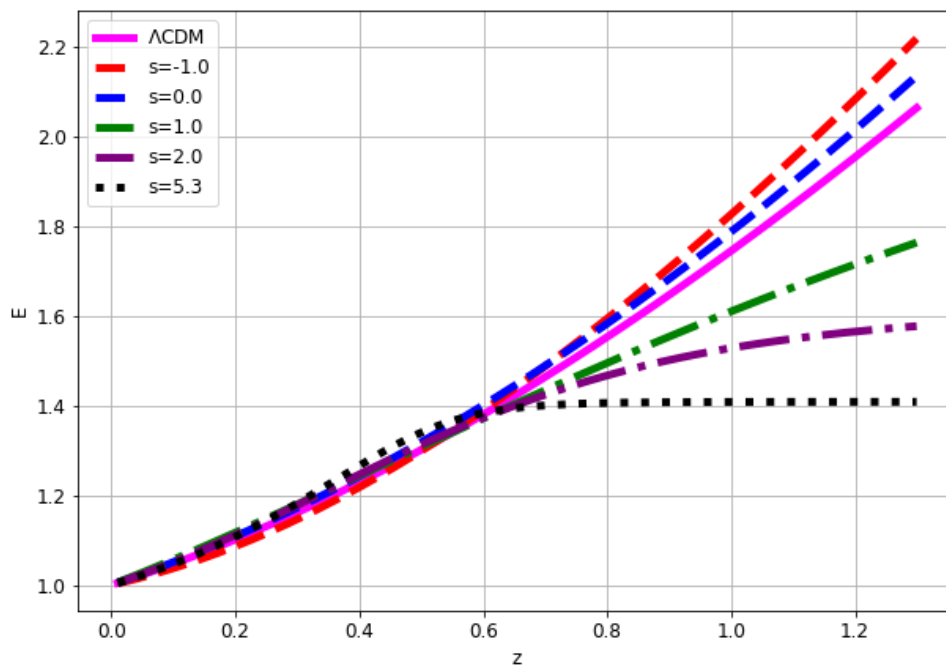


Figura 3.7: Gráfico del parámetro de Hubble adimensional E en función del corrimiento al rojo z , para el modelo Λ CDM y los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .

De la figura anterior, es posible ver que los modelos con mayor valor de Ω_m , y por ende menor contribución de DE, son los modelos que más se parecen en cuanto a valor de H al Modelo Estándar de la Cosmología. Además, los casos $s = -1$ y $s = 0$, casos donde Ω_m es más cercano a 1, son modelos casi idénticos a Λ CDM. Note como los casos $s = 1$, $s = 2$ y $s = 5.3$ se alejan mucho de Λ CDM (en forma), tendiendo casi a una constante hacia el pasado (más notoria en el caso $s = 5.3$). Más aún, las diferencias entre cada uno de los modelos con respecto a Λ CDM comienza a ser evidente a $z > 0.6$, es decir, el punto donde comienza la reciente expansión acelerada del Universo. Esto tiene directa relación con la forma elegida para la viscosidad de bulto, dada por la ecuación (3.6). Note que según esta expresión, la viscosidad de bulto es proporcional a la densidad de energía de la DM, elevada a una potencia. Pensando en el modelo Λ CDM, la densidad de DM crece cuando $z \rightarrow \infty$ y tiende a cero cuando $z \rightarrow -1$. Bajo esta consideración, cuando se va al pasado en el caso $s = -1$ la disipación se vuelve cero, mientras que al futuro la disipación crece, es decir, la disipación sólo juega un papel fundamental hacia el futuro. Todo lo contrario ocurre, por ejemplo, en el caso $s = 5.3$. Como la densidad de energía debe disminuir al futuro, entonces la disipación decrece rápidamente a este mismo tiempo. Por otro lado, hacia el pasado, la densidad de energía de DM crece y, por ende, la disipación crece rápidamente. Por lo tanto, en los casos donde $s > 0$, la disipación se vuelve importante en un tiempo donde no debería serlo, entregando una mayor aceleración hacia el pasado que hacia el futuro. Esto es un análisis crítico, considerando que si bien todos los casos ajustan muy bien los datos de SNe Ia, siendo los casos $s > 0$ los mejores en ajustar los datos; el tener una disipación muy fuerte hacia el pasado y, por ende, una mayor aceleración en una época caracterizada por un Universo en expansión desacelerada, podría traer problemas a niveles de formación de estructura, ya que la materia no podría atraerse gravitacionalmente al expandirse el espacio mucho más rápido.

Un punto importante a destacar es que el análisis anterior se condice con el phantom efectivo obtenido para cada caso, como se puede observar en la figura 3.8.

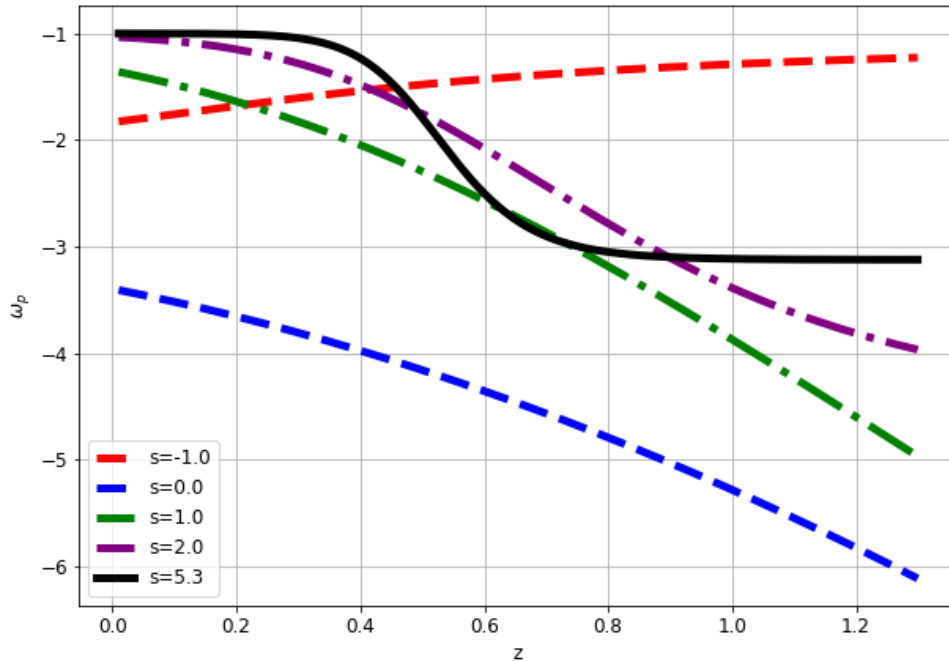


Figura 3.8: Gráfico del phantom efectivo ω_p en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .

Como se observa, los casos donde la disipación se hace importante al pasado, es decir, casos $s = 1$, $s = 2$ y $s = 5.3$, no tienen un valor muy grande de ω_p a tiempo presente, como es de esperarse. Esto se debe simplemente a la definición del phantom efectivo, dada por la ecuación (3.19). Según esta ecuación, hay dos factores importantes que influyen en el phantom efectivo, dejando de lado por

ahora la condición de equilibrio termodinámico: el valor de $\gamma - 1$ y el valor de $1 - \Omega_m$. Debido a que los tres casos mencionados poseen una baja contribución de DM o, lo que es lo mismo, una alta contribución de DE, el phantom efectivo naturalmente se vuelve más cercano a -1 a tiempos actuales, donde $E = 1$. Más aún, el valor de γ también juega un rol fundamental ya que entre más cercano a 1 , más contribuye a un phantom cercano a -1 a tiempos actuales. Es por esta razón que los valores de ω_p se vuelven mucho más grandes a tiempos pasados, que es donde la disipación se vuelve importante. Ahora bien, uno debería esperar entonces un phantom efectivo mayor en los casos $s = -1$ y $s = 0$ a tiempos actuales que al pasado, ya que es a tiempos actuales-futuros donde la disipación se vuelve importante. Si bien ocurre esto en el caso $s = -1$, no es así en el caso $s = 0$ y la respuesta es directa. Note que es el caso $s = 0$ el que obtiene el valor de Ω_m más grande, es decir, cercano a 1 ; lo que según la ecuación (3.19) conduce a un phantom efectivo que tiende a infinito. Esto indica algo que es evidente: no es posible definir un phantom efectivo en un modelo donde no es necesaria la constante cosmológica para describir la reciente expansión acelerada del Universo.

En cuanto a la condición de equilibrio termodinámico, como se observa en la figura 3.9, sólo los casos con $s = 2$ y $s = 5.3$ son capaces de satisfacerla hasta aproximadamente $z = 0.3$; lo cual se condice con el phantom efectivo cercano a -1 hasta $z = 0.3$ visto en la figura 3.8. La principal razón de la salida de estas soluciones del equilibrio termodinámico cuando $z > 0.3$, se debe a que en estas soluciones la disipación se vuelve importante hacia el pasado y, por ende, la presión disipativa Π también se vuelve importante a estos tiempos. Note además como el caso $s = -1$ está muy fuera del equilibrio termodinámico a tiempos actuales. Esto se debe a que el valor que mejor ajusta a los datos de γ , en este caso, es $\gamma = 1.08$, es decir, la materia es muy cercana a polvo o CDM. Este mismo caso se acerca al equilibrio termodinámico hacia el pasado debido a que en estos tiempos la presión disipativa tiende a cero, ya que la disipación tiende a cero.

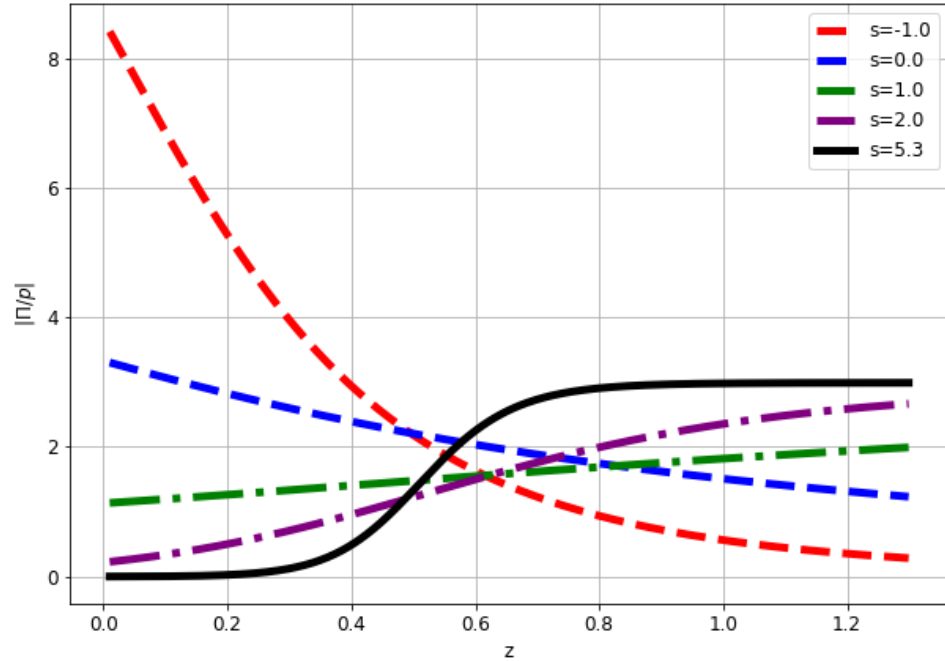


Figura 3.9: Gráfico de la condición de equilibrio termodinámico $|\Pi/p|$ en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis WDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .

Si bien en este capítulo se estudia de una DM con cierta temperatura o WDM, debido a las necesidades impuestas por la formación de estructuras, la DM presente en el Universo debe ser lo más cercana a una CDM. De los ajustes estudiados, sólo el caso $s = -1$ cumple con esta característica, siendo el caso más prometedor en este sentido. Ahora bien, en la Tabla 3.1 es posible apreciar que, salvo el caso $s = 0$ con un valor de $\gamma = 1.25$, todos los demás casos tienen un valor de $\gamma = 1.5$ aproximadamente; valor de γ que es mucho más grande que el

correspondiente a la radiación o materia relativista. Si bien esto podría descartar de plano estos casos, se debe notar de las figuras 3.1, 3.4 y 3.5, correspondientes a los casos s libre, $s = 1$ y $s = 2$, que SNe Ia no es suficiente para ajustar el valor de γ , ya que γ está recorriendo absolutamente todo el espectro de parámetros dado en el prior, con similar probabilidad. Así, estos valores no necesariamente corresponden a un mejor ajuste, debido a que falta información para tener un ajuste más preciso. Otra forma de ver este hecho es que, en estos casos a los datos de SNe Ia le es indiferente si $\gamma = 1$ ó $\gamma = 2$, por ejemplo. Para el caso $s = 0$ es posible ver en la figura 3.3, que la moda de los valores de γ se encuentra en los valores cercanos a 1.

Finalmente, los valores de ξ_0 se encuentran dentro de un rango aceptable, tomando valores entre 0.21, en el caso $s = -1$, y 0.61 en el caso $s = 0$; valores que cumplen con ser menores a 1, a pesar de que físicamente se es esperable valores que cumplan con $\xi_0 \ll 1$. Esto debido a que la disipación de bulto que experimenta la DM debe ser muy pequeña, lo cual queda descartado en primera instancia debido a la forma matemática que se le dio a la misma, la cual fluctúa entre 0 e infinito, según el tiempo donde se considera. Esto deja de manifiesto que la expresión de ξ , dada por la ecuación (3.6), no es la mejor elección desde un punto de vista físico, a pesar de ser una de las expresiones más estudiadas en la literatura.

3.4 Ajuste de la ecuación diferencial con SNe Ia: caso CDM

En esta sección se discutirán los resultados derivados de ajustar los parámetros libres de la ecuación diferencial (3.20), para el caso CDM. Los valores que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran

en la Tabla 3.2. En las figuras 3.10-3.14 se representan las regiones creíbles de los casos s libre y $s = -1, 0, 1, 2$, para combinaciones de sus respectivos vectores de parámetros \vec{p} y \vec{p}_j .

Caso	Valores de mejor ajuste			Bondad de ajuste		
	s	Ω_m	$\hat{\xi}_0$	χ^2_{min}	AIC	BIC
Λ CDM	-	0.29 ± 0.03	-	692.1	700.1	718.5
s libre	$2.91^{+4.33}_{-2.58}$	$0.36^{+0.27}_{-0.07}$	$0.21^{+0.23}_{-0.14}$	691.8	703.8	731.5
$s = -1$	-1	0.65 ± 0.25	$0.26^{+0.34}_{-0.21}$	693.5	703.5	726.5
$s = 0$	0	$0.69^{+0.22}_{-0.25}$	$0.36^{+0.20}_{-0.23}$	691.6	701.6	724.6
$s = 1$	1	$0.50^{+0.21}_{-0.14}$	$0.26^{+0.14}_{-0.15}$	691.5	701.5	724.6
$s = 2$	2	$0.38^{+0.11}_{-0.07}$	$0.19^{+0.12}_{-0.11}$	691.5	701.5	724.5

Tabla 3.2: Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste, para el análisis CDM. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (3.20); mientras que la tercera, cuarta, quinta y sexta fila corresponden a los casos particulares de la ecuación diferencial anterior, donde s es igual a $-1, 0, 1$ y 2 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α para todos los casos es 0.14 ± 0.01 . El parámetro β es 3.11 ± 0.08 para todos los casos, salvo para el caso $s = -1$, donde es igual a 3.10 ± 0.08 . El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.07 ± 0.02 para los casos s libre, $s = 0$ y $s = 2$; -19.08 ± 0.02 para los casos Λ CDM y $s = -1$; y -19.06 ± 0.02 para el caso $s = 1$.

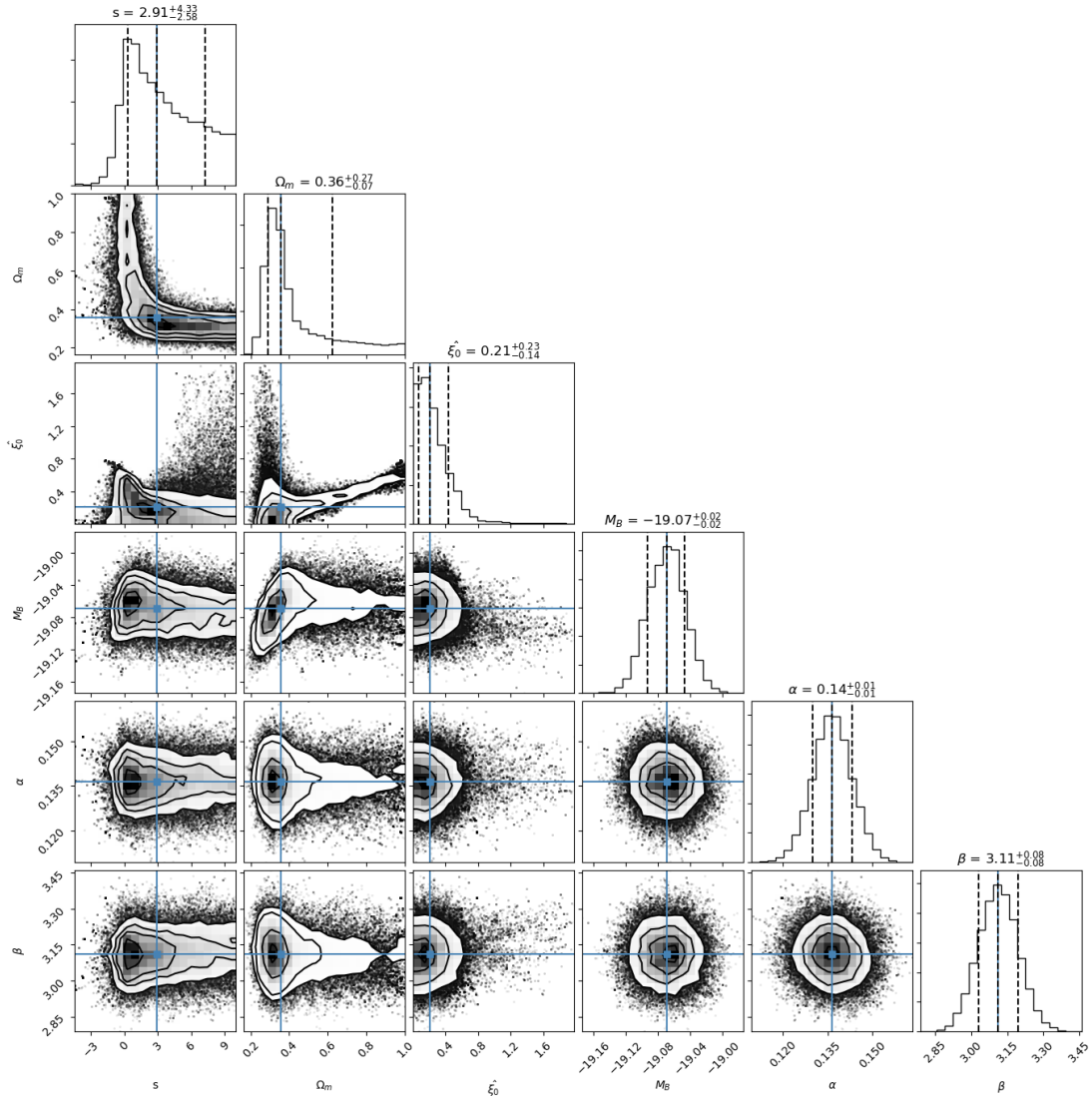


Figura 3.10: Restricción conjunta y marginada de s , Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

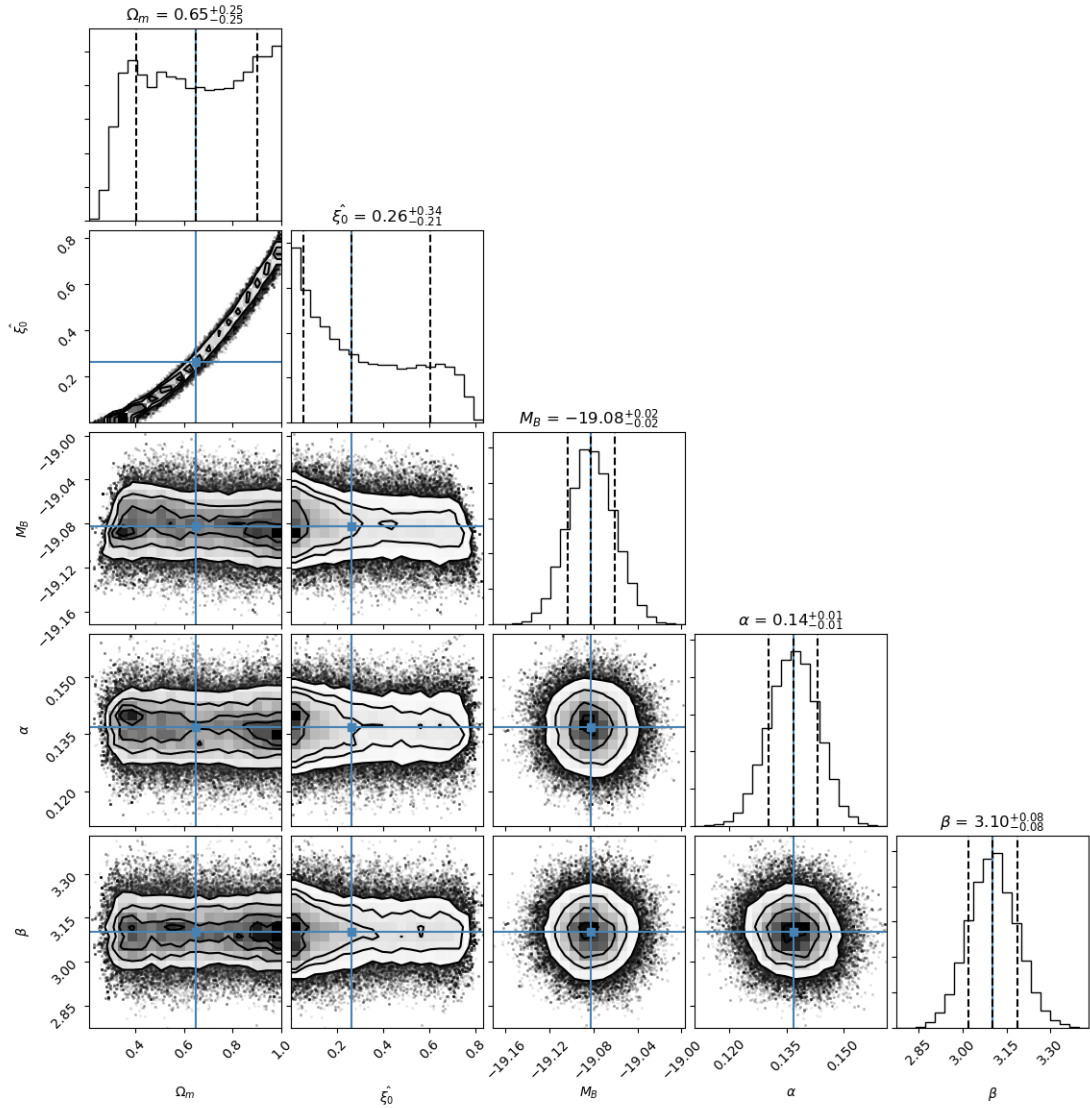


Figura 3.11: Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = -1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

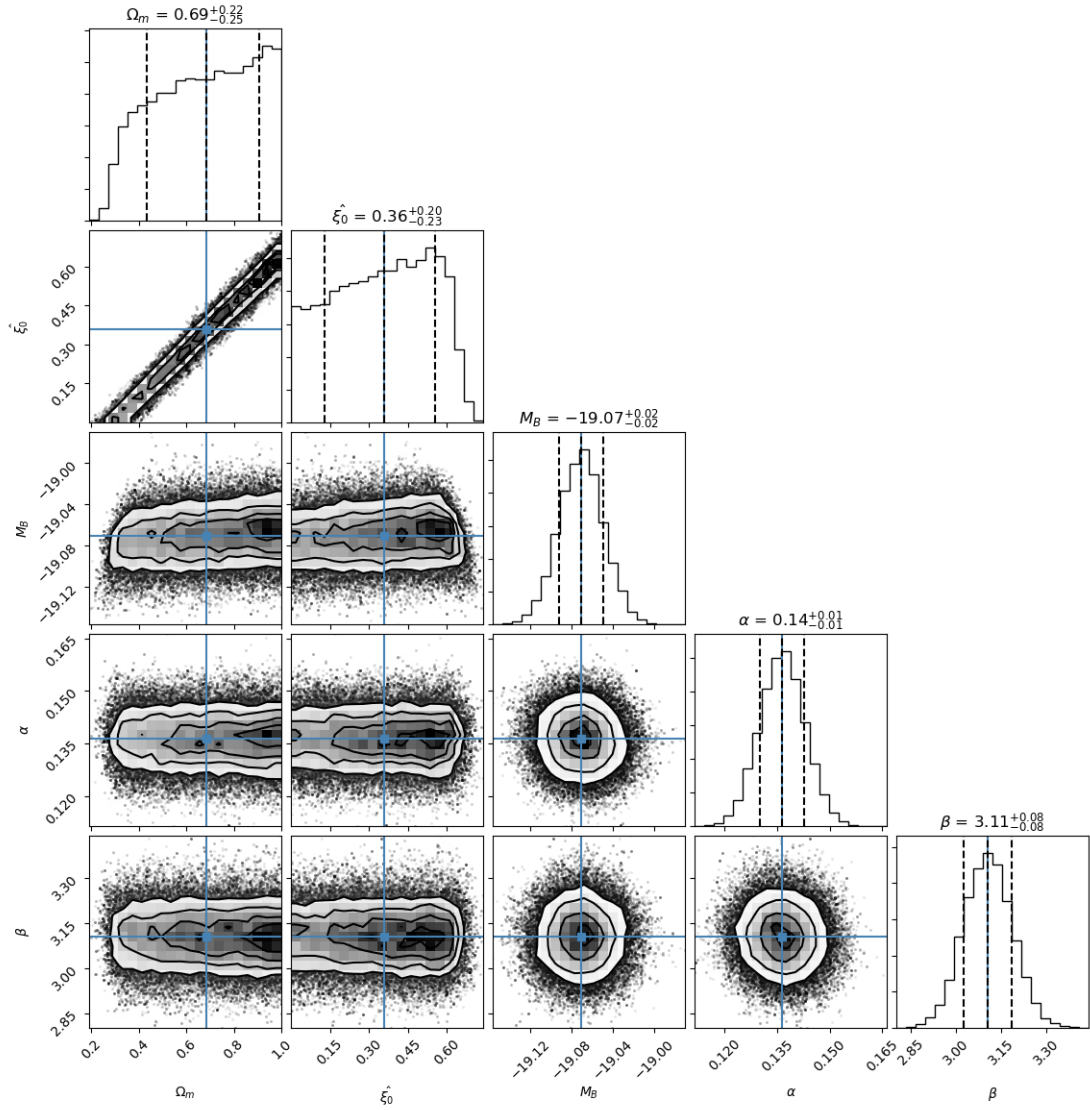


Figura 3.12: Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 0$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

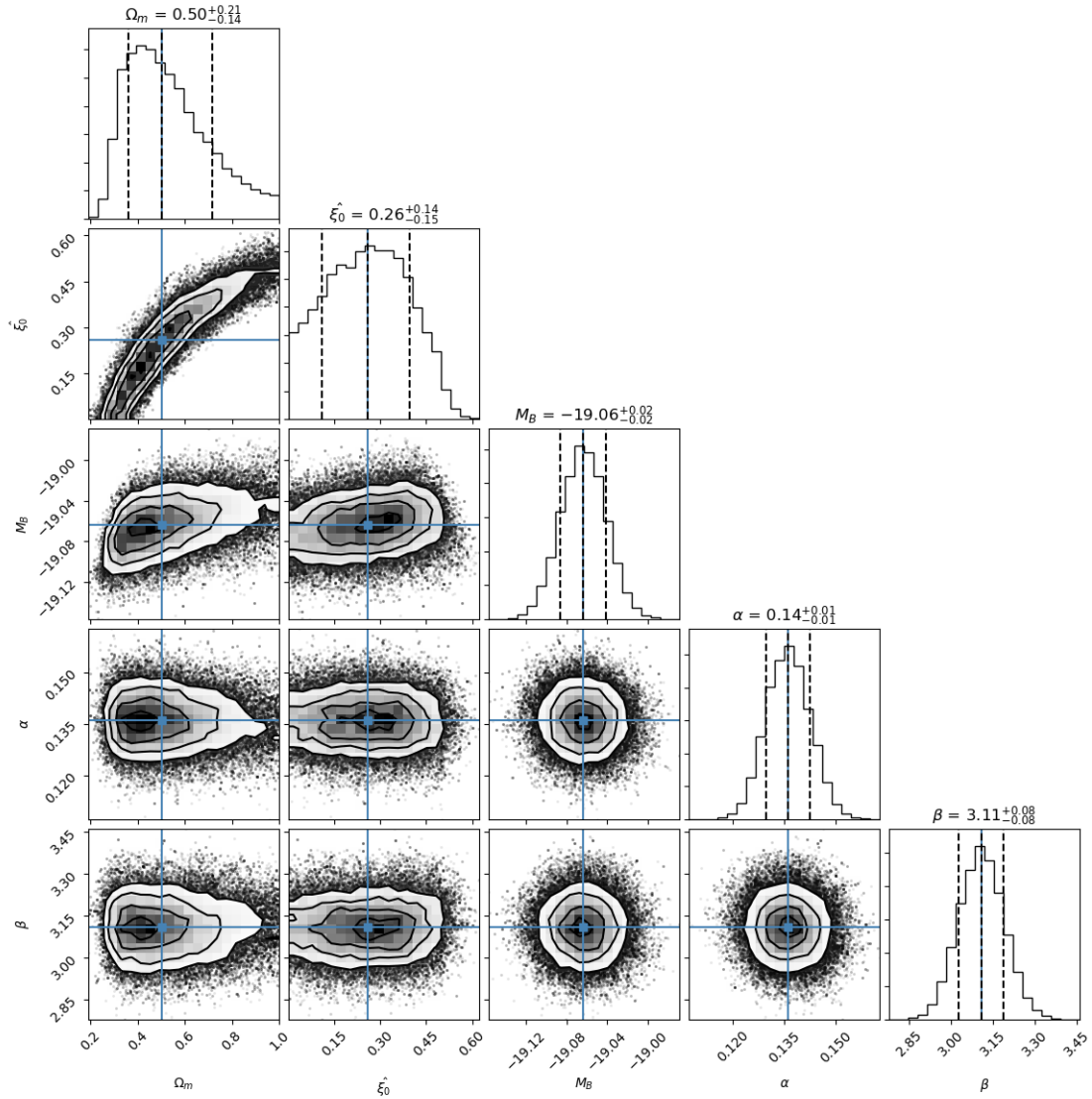


Figura 3.13: Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 1$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

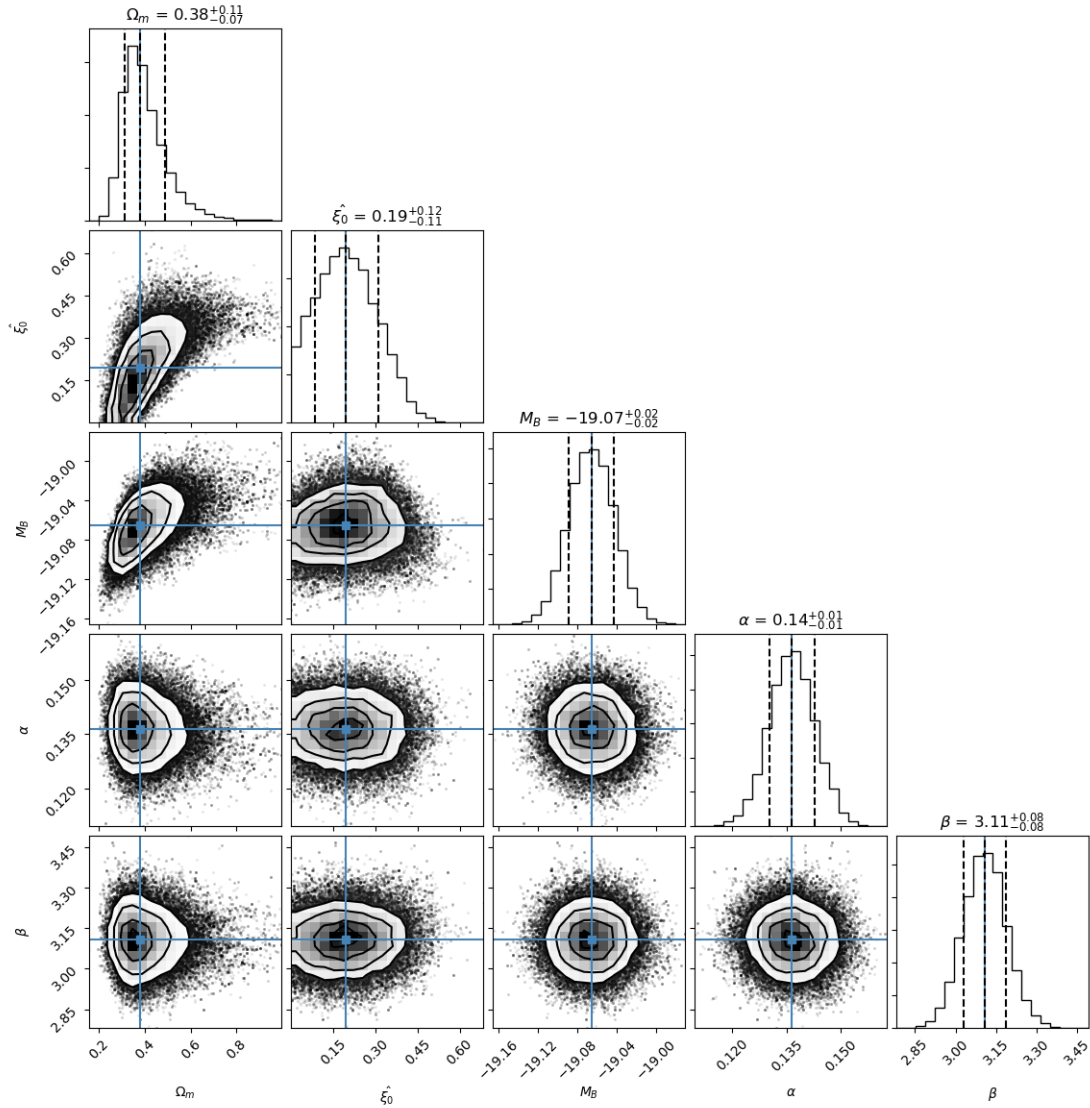


Figura 3.14: Restricción conjunta y marginada de Ω_m y $\hat{\xi}_0$ para la ecuación diferencial (3.20) en el caso CDM con $s = 2$, y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 3.1.

Como se observa en la Tabla 3.2, los ajustes realizados a la ecuación diferencial en la teoría de Eckart exhiben un mejor parámetro de bondad de ajuste en cuanto al valor correspondiente de χ_{min}^2 , salvo en el caso $s = -1$. Esta característica es una de las principales diferencias con respecto al análisis desarrollado con WDM, es decir, prácticamente todos los casos donde se considera como contenido material CDM ajustan de manera mucho más efectiva los datos observacionales de SNe Ia, en comparación con el modelo Λ CDM. A pesar de lo anterior, el Modelo Estándar de la Cosmología sigue siendo, estadísticamente, el modelo cosmológico más favorecido por las observaciones de SNe Ia provenientes del catálogo JLA, debido a su menor valor en BIC. Aún así, considerando que los casos con s fijo sólo poseen un parámetro libre extra con respecto a Λ CDM, se obtiene una diferencia en BIC ligeramente menor a lo visto en el análisis WDM; habiendo una diferencia entre el modelo estándar y el caso $s = 2$ de sólo 6 puntos en BIC, lo que se traduce en evidencia fuerte en contra del último modelo, mucho más promisorio que la evidencia muy fuerte obtenida en el caso que mejor ajustaba a los datos en el análisis WDM. En cuanto a los valores de Ω_m , es en los casos s libre y $s = 2$ donde considerando el error asociado, los valores que mejor ajustan a los datos se encuentran en concordancia con el valor obtenido recientemente por el satélite Planck, mientras que todos los demás casos poseen valores más cercanos a 1, es decir, con CDM es más factible dar cuenta de una expansión acelerada del Universo sin la necesidad de incluir constante cosmológica; hecho que se confirma al observar la figura 3.10, donde para un espectro mayor de valores de s , en comparación con lo visto en el análisis WDM, la densidad de materia puede tomar valores cercanos a 1. La explicación más simple de este hecho es que debido a que se está considerando como contenido material del universo un fluido poco denso como lo es la CDM, entonces la atracción gravitatoria que experimenta el fluido es menor que la atracción gravitatoria que experimentaría un fluido más denso como la radiación y, por ende, la disipación

puede acelerar de mejor manera la expansión del Universo sin la necesidad de una fuerte presencia de DE. El análisis desarrollado en las líneas anteriores se ve reforzado al observar el gráfico presente en la figura 3.15, donde se compara el módulo de la distancia μ obtenido para el modelo estándar de la cosmología Λ CDM con cada uno de los casos estudiados.

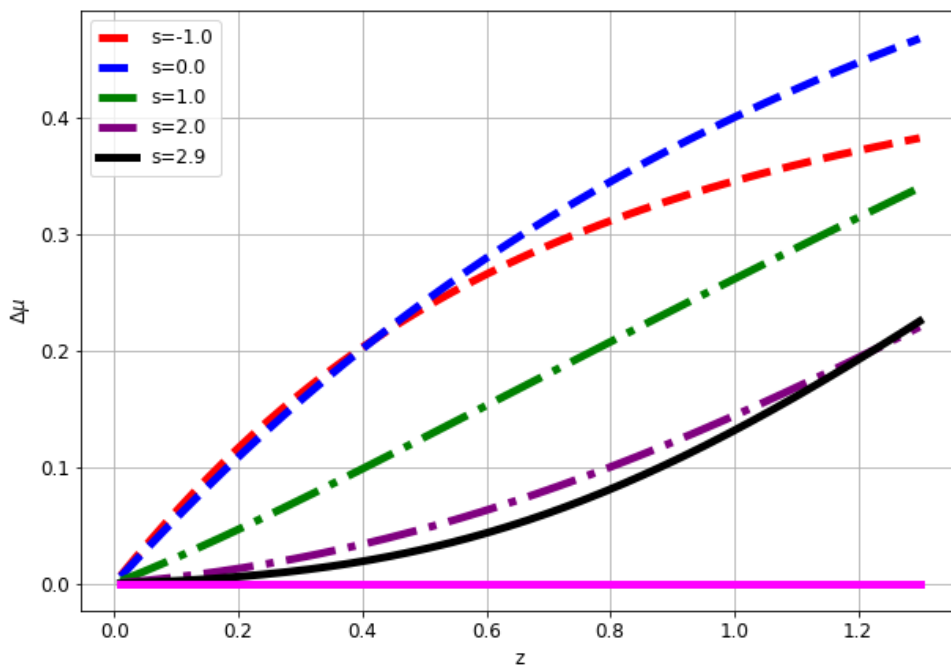


Figura 3.15: Gráfico del módulo de la distancia obtenido de la ecuación diferencial (3.20) para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM, en el análisis CDM. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s . Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.

Note que cada uno de los casos estudiados difiere levemente del modelo

Λ CDM, habiendo una diferencia $\Delta\mu$ no superior a 0.5 puntos. Eso sí, al contrario de lo que pasaba con el análisis WDM, en el análisis CDM todos los casos entregan valores de μ mayores al que entrega Λ CDM. Esto último es, en efecto, esperable; considerando que en el análisis WDM, los casos que tenían esta característica, eran aquellos casos cuyo valor de Ω_m indicaban un universo con una alta contribución de DM. En consecuencia, es esperable que en este análisis todos los casos estudiados sean similares a Λ CDM, en cuanto a la forma del parámetro de Hubble adimensional E . Es importante mencionar que en el análisis WDM, los casos donde los ajustes indicaban una menor necesidad de DE, ajustaban de peor forma que los casos que requerían una mayor cantidad de DE en el universo; contrario a lo observado en el análisis en curso. Por lo tanto, podemos concluir que naturalmente las observaciones de SNe la favorecen un universo dominado por CDM.

En la figura 3.16 se presenta un gráfico de E en función del corrimiento al rojo z . De este gráfico se destaca como efectivamente todos los casos se parecen, en cuanto al valor de H , al Modelo Estándar de la Cosmología; siendo notables las diferencias entre los modelos recién a valores de $z > 0.6$, punto donde comienza aproximadamente la expansión acelerada del Universo. Aún así, los modelos cuyos valores de s son mayores a 0, siguen mostrando una tendencia a un parámetro de Hubble constante hacia el pasado. La explicación de este fenómeno es la misma que la mencionada en el análisis WDM, es decir, tiene directa relación con la elección de la forma matemática para el coeficiente de viscosidad de bulto ξ , la cual en estos casos se vuelve dominante hacia el pasado ó $z \rightarrow \infty$. La única razón por la que no existe una tendencia a una constante para los valores con s más grandes es porque en este análisis el valor de s que mejor ajusta a los datos es de 2.9, valor mucho menor a los 5.3 obtenidos en el caso WDM. Si bien se está evidenciando una aceleración en la expansión en una era donde es característica una expansión desacelerada del Universo, el valor menor de s conduce a una

menor aceleración que cuando $s = 5.3$ a $z > 0.6$.

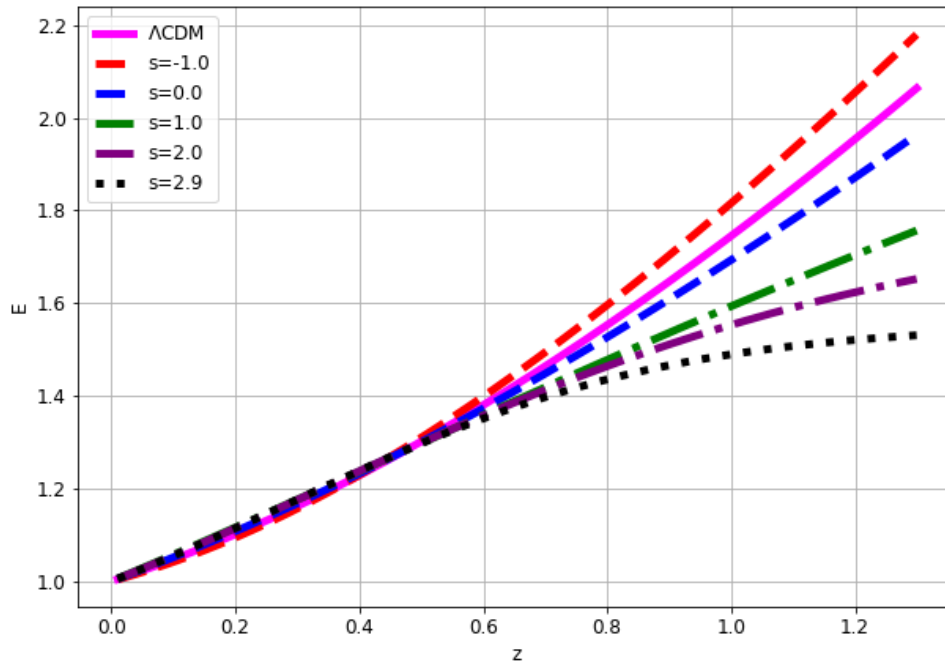


Figura 3.16: Gráfico del parámetro de Hubble adimensional E en función del corrimiento al rojo z , para el modelo Λ CDM y los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis CDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .

Es importante mencionar que cuando se habla de los problemas relacionados con la expresión usada para la viscosidad de bulto (3.6), es siempre considerando que esperamos que las soluciones que mejor ajustan a los datos de SNe Ia serán similares a Λ CDM, debido a que esta última corresponde al mejor Modelo Cosmológico hasta el día de hoy. En base a esto, y siendo estrictos, claramente cuando el parámetro de Hubble tiende a una constante, también lo hacen la

densidad de energía de DM (ver ecuación (3.1)) y, por ende, la viscosidad de bulto. Así, claramente en este caso la viscosidad de bulto no tiende a infinito, como pasaría en el modelo estándar cuando la densidad de energía de DM tiende a infinito hacia el pasado. Sin embargo, la finalidad del análisis es indicar cómo la disipación se vuelve importante en ciertas etapas de la evolución cósmica del universo, llegando al nivel de influir de manera importante en la expansión del universo, tanto o más que la DE. En cuanto al índice barotrópico del phantom efectivo ω_p , este se encuentra representado gráficamente en la figura 3.17.

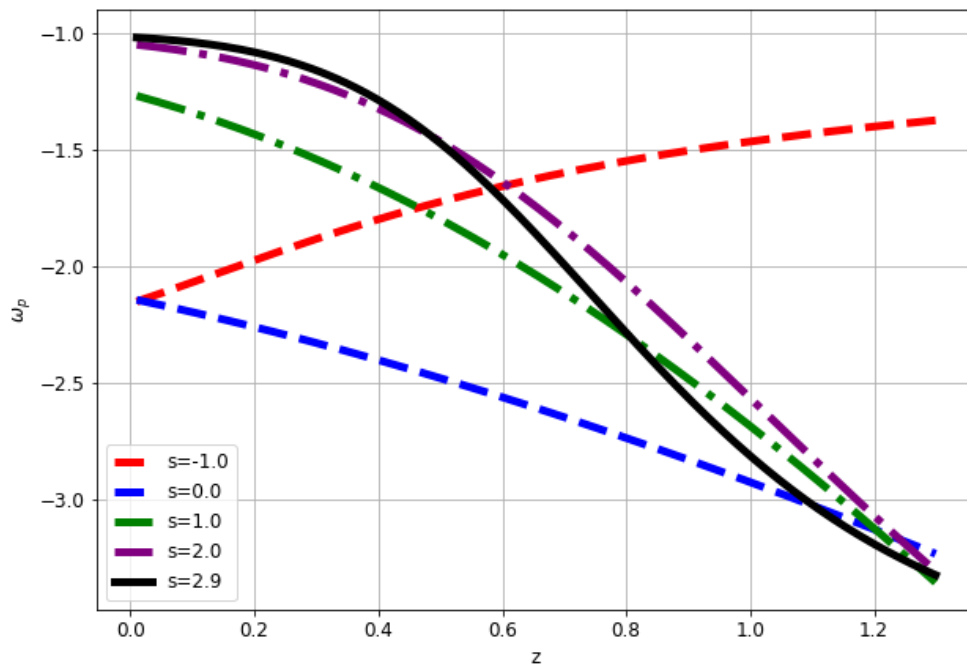


Figura 3.17: Gráfico del phantom efectivo ω_p en función del corrimiento al rojo z , para los modelos obtenidos a partir de la ecuación diferencial (3.20) en el análisis CDM, considerando los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia. Cada uno de los casos se encuentra caracterizado por el valor del parámetro s .

Como es posible observar, la figura anterior no presenta variaciones drásticas con respecto al mismo gráfico expuesto en el análisis WDM. Esto se debe, principalmente, a que el comportamiento en función del corrimiento al rojo depende principalmente de los valores que toma la viscosidad de bulto ξ . Por lo tanto, el análisis realizado en el phantom efectivo en la sección anterior es completamente válido en este análisis, salvo que en este caso no se cumple en ningún punto la condición de equilibrio termodinámico. Note como siguen siendo los casos $s > 0$ los que presentan un phantom muy cercano a -1 a tiempo presente. Esto no es una contradicción con lo visto en el análisis para WDM, ya que si bien el cumplir con la condición de equilibrio termodinámico conduce a un cruce al phantom muy pequeño, esta condición no es un requisito fundamental para este objetivo.

Finalmente, los valores de ξ_0 se encuentran nuevamente dentro de un rango aceptable, pero siendo en este análisis donde se considera CDM, más pequeños que los obtenidos en el ajuste con WDM; tomando valores entre 0.19, en el caso $s = 2$, y 0.36 en el caso $s = 0$. A pesar de lo anterior, siguen con satisfacer el resultado previamente esperado de $\xi_0 \ll 1$, lo cual no representa un problema mayúsculo, nuevamente debido a la forma matemática del coeficiente de viscosidad ξ . Así, una vez más queda de manifiesto que, a pesar de lo efectiva que pueden ser las soluciones en la teoría de Eckart, ya sea considerando WDM O CDM, en cuanto a dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo y, a su vez, obtener una ecuación de estado para la DE phantom efectiva, la elección matemática del coeficiente de disipación de bulto ξ conduce a problemas más severos, como lo es un universo que experimenta aceleración en su expansión, en una época donde el Universo debiese estar en expansión desacelerada. Aún así, es innegable que a pesar de estas grandes diferencias en los casos estudiados con respecto a Λ CDM, los datos observacionales de SNe la siguen indicando que son modelos que puedan dar cuenta de muy buena forma de sus valores experimentales, lo que permite plantearnos la pregunta ¿Qué tan malo es tener

un universo que puede experimentar expansión acelerada a $z > 0.6$?. Al menos, a nivel del background, pareciera que no existe ningún problema. Diferente sería si nos hacemos la misma pregunta a nivel perturbativo, relacionado directamente con la formación de estructuras en el Universo.

Capítulo 4

Cosmología disipativa en la teoría de Israel-Stewart

En este capítulo se discutirá la tercera línea de investigación desde el punto de vista de la cosmología con fluidos disipativos en el marco de la teoría de Israel-Stewart. Debido a la complejidad de la teoría de Israel-Stewart en comparación con la teoría de Eckart, se abordará brevemente la segunda línea de investigación, analizando las variaciones que experimenta un modelo similar al Modelo Estándar de la Cosmología, pero con la DM experimentando disipación durante su evolución cósmica. Suponiendo de antemano, tal como quedó claro en la teoría de Eckart, que el cruce al phantom es siempre posible. Este capítulo estará centrado principalmente en la tercera línea de investigación, debido a que los resultados obtenidos en esta primera parte del capítulo, al igual que lo visto en el capítulo 3, serán indicativos de que una reciente expansión acelerada del Universo puede ser explicada sólo a partir del efecto repulsivo originado por la presión disipativa, asociada a la viscosidad de bulto. Así, se estudiará la posibilidad de obtener soluciones analíticas en la teoría de Israel-Stewart, debido a que es esta la teoría termodinámica fuera del equilibrio más consistente desde el punto de vista físico, para posteriormente comprobar que tan efectivas son estas soluciones al dar

cuenta de las observaciones de SNe Ia.

4.1 La teoría de Israel-Stewart con constante cosmológica

Como se menciona al inicio del capítulo 3, el primero en desarrollar una teoría termodinámica fuera del equilibrio fue Eckart en el año 1940. El problema es que, con el tiempo, se descubrió que la teoría de Eckart es no causal [88] y todos sus estados de equilibrio son inestables [89]. Estos problemas radican en que la teoría de Eckart es de primer orden, es decir, sólo considera desviaciones a primer orden del equilibrio termodinámico. Una teoría relativista de la termodinámica fuera del equilibrio fue desarrollada en el año 1976 por Israel y Stewart [88, 90], siendo demostrado por Hiscock y Lindblom que esta teoría es causal y estable bajo ciertas condiciones razonables [91, 92]. En la teoría de Israel-Stewart junto con la introducción de una presión efectiva, se introduce una ecuación de evolución para la presión disipativa, con un tiempo de relajación asociado, lo que asegura la causalidad. Esta ecuación es:

$$\tau \dot{\Pi} + \Pi = -3\xi H - \frac{1}{2}\tau \Pi \left(3H + \frac{\dot{\tau}}{\tau} - \frac{\dot{\xi}}{\xi} - \frac{\dot{T}}{T} \right), \quad (4.1)$$

donde el “punto” representa la derivada con respecto al tiempo cósmico, τ es el tiempo de relajación y T la temperatura del fluido que experimenta disipación de bulto. Estas expresiones en conjunto con ξ son consideradas, en general, funciones de la densidad de energía del fluido. Es importante destacar que, si $\tau = 0$, la presión disipativa dada por la ecuación anterior se reduce a la presión disipativa dada por la teoría de Eckart (3.5), es decir, la teoría de Israel-Stewart se reduce a la teoría de Eckart.

En lo que sigue, y al igual que lo desarrollado en la teoría de Eckart, se supondrá que el universo se encuentra dominado por dos fluidos plenamente

identificados del sector oscuro: DE en forma de una constante cosmológica positiva y DM expresada como un fluido perfecto el cual experimenta procesos disipativos durante su evolución cósmica. Así, la DM está representada por una EoS barotrópica, indicada en la ecuación (1.7), con $0 \leq \omega < 1$. Para el coeficiente de viscosidad de bulto, como en Eckart, se considera una expresión tipo ley de potencias, indicada en la ecuación (3.6); mientras que para la temperatura, se deduce de la condición de integrabilidad de Gibbs para un fluido perfecto, que

$$T = T_0 \rho^{\frac{\omega}{\omega+1}}, \quad (4.2)$$

donde T_0 es una constante positiva. Una relación simple entre τ y ξ puede ser derivada del estudio de la causalidad y estabilidad de la teoría de Israel-Stewart [44, 91]

$$\frac{\xi}{(\rho + p)\tau} = c_b^2, \quad (4.3)$$

donde c_b es la velocidad de las perturbaciones de la viscosidad de bulto, es decir, la contribución no adiabática a la velocidad del sonido V en un fluido disipativo sin flujo de calor ni viscosidad de cizalle. Debido a que la velocidad del sonido en un fluido disipativo V está dada por $V^2 = c_s^2 + c_b^2$, donde $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ es la contribución adiabática, entonces para un fluido barotrópico se tiene $c_s^2 = \omega$ y, por lo tanto, la velocidad del sonido de las perturbaciones de la viscosidad puede ser expresada en términos del índice barotrópico como

$$c_b^2 = \epsilon(1 - \omega), \quad (4.4)$$

con $0 < \epsilon \leq 1$ (condición de causalidad). Así, de las ecuaciones (1.7), (3.6), (4.3) y (4.4), el tiempo de relajación puede ser escrito de la forma

$$\tau = \frac{\xi_0}{\epsilon(1 - \omega^2)} \rho^{s-1}. \quad (4.5)$$

Con la finalidad de obtener una sola ecuación diferencial para el parámetro de Hubble, H , se debe evaluar las expresiones $\dot{\tau}/\tau$, $\dot{\xi}/\xi$ y \dot{T}/T , presentes en la

ecuación (4.1). Usando la ecuación (3.1), se obtiene las siguientes expresiones

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{6(s-1)}{3H^2 - \Lambda} H\dot{H}, \quad \frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{6s}{3H^2 - \Lambda} H\dot{H} \quad \text{y} \quad \frac{\dot{T}}{T} = \frac{6\omega}{(\omega+1)(3H^2 - \Lambda)} H\dot{H}. \quad (4.6)$$

Ademas, de las ecuaciones (3.1) y (3.9), se obtiene

$$\Pi = - \left[2\dot{H} + (1 + \omega) (3H^2 - \Lambda) \right]. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, haciendo uso de la ecuación (4.1), se obtiene la siguiente ecuación diferencial para H

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_0}{\epsilon(1-\omega^2)} (3H^2 - \Lambda)^{s-1} \left[2\ddot{H} + 6(1+\omega)H\dot{H} \right] - 3\xi_0 (3H^2 - \Lambda)^s H \\ & + \left[1 + \frac{\xi_0}{2\epsilon(1-\omega^2)} (3H^2 - \Lambda)^{s-1} \Delta(H) \right] \left[2\dot{H} + (1+\omega)(3H^2 - \Lambda) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\Delta(H) = \frac{3H}{\delta(\omega)} \left(\delta(\omega) - \frac{\dot{H}}{H^2 - \Lambda/3} \right), \quad \text{con} \quad \delta(\omega) = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega+1}{\omega+1/2} \right). \quad (4.9)$$

La ecuación (4.8) es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal para H , la cual representa la ecuación diferencial general a resolver en la teoría de Israel-Stewart.

La teoría de Israel-Stewart está construida de forma similar a la teoría de Eckart, es decir, la desviación de la teoría con respecto al equilibrio termodinámico es muy pequeña, lo que se traduce en la condición vista en la ecuación (3.8); condición que según la ecuación (3.15) se puede satisfacer en ciertos escenarios cuando se considera una constante cosmológica no nula. Más aún, debido a que la única diferencia entre la teoría de Israel-Stewart y la teoría de Eckart es la expresión asociada a la presión disipativa Π , es posible definir en Israel-Stewart el mismo índice barotrópico efectivo definido en la teoría de Eckart y dado por la ecuación (3.12). El problema de esta última definición radica en que los análisis realizados en la teoría de Eckart, como el phantom efectivo pequeño para el índice barotrópico efectivo cuando se satisface la condición de equilibrio termodinámico,

ya no son válidos; esto por la ya mencionada diferencia en las expresiones asociadas a la presión disipativa, que en este caso corresponde a una ecuación de transporte. Esta dificultad matemática presente en la teoría Israel-Stewart queda de manifiesto al comparar la ecuación (3.7) con la ecuación (4.8). Por lo tanto, no se analizará directamente la forma que tiene el phantom efectivo en esta teoría y, en cambio, se analizará como influyen los efectos disipativos en el Modelo Estándar de la Cosmología Λ CDM. Es importante destacar que, a pesar de que no se estudiará directamente la forma gráfica que adopta el phantom efectivo en función del corrimiento al rojo, es evidente de las ecuaciones (3.12) y (4.1), que el comportamiento phantom es posible.

Para el análisis se realizará un ajuste de la ecuación diferencial general a resolver (4.8) con SNe Ia, pero al contrario de lo realizado en los últimos dos capítulos, en este caso se utilizará el catálogo Unión 2.1 [18]. Se debe recalcar que el ajuste utilizando Unión 2.1 difiere levemente de lo indicado en el capítulo 1 sección 1.3 para JLA, diferencia principalmente relacionada con la elección de χ^2 para la función de verosimilitud (1.19). Por ende, con la finalidad de mantener la estructura de este trabajo, el cual basa sus ajustes en el catálogo JLA, no se entrará en detalle con las diferencias presentes en el ajuste con Unión 2.1, y se mencionará los aspectos importantes, que permiten replicar este ajuste con JLA.

Para el ajuste, se utiliza la relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo (1.12), con $a_0 = 1$ representando el tiempo actual ($z = 0$), en la ecuación (4.8); junto con la definición del parámetro de densidad de DE $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$, con $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Además, se utiliza la definición del parámetro de Hubble adimensional (1.22), donde H_0 es el parámetro de Hubble evaluado a día de hoy y correspondiente al modelo Λ CDM. Por otro lado, se define el parámetro libre ξ_0 de manera adimensional, de la forma

$$\hat{\xi}_0 = \frac{\xi_0}{H_0^{1-2s}}. \quad (4.10)$$

Así, considerando que se están analizando los efectos disipativos en el modelo

Λ CDM, se considerará para la DM un fluido sin presión y, por ende, el vector de parámetros en este ajuste es $\vec{p} = (s, \Omega_m, \hat{\xi}_0)$. El parámetro libre ϵ no es considerado dentro del vector de parámetros \vec{p} , debido a que el análisis se realizara para valores particulares de ϵ , específicamente para los valores 0.01, 0.1, 0.5 y 1. En adición, las condiciones iniciales son elegidas de tal forma de coincidir con Λ CDM a un cierto corrimiento al rojo z_0 , es decir

$$E(z_0) = E_{\Lambda CDM} = \sqrt{\Omega_m (1 + z_0)^3 + 1 - \Omega_m}. \quad (4.11)$$

Después de resolver la ecuación diferencial (4.8), el valor correspondiente de Ω_m que mejor ajusta los datos de SNe la debe ser normalizado por $E^2(0)$, con la finalidad de entregar la densidad de DM real predicha por el modelo. Por ende, se define el parámetro de densidad de DM de la forma

$$\hat{\Omega}_m = \frac{\Omega_m}{E^2(0)}. \quad (4.12)$$

Los valores que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.1. Es importante destacar que el único prior utilizado en este ajuste corresponde a $\Omega_m > 0$.

Como se observa en la Tabla 4.1, tanto el modelo Λ CDM como los casos analizados en Israel-Stewart, exhiben un valor similar de bondad de ajuste en cuanto al valor de χ_{min}^2 . Incluso, los casos particulares $\epsilon = 1$ y $\epsilon = 0.5$, poseen un valor de χ_{min}^2 ligeramente menor al del Modelo Estándar. La diferencia más notable la exhibe el caso $\epsilon = 0.5$, con 0.4 puntos más en el valor de χ_{min}^2 en comparación con Λ CDM. Aún así, el Modelo Estándar de la Cosmología sigue siendo, estadísticamente, el modelo más favorecido por las observaciones debido a su menor valor en BIC, con diferencias sobre los 10 puntos en BIC con respecto a los casos analizados en Israel-Stewart, lo cual es evidencia fuerte en contra de estos modelos. Esto se debe principalmente a la cantidad de parámetros libres presentes en estos últimos; parámetros que se debe recalcar son parte

intrínseca del modelo y no son agregados con la finalidad de mejorar el ajuste de las observaciones.

Caso	Valores de mejor ajuste			Bondad de ajuste		
	s	$\hat{\Omega}_m$	$\hat{\xi}_0$	χ^2_{min}	AIC	BIC
Λ CDM	-	0.29 ± 0.03	-	542.7	544.7	549.0
$\epsilon = 1$	-1.47 ± 0.6	0.63 ± 0.72	482 ± 342	542.6	548.6	561.6
$\epsilon = 0.5$	-3.75 ± 1.52	0.32 ± 0.13	579 ± 217	542.4	548.4	561.4
$\epsilon = 0.1$	61 ± 20	0.26 ± 0.02	-104.511 ± 649	543.1	549.1	562.1
$\epsilon = 0.01$	85 ± 21	0.26 ± 0.03	284 ± 542	542.8	548.8	561.8

Tabla 4.1: Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe Ia del catálogo Unión 2.1, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; la segunda, tercera, cuarta y quinta fila corresponde a los valores de mejor ajuste para la ecuación diferencial (4.8), en los casos particulares donde ϵ es igual a 1, 0.5, 0.1 y 0.01, respectivamente. Debido a que para el ajuste se utiliza el catálogo de Unión 2.1, no aparecen en la tabla los parámetros de la curva de la luz característicos de JLA.

El resultado más destacable de este ajuste radica en cómo el valor del parámetro libre ϵ afecta el valor que mejor ajusta a los datos y sus errores correspondientes, para cada uno de los parámetros libres del modelo. En particular, entre mayor es el valor de ϵ , mayor es el error de $\hat{\Omega}_m$. Esto se debe a las características de este modelo, ya que si el valor de la velocidad del sonido para las fluctuaciones viscosas incrementa, la teoría de Israel-Stewart en sí misma es capaz de reproducir la reciente expansión acelerada del Universo sin la necesidad de incluir una constante cosmológica. Es importante destacar que un resultado

similar fue encontrado en el capítulo 3, en el estudio de la teoría de Eckart en los casos WDM y CDM. La diferencia entre ambos casos radica en que en la teoría de Eckart, la expansión acelerada sin constante cosmológica depende fuertemente del valor de s ; mientras que en la teoría de Israel-Stewart depende fuertemente del valor de ϵ . Así, se puede concluir que tanto la teoría de Eckart como la teoría de Israel-Stewart son capaces de dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo, sin la necesidad de utilizar una constante cosmológica o, lo que es lo mismo, de incluir en el contenido material del universo la DE. Considerando que la teoría de Israel-Stewart es la más consistente desde el punto de vista físico, se hace necesario su estudio sin constante cosmológica, lo que a su vez corresponde a la tercera línea de investigación.

4.2 Solución analítica en la teoría de Israel-Stewart sin constante cosmológica

Considerando la conclusión indicada al final de la sección anterior, se considerará la ecuación (4.8) con $\Lambda = 0$ y $\omega = \gamma - 1$, lo cual conduce a

$$\begin{aligned} \ddot{H} + 3H\dot{H} + (3)^{1-s}\xi_0^{-1}\epsilon\gamma(2-\gamma)H^{2-2s}\dot{H} - \frac{(2\gamma-1)}{\gamma}H^{-1}\dot{H}^2 \\ + \frac{9}{4}\gamma[1-2\epsilon(2-\gamma)]H^3 + \frac{1}{2}(3)^{2-s}\xi_0^{-1}\epsilon\gamma^2(2-\gamma)H^{4-2s} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

ecuación que para el caso especial $s = 1/2$ posee una solución phantom de la forma $H(t) = A(t_s - t)^{-1}$, con $A > 0$, $\epsilon = 1$ y la restricción $0 < \gamma < 3/2$ [93]. Esta solución puede representar universos acelerados si $A > 1$, universos de Milne si $A = 1$ y universos desacelerados si $A < 1$, todos con una singularidad inicial a $t = t_s$ [94].

Una nueva solución analítica puede ser encontrada para la ecuación (4.13) si se considera el valor particular de $s = 1/2$. En efecto, en este caso la ecuación

diferencial (4.13) toma la forma

$$\ddot{H} + d_1 H \dot{H} + d_2 H^3 - d_3 \frac{\dot{H}^2}{H} = 0, \quad (4.14)$$

donde por simplicidad, se han definido las constantes

$$d_1 \equiv 3 \left[1 + \frac{\epsilon \gamma (2 - \gamma)}{\sqrt{3} \xi_0} \right], \quad (4.15)$$

$$d_2 \equiv \frac{9}{4} \gamma \left\{ [1 - 2\epsilon (2 - \gamma)] + \frac{2\epsilon \gamma (2 - \gamma)}{\sqrt{3} \xi_0} \right\}, \quad (4.16)$$

$$d_3 \equiv \frac{2\gamma - 1}{\gamma}. \quad (4.17)$$

Para resolver la ecuación (4.14) se realiza un cambio de variable del tiempo cósmico t a $x = \ln(a)$, por lo que la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{d^2 H}{dx^2} + d_1 \frac{dH}{dx} + d_2 H + \frac{1 - d_3}{H} \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 = 0, \quad (4.18)$$

la cual es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Usando el Ansatz

$$H(x) = e^{-\frac{d_1 x}{2(2-d_3)}} \phi(x), \quad (4.19)$$

la ecuación (4.18) toma la forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[d_2 - \frac{d_1^2}{4(2-d_3)} \right] \phi + \frac{(1-d_3)}{\phi} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 0, \quad (4.20)$$

es decir, se ha eliminado la derivada de primer orden presente en la ecuación. Ahora, para eliminar el término no lineal de la ecuación anterior, se hace necesario utilizar un nuevo Ansatz de la forma

$$\phi(x) = [\Phi(x)]^{\frac{1}{2-d_3}}, \quad (4.21)$$

y por ende, la ecuación (4.20) se reduce a la expresión

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{1}{4} [d_1^2 + 4d_2 (d_3 - 2)] \Phi = 0, \quad (4.22)$$

expresión que corresponde a una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Así, la solución general a la ecuación (4.18) puede ser escrita de la forma

$$H(x) = e^{-\alpha x} [A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x)]^\gamma, \quad (4.23)$$

donde A y B son constantes de integración, y las constantes α y β son definidas, considerando las ecuaciones (4.15–4.17), de la forma

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\xi_0} \left[\sqrt{3}\xi_0 + \epsilon\gamma(2 - \gamma) \right], \quad (4.24)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\xi_0} \sqrt{6\xi_0^2\epsilon(2 - \gamma) + \epsilon^2\gamma^2(2 - \gamma)^2}. \quad (4.25)$$

Debido a que la ecuación diferencial (4.14) es de segundo orden, se necesitan dos condiciones iniciales para establecer las constantes A y B , presentes en la ecuación (4.23). Por lo tanto, considerando a partir de la ecuación (1.12) que $x = -\ln(1 + z)$, donde $a_0 = 1$ representa el tiempo actual y aplicando como condiciones iniciales que $H(z = 0) = H_0$ y $q(z = 0) = q_0 = -1 - \dot{H}_0/H_0^2$, donde H_0 y q_0 son el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración al tiempo actual, respectivamente, entonces la ecuación (4.23) puede ser escrita, finalmente, de la forma

$$H(z) = C_3 (1 + z)^\alpha \cosh^\gamma [\beta (\ln(1 + z) + C_4)], \quad (4.26)$$

donde C_3 y C_4 son constantes dadas por

$$C_3 = \frac{H_0}{\cosh^\gamma(\beta C_4)} = H_0 \left[1 - \frac{(q_0 + 1 - \alpha)^2}{\gamma^2 \beta^2} \right]^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (4.27)$$

$$C_4 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctanh} \left[\frac{(q_0 + 1) - \alpha}{\gamma \beta} \right]. \quad (4.28)$$

Es importante destacar de las ecuaciones (4.27) y (4.28) que, con la finalidad de que el parámetro de Hubble (4.26) sea real, el parámetro de desaceleración a tiempo actual q_0 debe satisfacer la restricción

$$(\alpha - \gamma\beta) - 1 < q_0 < (\alpha + \gamma\beta) - 1, \quad (4.29)$$

y por consiguiente, el parámetro de Hubble es positivo durante toda la evolución cósmica.

Un aspecto importante de la ecuación diferencial (4.18) es que es invariante de escala, es decir, si se realiza el cambio conforme $H(x) \rightarrow \sigma H(x)$ con σ constante, entonces la ecuación diferencial permanece sin cambios. Por ende, se busca soluciones a la ecuación diferencial de la forma

$$H(x) = e^{\lambda x}, \quad (4.30)$$

la cual conduce a la siguiente condición sobre la constante λ

$$\lambda_{\pm} = \frac{-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 4d_2(d_3 - 2)}}{2(2 - d_3)}. \quad (4.31)$$

Debido a que la ecuación (4.18) es una ecuación diferencial no lineal, entonces el principio de superposición ya no es válido. Por lo tanto, de las ecuaciones (4.30) y (4.31), se obtiene en principio dos soluciones independientes

$$H_+(x) = e^{\lambda_+ x} \quad \text{y} \quad H_-(x) = e^{\lambda_- x}. \quad (4.32)$$

Aún así, es posible explorar las condiciones bajo las cuales una combinación lineal de las soluciones (4.32) es también solución. Considerando entonces que

$$H(x) = C_1 H_+(x) + C_2 H_-(x), \quad (4.33)$$

e insertándola en la ecuación (4.18), se obtiene la siguiente condición para los parámetros definidos en las ecuaciones (4.15–4.17)

$$(\lambda_+^2 + \lambda_-^2) + d_1(\lambda_+ + \lambda_-) + 2d_2 + 2(1 - d_2)\lambda_+\lambda_- = 0. \quad (4.34)$$

La condición anterior no implica una restricción sobre las constantes C_1 y C_2 , sino que conduce a una nueva restricción sobre los parámetros libres del modelo ϵ , γ y ξ_0 ; restricción que puede ser escrita de la forma

$$\frac{(1 - d_3)}{(2 - d_3)} \left[4d_2 - \frac{d_1^2}{(2 - d_3)} \right] = 0. \quad (4.35)$$

Esta restricción entrega dos posibilidades. La primera posibilidad considera que $c_b^2 \gamma^2 / 6\xi_0^2 = -1$, la cual claramente no puede ser cumplida para parámetros libres reales. La segunda posibilidad es $1 - d_3 = 0$, la cual implica que $\gamma = 1$. Por lo tanto, la combinación lineal es solución de la Eq. (4.18) sólo cuando γ toma el valor particular de 1. Es importante destacar que, en este caso particular, la ecuación (4.18) se convierte en una ecuación diferencial de segundo orden lineal, cuyas soluciones están dadas en efecto por la combinación lineal de la ecuación (4.33). Así, considerando las ecuaciones (4.15–4.17), (4.30) y (4.31) con $\gamma = 1$, y recordando que $x = -\ln(1+z)$, la solución a un universo dominado por CDM puede ser escrita de la forma

$$H(z) = H_0 [C_1 (1+z)^{m_1} + C_2 (1+z)^{m_2}], \quad (4.36)$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble al tiempo actual y

$$m_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\xi_0} \left(\sqrt{3}\xi_0 + \epsilon + \sqrt{6\xi_0^2\epsilon + \epsilon^2} \right), \quad (4.37)$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\xi_0} \left(\sqrt{3}\xi_0 + \epsilon - \sqrt{6\xi_0^2\epsilon + \epsilon^2} \right), \quad (4.38)$$

$$C_1 = \frac{(q_0 + 1) - m_2}{m_1 - m_2}, \quad (4.39)$$

$$C_2 = \frac{m_1 - (q_0 + 1)}{m_1 - m_2}. \quad (4.40)$$

En las expresiones anteriores, nuevamente se ha utilizado como condición inicial los parámetros de Hubble y desaceleración, H_0 y q_0 , al tiempo actual, además de la condición $C_1 + C_2 = 1$. Esta solución fue encontrada previamente y discutida en [95], pero con la relación particular para el tiempo de relajación de la forma $\tau = \xi_0 \rho^{s-1}$, en lugar de la relación más general indicada en la ecuación (4.3), en donde es impuesta la condición de causalidad $0 < \epsilon \leq 1$. Desde el punto de vista perturbativo, es necesario tener conocimiento de la velocidad del sonido

en el fluido, el cual debe ser muy cercano a cero con tal de ser compatible con la formación de estructuras en el Universo. En este sentido, como sucede en la solución previamente encontrada, imponer desde un comienzo $\epsilon = 1$ conduce a posibles soluciones en el marco de la teoría de Israel-Stewart que pueden ser razonables al nivel del background, pero que presentan problemas a nivel perturbativo [86].

4.3 Ajuste de la solución analítica con SNe Ia

En esta sección se discutirán los resultados derivados de ajustar los parámetros libres de las soluciones (4.26), denominado caso general; y (4.36), denominado caso particular. Note que el objetivo es ver si ambas soluciones pueden dar cuenta de las observaciones de SNe Ia dadas por el catálogo JLA, lo cual se traduce en confirmar si ambas soluciones, una con WDM y la otra con CDM como principal componente material del universo, son capaces de dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo, sin la necesidad de incluir una componente de DE y sólo gracias al efecto repulsivo generado por la presión disipativa asociada a la viscosidad de bulto que experimenta la DM. Es importante destacar que debido a que se trabaja en la teoría termodinámica fuera del equilibrio más consistente desde el punto de vista físico, es necesario corroborar que la DM, a pesar de la disipación, puede seguir siendo descrita como un fluido, siendo esta condición dada por la restricción $\tau H < 1$. Esta expresión puede entenderse como que el tiempo de relajación, tiempo que demora el sistema en volver al equilibrio termodinámico, tiene que ser mucho menor que el tiempo característico, H^{-1} , asociado a la expansión del universo. Usando las ecuaciones (3.1) y (4.5), esta restricción puede ser escrita de la forma

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{3}\epsilon\gamma(2-\gamma)} < 1. \quad (4.41)$$

En cuanto al ajuste, y debido a que en ambas soluciones sólo se tiene presencia de DM, se debe entonces imponer la condición $\Omega_m = 1$. Por otro lado, para el ajuste se utiliza directamente las expresiones para el parámetro de Hubble dadas por las ecuaciones (4.26) y (4.36), pero en su forma adimensional. Considerando que $[\xi_0] = [H_0]^{1-2s}$ y recordando que las soluciones son encontradas para el valor particular $s = 1/2$, entonces claramente el parámetro ξ_0 es adimensional, al igual que los parámetros ϵ y γ . Por ende, los parámetros de Hubble al ser divididos por H_0 quedan definidos de manera adimensional. Así, el vector de parámetros para el caso general es $\vec{p} = (\xi_0, \epsilon, \gamma)$, para el cual usamos el prior $0 < \xi_0 < 500$, $0 < \epsilon < 1$ y $1 < \gamma < 2$; y para el caso particular, el vector de parámetros es $\vec{p} = (\xi_0, \epsilon)$, para el cual utilizamos el prior $0 < \xi_0 < 500$ y $0 < \epsilon < 1$. Es importante mencionar que en ambos casos se impone el valor actual del parámetro de desaceleración $q_0 = -0.6$ como condición inicial [12]. Los valores que mejor ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.2. En las figuras 4.1-4.2 se presentan las regiones creíbles de los ajustes realizados a los casos general y particular.

Como se observa en la Tabla 4.2, tanto el Modelo Estándar de la Cosmología como las dos soluciones estudiadas en esta sección, ajustan de muy buena forma los datos observacionales de SNe Ia del catálogo JLA, en lo que respecta al valor de χ_{min}^2 . Pero es el modelo Λ CDM el que posee el menor valor tanto de χ_{min}^2 , AIC y BIC , es decir, es el modelo más favorecido estadísticamente por las observaciones. Aún así, los dos casos estudiados no pueden ser descartados inmediatamente, debido que la diferencia en χ_{min}^2 no es mayor a 1.6 puntos. Por otro lado, la diferencia en BIC con respecto a Λ CDM es de 14.8 puntos, en el caso general; y 8 puntos en el caso particular. Es decir, en el primer caso tenemos evidencia muy fuerte en contra del modelo y en el segundo sólo evidencia fuerte en contra del modelo. Esta desventaja de los modelos ajustados en cuanto al valor del BIC se debe a la mayor cantidad de parámetros libres que poseen, parámetros

que se debe recalcar no han sido agregados con la finalidad de mejorar el ajuste, sino que son parámetros propios del modelo. Por lo tanto se puede concluir que, efectivamente ambas soluciones ajustadas pueden dar cuenta perfectamente de la reciente expansión acelerada del Universo, sin la necesidad de una componente de DE. Este análisis se ve corroborado al analizar la diferencia existente entre el módulo de la distancia μ entregado por Λ CDM, al obtenido de cada uno de los casos estudiados, presente en la figura 4.3

Caso	Valores de mejor ajuste				Bondad de ajuste		
	Ω_m	ξ_0	ϵ	γ	χ^2_{min}	AIC	BIC
Λ CDM	0.29 ± 0.03	-	-	-	692.1	700.1	718.5
General	1	$245.2^{+174.3}_{-167.9}$	$0.60^{+0.22}_{-0.13}$	$1.26^{+0.20}_{-0.19}$	693.7	705.7	733.3
Particular	1	$246.1^{+171.1}_{-169.6}$	$0.44^{+0.05}_{-0.04}$	1	693.4	703.4	726.5

Tabla 4.2: Valores de los parámetros libres \vec{p} que mejor ajustan a los datos de SNe la del catálogo JLA, así como sus respectivos criterios de bondad de ajuste. La primera fila representa los valores de mejor ajuste correspondiente al Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM; mientras que la segunda y tercera fila corresponde a los casos general y particular en estudio, respectivamente. El parámetro de la curva de la luz α y β para todos los casos es 0.14 ± 0.01 y 3.11 ± 0.08 , respectivamente. El parámetro de la curva de la luz M_B es -19.08 ± 0.02 en el caso Λ CDM y -19.09 ± 0.02 en los casos general y particular.

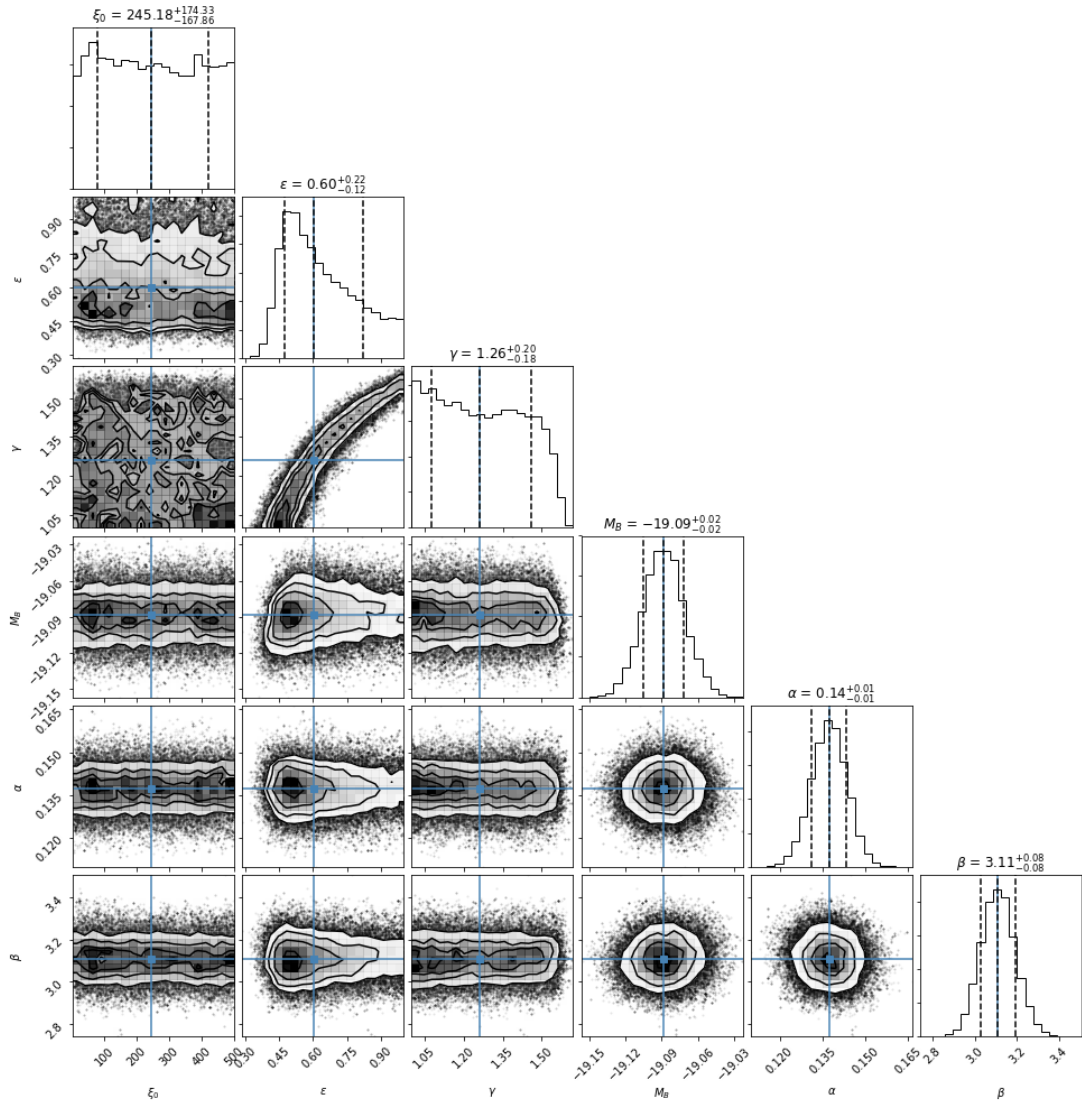


Figura 4.1: Restricción conjunta y marginada de ξ_0 , ϵ y γ para el caso general dado por la solución (4.26), y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95.5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.2.

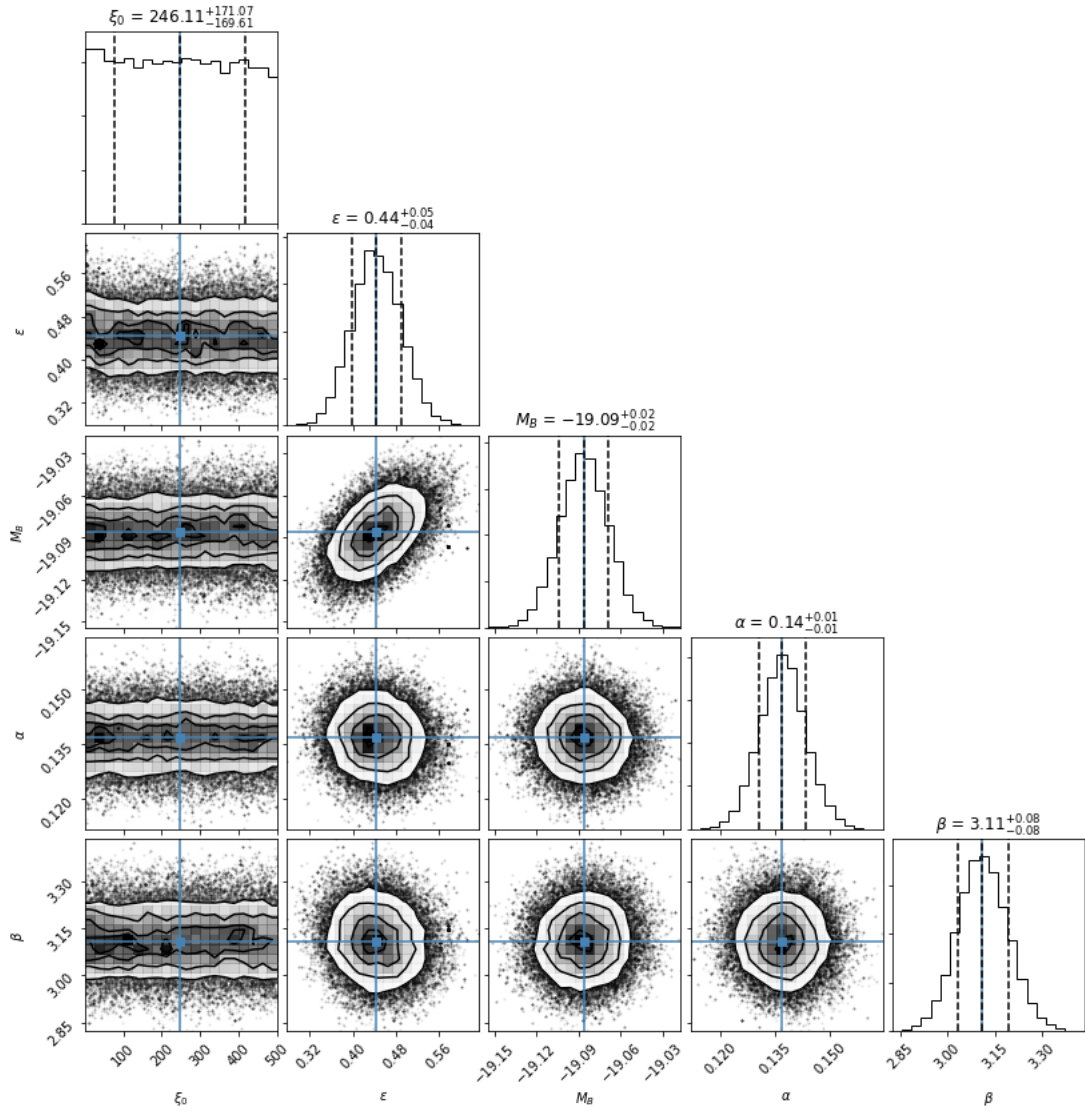


Figura 4.2: Restricción conjunta y marginada de ξ_0 y ϵ para el caso particular dado por la solución (4.36), y la restricción marginal de los parámetros de la curva de la luz M_B , α y β , del catálogo JLA. Las regiones admisibles corresponden a 1σ (68.3%), 2σ (95,5%) y 3σ (99.7%) de nivel de confianza, respectivamente. Los valores de los parámetros que mejor se ajustan a los datos, así como los criterios de bondad de ajuste, se encuentran en la Tabla 4.2.

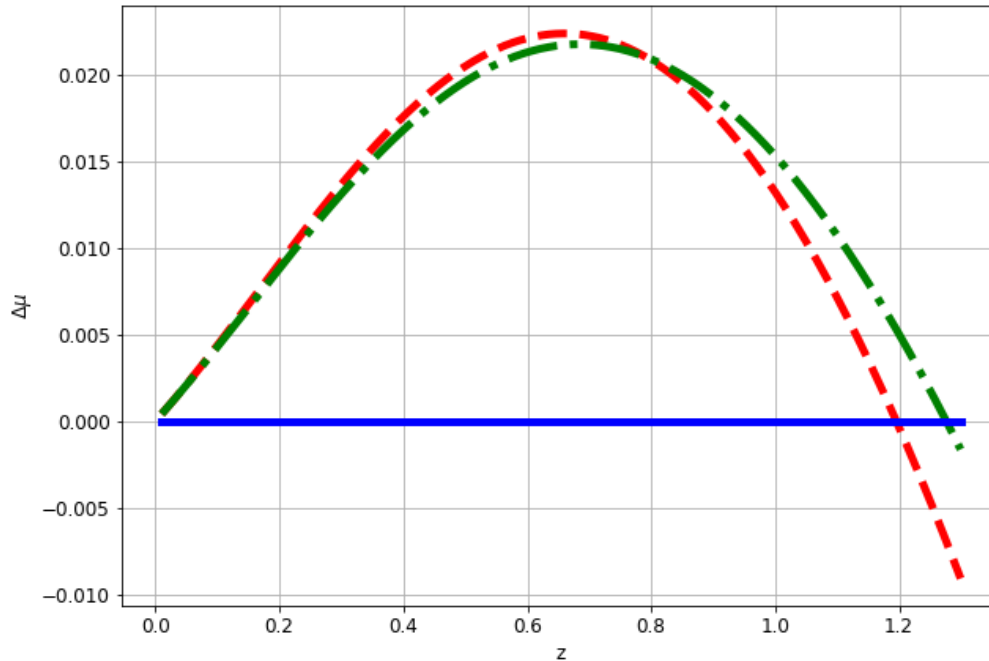


Figura 4.3: Gráfico del módulo de la distancia obtenido de los casos general y particular para los parámetros que mejor ajustan a los datos de SNe Ia, a los cuales se le ha restado el módulo de la distancia obtenido para el modelo Λ CDM. La línea discontinua representa el caso general y la línea discontinua-punteada el caso particular. Por construcción, el modelo Λ CDM está representado por $\Delta\mu = 0$.

Notar como a pesar de lo que nos indica los criterios de bondad de ajuste, claramente las soluciones ajustadas pueden describir perfectamente el comportamiento dado por los datos observacionales de SNe Ia. Esto ya que ambas soluciones ajustadas difieren levemente del modelo Λ CDM, a pesar de ser, en esencia, bastante diferentes.

Poniendo énfasis en los valores de los parámetros libres que mejor ajustan

a los datos de SNe Ia, en principio los valores de ξ_0 no se ven modificados en cuanto al valor medio y el error en los casos general y particular, debido a que los datos de SNe Ia no son suficientes para ajustar de manera precisa el valor del coeficiente de viscosidad de bulto. Este hecho puede ser visto claramente en las figuras 4.1 y 4.2, donde el parámetro ξ_0 toma con prácticamente igual probabilidad todos los valores presentes en sus respectivos prior, es decir, para los datos de SNe Ia le es indiferente el valor que tenga ξ_0 . Los valores de ϵ y γ en la solución general, y de ϵ en la solución particular, si pueden ser ajustados de buena forma por los datos de SNe Ia. En cuanto al valor de ϵ , es posible ver como el valor que mejor ajusta a los datos en el caso general es 0.60. Además, como se observa en la figura (4.1), los valores de ϵ toman con cierta probabilidad valores incluso cercanos a 1. Diferente es el caso de la solución particular, donde el valor que mejor ajusta los datos es $\epsilon = 0.44$, y de la figura 4.2 se observa que los valores de este parámetro se encuentran muy cerca del valor de mejor ajuste, sin dispararse a valores tan grandes como 1. Así, resulta evidente que, tal como se observó en la primera sección de este capítulo, efectivamente un valor cercano a la unidad del parámetro libre ϵ permite a la teoría dar cuenta sin ningún problema de la reciente expansión acelerada del Universo, valor que es menor en el caso particular debido a que ahí se considera como principal contenido del universo CDM, materia que ofrece menor atracción gravitacional que cualquier tipo de WDM, por lo que a la disipación le es más fácil suplir la carencia de una DE para poder acelerar la expansión del universo. Así el parámetro ϵ , que da cuenta de la contribución no adiabática a la velocidad del sonido de las perturbaciones y relacionado intrínsecamente con el tiempo de relajación τ mediante la ecuación (4.5), es para los datos de SNe Ia el parámetro fundamental con la finalidad de obtener un universo en expansión acelerada sin contenido de DE; y cuyo valor es inconsistente con el valor de $10^{-11} \ll \epsilon \lesssim 10^{-8}$ reportado en [86], valor obtenido con la finalidad de que la teoría sea consistente con la formación de estructuras

en el Universo. Considerando que el tiempo de relajación se encuentra además ligado al coeficiente de viscosidad de bulto (3.6), cuya expresión matemática para $s = 1/2$ nos indica, considerando que la densidad de DM crece hacia el pasado y tiende a cero hacia el futuro, que la disipación que provoca la presión disipativa, la que a su vez provoca la aceleración en la expansión del universo, se vuelve importante hacia el pasado, en un punto donde su contribución no es necesaria, y se vuelve cero hacia el futuro, donde su contribución es necesaria. Así, la teoría sólo es capaz de dar cuenta de la expansión acelerada del Universo, considerando un valor de ϵ que es completamente incompatible con otro tipo de pruebas, como lo es la teoría de perturbaciones.

Otro aspecto importante a destacar tiene relación con la condición que impone una descripción de la DM como fluido y dada por la Eq. (4.41), condición que considerando los valores de ξ_0 , ϵ y γ obtenidos en ambos casos estudiados como valores de mejor ajuste, nos permiten concluir que la restricción no puede ser cumplida. Aún así, este análisis es considerando un valor de ξ_0 para ambos casos que, en principio, no puede ser considerado como un valor de mejor ajuste debido a lo mencionado anteriormente con respecto a los datos de SNe Ia. Por lo tanto, el asegurar que la DM no cumple con la descripción de fluido no es posible, y para eso se necesita agregar más datos observacionales con tal de ajustar de mejor forma ξ_0 , como lo pueden ser los datos de BAO, CMB, entre otros. Es importante destacar que, en el caso general o, visto de otra forma, en el caso donde se tiene WDM como principal contenido material del universo, el valor que mejor ajusta a los datos de γ es 1.26, valor que está lejos de ser un valor cercano a 1, es decir, cercano a CDM. Observando la figura 4.2 se puede concluir que, si bien los datos de SNe Ia nos permiten establecer que el valor de γ en este caso es inferior a 1.5 aproximadamente, no es capaz de establecer con precisión qué valor dentro del intervalo $[1, 1.5]$ es considerado el más probable. Por ende, si bien el valor obtenido se puede considerar un valor que mejor ajusta los datos de SNe Ia, el considerar

otra data observacional permitiría obtener un mejor ajuste a este parámetro libre y así, poder asegurar que tan alejado de un CDM se encuentra la DM en este caso. Los resultados anteriores permiten adelantar que una aproximación causal a la posibilidad de DM disipativa, en el contexto de la teoría de Israel-Stewart, puede dar cuenta de una expansión acelerada del Universo sin la inclusión de una componente de DE. Sin embargo, hay temas que merecen un mayor grado de investigación, puesto que las soluciones encontradas presentan inconvenientes a nivel perturbativo y en términos de tener una descripción consistente de la DM como fluido.

Conclusiones

En conclusión, se han discutido a cabalidad y encontrado resultados importantes con respecto a las tres líneas de investigación propuestas al inicio de este trabajo de tesis.

En el capítulo 2 se ha mostrado que soluciones cosmológicas estudiadas previamente para un universo plano y dominado por una G_{EoS} con un comportamiento phantom, pueden dar lugar a soluciones sin singularidades a tiempo futuro, evitando las singularidades tipo Big Rip características de estos fluidos y, a su vez, ajustar de muy buena manera los datos observacionales provenientes de SNe Ia, lo que los vuelve modelos viables a tiempos tardíos. Adicionalmente, estos modelos dan lugar a soluciones con un comportamiento regular a tiempos tempranos. En otras palabras, las soluciones estudiadas son regulares a todo tiempo, excepto en el caso asintótico (inalcanzable) $t \rightarrow \infty$, obtenidas a partir de ciertas condiciones razonables que se deben cumplir. Estas condiciones fueron encontradas, tomando como punto de partida, las condiciones encontradas por Frampton et. al. [73] que permiten a una solución evitar la singularidad tipo Big Rip. Siendo extendidas estas condiciones de tal forma que las soluciones que cumplan con las mismas puedan evitar, simultáneamente, las singularidades tipo Big Rip y tipo Big Bang, esta última a tiempos tempranos.

El resultado más notable indica que para un espacio plano en la métrica de FLRW, los únicos universos que se encuentran libres de singularidades, considerando que se encuentran dominados por fluido dado por una G_{EoS} cuyo

índice barotrópico cumple con $\omega < -1$, son sólo los universos del tipo emergente y rebotante. Además, todas las soluciones que pueden ser representadas por el factor de escala $a(t) = e^{g(t)} + s$ van a representar universos regulares y Little Rip, si y sólo si, $g(t)$ satisface las condiciones (2.15) si $s = 0$ y (2.16) si $s > 0$. En este mismo contexto, se ha demostrado que: para los universos rebotantes obtenidos en un espacio plano según la métrica FLRW y a partir de una G_{EoS} phantom, entonces el índice barotrópico ω asociado a la G_{EoS} diverge a menos infinito en el tiempo del rebote t_b , es decir $\omega(t_b) \rightarrow -\infty$. Esto significa que a pesar de que los universos rebotantes son soluciones dadas por un factor de escala regular, su índice barotrópico no lo es, ya que éste se indetermina en algún punto de su evolución cósmica.

Usando estas condiciones, se han investigado cinco soluciones diferentes, que han sido estudiadas anteriormente en la literatura, pero que siempre fueron estudiadas sólo a tiempos tempranos o tardíos, pero nunca en ambos dominios consistentemente. La unión que se puede establecer mediante las condiciones anteriores, entre las soluciones regulares que ocurren a tiempos tempranos y tardíos, respectivamente, ha demostrado ser una herramienta muy poderosa a fin de extender el procedimiento para obtener soluciones regulares, válidas en ambas regiones simultáneamente.

En el capítulo 3, se ha estudiado en detalle la teoría de la termodinámica fuera del equilibrio de Eckart, siendo discutido cómo la condición de equilibrio termodinámico (3.8) puede ser cumplida cuando se considera en el modelo la inclusión de una constante cosmológica. Más aún, es esta constante cosmológica la que nos permite definir un EoS para la DE phantom efectiva (3.13), a partir de la presión disipativa originada por la viscosidad de bulto asociada a la DM.

Por otro lado, se realizó un ajuste de la ecuación diferencial general a resolver (3.20) con la data observacional de SNe Ia del catálogo JLA. Debido a que la condición de equilibrio termodinámico estudiado en este capítulo sólo puede ser

cumplida cuando no se considera CDM, sino que algún tipo de WDM, es que los ajustes se han dividido en dos análisis: el análisis CDM donde $\gamma = 1$ y el análisis WDM donde $1 \leq \gamma \leq 2$. En general, todos los casos generales y particulares estudiados son capaces de ajustar de muy buena forma la data observacional de SNe Ia, pudiendo dar cuenta incluso de la reciente expansión acelerada del Universo sin la inclusión de una constante cosmológica o algún tipo de DE, siendo esto último más probable en el análisis CDM que en el WDM, debido a que este último requiere una mayor contribución de la DE y la presión disipativa para poder acelerar el universo bajo la presencia de un fluido más denso que CDM. A pesar de lo anterior, es el modelo Λ CDM el más favorecido por las observaciones a nivel estadístico, principalmente a que es capaz de ajustar de buena forma los datos con sólo un parámetro libre.

En cuanto al phantom efectivo, a partir de los parámetros que mejor ajustan a los datos se concluye que efectivamente la EoS para la DE efectiva es siempre phantom y que cuando se cumple la condición de equilibrio termodinámico el phantom efectivo es muy cercano al físicamente deseable valor de $\omega = -1$. El problema que surge, debido a la elección matemática del coeficiente de disipación (3.6), es que la presión disipativa se vuelve importante en etapas de la evolución cósmica donde no debería serlo, acelerando el universo en una época donde comienza la dominación de la materia y su expansión debiese ser desacelerada. Esto se ve reflejado directamente en la expresión para el phantom efectivo, la cual se dispara a valores más pequeños que -1 , así como también inmediatamente se deja de cumplir la condición de equilibrio termodinámico. Si bien, estos resultados marcan un precedente en cuanto al phantom efectivo y la reciente expansión acelerada del Universo, el uso de un coeficiente de disipación de viscosidad de bulto más consistente desde el punto de vista físico podría dar cuenta de los mismos resultados encontrados en este trabajo, pero sin sufrir de las inconsistencias físicas encontradas en ciertas etapas de la evolución cósmica

de las soluciones.

En el capítulo 4, se ha discutido una solución analítica a la ecuación que gobierna la evolución del parámetro de Hubble en el marco de la teoría completamente causal de la termodinámica de Israel-Stewart. Esta solución fue obtenida para un coeficiente de viscosidad de bulto $\xi = \xi_0 \rho^s$, y la expresión general dada por la ecuación (4.5) para el tiempo de relajación. Además, se mostró que en el caso particular en que $\gamma = 1$, la ecuación diferencial general se reduce a una ecuación diferencial lineal de segundo orden, y la solución general puede ser escrita como la combinación lineal de dos soluciones independientes.

Por otro lado, se realizó un ajuste de ambos casos con la data observacional de SNe Ia del catálogo JLA. Los resultados siguen siendo indicativos de que el modelo Λ CDM es, estadísticamente, el modelo más favorecido por las observaciones. Pero, una gran lección aprendida en este capítulo es que modelos de universo donde sólo domina la DM pueden explicar con éxito la reciente expansión acelerada del Universo, lo cual es una característica esencial indicada por distintas observaciones cosmológicas. Aún así, considerando que la contribución de ϵ debe ser pequeña con tal de que la teoría sea consistente con la formación de estructuras, las soluciones presentan problemas debido a todo lo contrario, una gran contribución del parámetro libre ϵ , así como el no cumplimiento, en principio, de la condición $\tau H < 1$.

En resumen, es perfectamente posible describir tanto la evolución futura como la evolución pasada del universo sin singularidades, con una EoS para la DE con un índice barotrópico phantom, pero variable en el tiempo. Evitando así tanto las singularidades del tipo Big Bang, como las singularidades tipo Big Rip. Además, en la teoría de Eckart (y también en la de Israel-Stewart), es posible establecer una EoS efectiva phantom para la DE gracias a la disipación de bulto que experimenta la DM, evitando así todos los problemas relacionados con los fluidos phantom, como la violación de NEC. Más aún, es evidente que un universo dominado sólo

por materia puede expandirse de manera acelerada gracias a la contribución de la presión disipativa, asociada a la viscosidad de bulto, que suple la carencia de una DE en la teoría de Israel-Stewart. El aspecto importante de esta característica es que al no ser necesaria una constante cosmológica en las ecuaciones de Friedmann para dar cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo, no se tienen los problemas asociados a la misma como el denominado problema de la constante cosmológica. Más aún, se da cuenta de la reciente expansión acelerada del Universo sin la necesidad de tener un fluido phantom como DE y por ende, se subsanan todos los problemas asociados a estos fluidos como la violación a las condiciones de energía. El problema radica en la elección del coeficiente de viscosidad de bulto ξ_0 , el cual se vuelve importante en partes de la evolución cósmica donde su presencia debe ser despreciable, y se vuelve despreciables en partes de la evolución cósmica del universo donde su contribución debe ser importante. Este hecho queda de manifiesto en todos los análisis desarrollados tanto en el capítulo 3 como en el capítulo 4. Es esta elección del coeficiente de viscosidad el que genera problemas, ya sea en la evolución pasada del universo como en la teoría de Eckart, así como la alta contribución del parámetro ϵ en la teoría de Israel-Stewart, entre otros. Por ende, parte de los resultados de la investigación de esta tesis son indicativos de que es necesario establecer un coeficiente de viscosidad que pueda derivarse de modelos de DM, es decir, que pueda ser derivado a partir de primeros principios. Siendo la naturaleza de la DM un tema abierto, el estudio de posibles efectos disipativos presentes en su comportamiento es una vía para arrojar luces sobre su composición.

Glosario de términos

- AIC: Criterio de Información de Akaike, del inglés Akaike Information Criterion.
- BAO: Oscilaciones Acústicas de los Bariones, del inglés Baryon Acoustic Oscillations.
- BIC: Criterio de Información Bayesiano, del inglés Bayesian Information Criterion.
- CDM: Materia Oscura Fría, del inglés Cold Dark Matter.
- CMB: Radiación Cósmica de Fondo, del inglés Cosmic Microwave Background.
- const.: Abreviatura de constante.
- DE: Energía Oscura, del inglés Dark Energy.
- DEC: Condición de Energía Dominante, del inglés Dominant Energy Condition.
- DM: Materia Oscura, del inglés Dark Matter.
- EoS: Ecuación de Estado, del inglés Equation of State.
- FLRW: Abreviatura de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

- GEqS: Ecuación de Estado Generalizada, del inglés Generalized Equation of State.
- JLA: Análisis de la Curva de la Luz Conjunta, del inglés Joint Light-Curve Analysis.
- LSS: Estructura a Gran Escala, del inglés Large Scale Structure.
- MCMC: Abreviatura de Markov Chain Monte Carlo.
- NEC: Condición de Energía Nula, del inglés Null Energy Condition.
- SEC: Condición de Energía Fuerte, del inglés Strong Energy Condition.
- SNe Ia: Supernovas Tipo Ia, del inglés Type Ia Supernova.
- Universo: La mayúscula inicial indica que nos referimos a nuestro universo.
- universo: La minúscula inicial indica que nos referimos a un modelo de universo.
- WDC: Materia Oscura Tibia, del inglés Warm Dark Matter.
- WEC: Condición de Energía Débil, del inglés Weak Energy Condition.
- WMAP: Sonda de Anisotropía de Microondas de Wilkinson, del inglés Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

Referencias bibliográficas

- [1] T. Sauer. Albert Einstein's 1916 review article on general relativity. *arXiv:physics/0405066*, 2004.
- [2] A. Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften Berlin*, pages 142–152, 1917.
- [3] A. Friedmann. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.
- [4] A. Friedmann. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1):326–332, 1924.
- [5] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, 1929.
- [6] E. Elizalde. Reasons in favor of a Hubble-Lemaître-Slipher's (HLS) law. *Symmetry*, 11(1):15, 2019.
- [7] G. Lemaître. A homogeneous Universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47(8):49–59, 1927.

- [8] G. Lemaître. A homogeneous Universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91:483–490, 1931.
- [9] A. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant. *Astronomical Journal*, 116:1009–1038, 1998.
- [10] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517:565–586, 1999.
- [11] E. Komatsu et al. (WMAP Collaboration). Seven-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192:18, 2011.
- [12] P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration). Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 571:A16, 2014.
- [13] P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [14] M. Moresco et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \sim 0.45$: Direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(5):014, 2016.
- [15] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Dark energy cosmology: The equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophysics and Space Science*, 342(1):155, 2012.
- [16] V. Sahni. Dark matter and dark energy. *Lecture Notes in Physics*, 653:141–180, 2004.
- [17] M. Khurshudyan. On the phenomenology of an accelerated large-scale Universe. *Symmetry*, 8(11):110, 2016.

- [18] N. Suzuki et al. The Hubble space telescope cluster supernova survey. V. Improving the dark energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, 746(1):85, 2012.
- [19] N. Aghanim et al. (Planck Collaboration). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *arXiv:1807.06209*, 2018.
- [20] G. Hinshaw et al. (WMAP Collaboration). Nine-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208:19, 2013.
- [21] D. J. Eisenstein et al. (SDSS Collaboration). Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, 2005.
- [22] J. Simon, L. Verde, and R. Jimenez. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, 71(12):123001, 2005.
- [23] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski, and S. A. Stanford. Cosmic chronometers: Constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(2):008, 2010.
- [24] M. Moresco et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(8):006, 2012.
- [25] C. Zhang, H. Zhang, S. Yuan, S. Liu, T. Zhang, and Y. Sun. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 14(10):1221–1233, 2014.

- [26] M. Moresco. Raising the bar: New constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450:L16, 2015.
- [27] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1–23, 1989.
- [28] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner. The cosmological constant. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30, 1992.
- [29] M. S. Turner. The dark side of the Universe: from Zwicky to accelerated expansion. *Physics Reports*, 333-334:619–635, 2000.
- [30] V. Sahni and A. Starobinsky. The case for a positive cosmological Lambda-term. *International Journal of Modern Physics D*, 9(4):373, 2000.
- [31] T. Padmanabhan. Cosmological constant-the weight of the vacuum. *Physics Reports*, 380(5-6):235, 2003.
- [32] P. J. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75(2):559, 2003.
- [33] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, 82(5):896, 1999.
- [34] L. Perivolaropoulos. LambdaCDM: Triumphs, puzzles and remedies. *Journal of Cosmology*, 15:6054, 2011.
- [35] D. Scolnic et al. Systematic uncertainties associated with the cosmological analysis of the first Pan-STARRS1 type Ia supernova sample. *The Astrophysical Journal*, 795(1):45, 2014.
- [36] P. Singh, M. Sami, and N. Dadhich. Cosmological dynamics of a phantom field. *Physical Review D*, 68(2):023522, 2003.

- [37] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Quantum de Sitter cosmology and phantom matter. *Physics Letters B*, 562(3-4):147, 2003.
- [38] P. Astier et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the first year data set. *Astronomy and Astrophysics*, 447(1):31, 2006.
- [39] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela, and D. Pavón. Dark matter and dark energy interactions: Theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Reports on Progress in Physics*, 79(9):096901, 2016.
- [40] R. R. Caldwell. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B*, 545(1-2):23, 2002.
- [41] S. M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden. Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ? *Physical Review D*, 68(2):023509, 2003.
- [42] M. Cataldo, N. Cruz, and S. Lepe. Viscous dark energy and phantom evolution. *Physics Letters B*, 619(1-2):5, 2005.
- [43] W. Israel and J. M. Stewart. Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory. *Annals of Physics*, 118:341–372, 1979.
- [44] Roy Maartens. Causal thermodynamics in relativity. *arXiv:astro-ph/9609119*, 1996.
- [45] S. Anand, P. Choubal, A. Mazumdar, and S. Mohanty. Cosmic viscosity as a remedy for tension between PLANCK and LSS data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(11):005, 2017.

- [46] G. Goswami, G. K. Chakravarty, S. Mohanty, and A. R. Prasanna. Constraints on cosmological viscosity and self-interacting dark matter from gravitational wave observations. *Physical Review D*, 95(10):103509, 2017.
- [47] A. Avelino and U. Nucamendi. Can a matter-dominated model with constant bulk viscosity drive the accelerated expansion of the universe? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(4):006, 2009.
- [48] A. Avelino and U. Nucamendi. Exploring a matter-dominated model with bulk viscosity to drive the accelerated expansion of the Universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(8):009, 2010.
- [49] A. Montiel and N. Bretón. Probing bulk viscous matter-dominated models with gamma-ray bursts. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(8):023, 2011.
- [50] A. Avelino, Y. Leyva, and L. A. Ureña-López. Interacting viscous dark fluids. *Physical Review D*, 88(12):123004, 2013.
- [51] T. Padmanabhan and S. M. Chitre. Viscous universes. *Physics Letters A*, 120:433–436, 1987.
- [52] F. Contreras, N. Cruz, and E. González. Generalized equations of state and regular universes. *Journal of Physics: Conference Series*, 720(1):012014, 2016.
- [53] N. Cruz, E. González, S. Lepe, and D. Sáez-Chillón Gómez. Analysing dissipative effects in the LambdaCDM model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1812(12):017, 2018.
- [54] F. Contreras, N. Cruz, E. Elizalde, E. González, and S. D. Odintsov. Linking little rip cosmologies with regular early universes. *Physical Review D*, 98(12):123520, 2018.

- [55] N. Cruz, E. González, and G. Palma. Exact analytical solution for an Israel-Stewart cosmology. *arXiv:1812.05009*, 2018.
- [56] N. Cruz, E. González, and G. Palma. Testing dissipative dark matter in causal thermodynamics. *arXiv:1906.04570*, 2019.
- [57] V. Mukhanov. Physical foundations of cosmology. *Cambridge University Press*, 2005.
- [58] S. Hawking and G. Ellis. The large scale structure of space-time. *Cambridge University Press*, 1973.
- [59] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astronomy and Astrophysics*, 568:A22, 2014.
- [60] D. M. Scolnic et. al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined Pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, 2018.
- [61] A. B. Downey. Think Bayes. *O'Reilly Media, Inc.*, 2013.
- [62] J. Goodman and J. Weare. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1):65–80, 2010.
- [63] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman. emcee: The MCMC hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306, 2013.
- [64] R. Tripp. A two-parameter luminosity correction for Type IA supernovae. *Astronomy and Astrophysics*, 331:815–820, 1998.

- [65] J. D. Barrow. Graduated inflationary universes. *Physics Letters B*, 235(1–2):40–43, 1990.
- [66] I. L. Shapiro and J. Sola. Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology. *Journal of High Energy Physics*, 02:006, 2002.
- [67] I. L. Shapiro and J. Sola. Cosmological constant, renormalization group and Planck scale physics. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 127:71–76, 2004.
- [68] S. Basilakos and J. Sola. Effective equation of state for running vacuum: “mirage” quintessence and phantom dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 437(4):3331–3342, 2014.
- [69] S. Mukherjee, B. C. Paul, N. K. Dadhich, S. D. Maharaj, and A Beesham. Emergent universe with exotic matter. *Classical and Quantum Gravity*, 23:6927–6934, 2006.
- [70] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Tsujikawa. Properties of singularities in phantom dark energy universe. *Physical Review D*, 71:063004, 2005.
- [71] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Inhomogeneous equation of state of the universe: Phantom era, future singularity and crossing the phantom barrier. *Physical Review D*, 72:023003, 2005.
- [72] H. Stefancic. Expansion around the vacuum equation of state: Sudden future singularities and asymptotic behavior. *Physical Review D*, 71:084024, 2005.
- [73] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, and R. J. Scherrer. The little rip. *Physical Review D*, 84:063003, 2011.
- [74] P. H. Frampton, K. J. Ludwick, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and R. J. Scherrer. Models for little rip dark energy. *Physics Letters B*, 708(1):204–211, 2012.

- [75] J. D. Barrow. String-driven inflationary and deflationary cosmological models. *Nuclear Physics B*, 310(3):743–763, 1988.
- [76] S. Capozziello, V. F. Cardone, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Observational constraints on dark energy with generalized equations of state. *Physical Review D*, 73:043512, 2006.
- [77] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov. Viscous little rip cosmology. *Physical Review D*, 84:103508, 2011.
- [78] R. Myrzakulov and L. Sebastiani. Bounce solutions in viscous fluid cosmology. *Astrophysics and Space Science*, 352:281–288, 2014.
- [79] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid. *Physical Review*, 58:919–924, 1940.
- [80] S. Weinberg. Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe. *Astrophysical Journal*, 168:175, 1971.
- [81] J. D. Barrow. The deflationary universe: An instability of the de sitter universe. *Physics Letters B*, 180(4):335–339, 1986.
- [82] R. Maartens. Dissipative cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 12(6):1455–1465, 1995.
- [83] A. Hernandez-Almada. Cosmological test on viscous bulk models using Hubble parameter measurements and type Ia supernovae data. *arXiv:1904.04002*, 2019.
- [84] B. Li and J. D. Barrow. Does bulk viscosity create a viable unified dark matter model? *Physical Review D*, 79:103521, 2009.
- [85] H. Velten and D. J. Schwarz. Constraints on dissipative unified dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(09):016–016, 2011.

- [86] O. F. Piattella, J. C. Fabris, and W. Zimdahl. Bulk viscous cosmology with causal transport theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(05):029–029, 2011.
- [87] H. Velten and D. J. Schwarz. Dissipation of dark matter. *Physical Review D*, 86:083501, 2012.
- [88] W. Israel. Nonstationary irreversible thermodynamics: A causal relativistic theory. *Annals of Physics*, 100(1):310–331, 1976.
- [89] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories. *Physical Review D*, 31:725–733, 1985.
- [90] W. Israel and J. M. Stewart. Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas. *Physics Letters A*, 58(4):213–215, 1976.
- [91] W. A. Hiscock and L. Lindblom. Stability and causality in dissipative relativistic fluids. *Annals of Physics*, 151:466–496, 1983.
- [92] W. A. Hiscock and T. S. Olson. Effects of frame choice on nonlinear dynamics in relativistic heat-conducting fluid theories. *Physics Letters A*, 141(3):125–130, 1989.
- [93] N. Cruz, S. Lepe, and F. Peña. Crossing the phantom divide with dissipative normal matter in the Israel–Stewart formalism. *Physics Letters B*, 767:103–109, 2017.
- [94] M. Cruz, N. Cruz, and S. Lepe. Accelerated and decelerated expansion in a causal dissipative cosmology. *Physical Review D*, 96(12):124020, 2017.
- [95] N. D. J. Mohan, A. Sasidharan, and T. K. Mathew. Bulk viscous matter and recent acceleration of the universe based on causal viscous theory. *The European Physical Journal C*, 77(12):849, 2017.

Anexo I

```
1 import emcee
2 import corner
3 import numpy as np
4 import scipy.optimize as op
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
7 from scipy.integrate import quad as intquad
8 cc = 299792.458 # velocidad de la luz (km/s)
9 H0 = 70.0 # Valor actual del parametro de Hubble en (km/s/Mpc)
10 NumSNSample = 740 #Numero total de supernovas del catalogo
11 file1 = "JLA_lcparams.txt"
12 file2 = "JLA_v0_covmatrix.dat"
13 file3 = "JLA_va_covmatrix.dat"
14 file4 = "JLA_vb_covmatrix.dat"
15 file5 = "JLA_v0a_covmatrix.dat"
16 file6 = "JLA_v0b_covmatrix.dat"
17 file7 = "JLA_vab_covmatrix.dat"
18 z = np.genfromtxt(file1, usecols = 1)
19 zerr = np.genfromtxt(file1, usecols = 2)
20 mb = np.genfromtxt(file1, usecols = 4)
21 mberr = np.genfromtxt(file1, usecols = 5)
22 x1 = np.genfromtxt(file1, usecols = 6)
23 x1err = np.genfromtxt(file1, usecols = 7)
24 color = np.genfromtxt(file1, usecols = 8)
25 colorerr = np.genfromtxt(file1, usecols = 9)
```

```

26 cov_mb_x1 = np.genfromtxt(file1, usecols = 14)
27 cov_mb_color = np.genfromtxt(file1, usecols = 15)
28 cov_x1_color = np.genfromtxt(file1, usecols = 16)
29 covmatrix_mb_1D = np.genfromtxt(file2, usecols = 0, skip_header=1)
30 covmatrix_x1_1D = np.genfromtxt(file3, usecols = 0, skip_header=1)
31 covmatrix_color_1D = np.genfromtxt(file4, usecols = 0, skip_header
    =1)
32 covmatrix_mb_x1_1D = np.genfromtxt(file5, usecols = 0, skip_header
    =1)
33 covmatrix_mb_color_1D = np.genfromtxt(file6, usecols = 0,
    skip_header=1)
34 covmatrix_x1_color_1D = np.genfromtxt(file7, usecols = 0,
    skip_header=1)
35 covmatrix_mb = np.reshape(covmatrix_mb_1D, (-1, NumSNSample))
36 covmatrix_x1 = np.reshape(covmatrix_x1_1D, (-1, NumSNSample))
37 covmatrix_color = np.reshape(covmatrix_color_1D, (-1, NumSNSample))
38 covmatrix_mb_x1 = np.reshape(covmatrix_mb_x1_1D, (-1, NumSNSample))
39 covmatrix_mb_color = np.reshape(covmatrix_mb_color_1D, (-1,
    NumSNSample))
40 covmatrix_x1_color = np.reshape(covmatrix_x1_color_1D, (-1,
    NumSNSample))
41 def InverE(z, Om):
42     InverEInt = 1.0/np.sqrt(1.0-Om+Om*((1.0+z)**3.0))
43     return InverEInt
44 def LumDistance(z, Om):
45     LumDistanceInt = []
46     for i in range(len(z)):
47         LumDistanceInt += [cc*(1.0+z[i])*intquad(InverE, 0.0, z[i],
            args = (Om))[0]/H0]
48     return LumDistanceInt
49 def DiffDisModulus(theta, z, mb, x1, color):
50     Om, MB, alpha, beta = theta
51     LumDistanceInt = LumDistance(z, Om)
52     DiffDisModulusInt = []

```

```

53     for i in range(len(z)):
54         DiffDisModulusInt += [(5.0*np.log10(LumDistanceInt[i])
+25.0-(mb[i]-(MB-alpha*x1[i]+beta*color[i])))]
55     return DiffDisModulusInt
56 def LnLikelihood(theta, z, mb, x1, color):
57     Om, MB, alpha, beta = theta
58     CovMatrixTotalInt = (covmatrix_mb+(alpha**2.0)*covmatrix_x1+(
beta**2.0)*covmatrix_color+2.0*alpha*covmatrix_mb_x1-2.0*beta*
covmatrix_mb_color-2.0*alpha*beta*covmatrix_x1_color+np.diagflat
((mberr)**2.0)+(alpha**2.0)*np.diagflat((x1err)**2.0)+(beta
**2.0)*np.diagflat((colorerr)**2.0)+2.0*alpha*np.diagflat(
cov_mb_x1)-2.0*beta*np.diagflat(cov_mb_color)-2.0*alpha*beta*np.
diagflat(cov_x1_color))
59     InvCovMatrixTotalInt = np.linalg.inv(CovMatrixTotalInt)
60     DiffDisModulusInt = DiffDisModulus(theta, z, mb, x1, color)
61     Chi2Int_1 = 0
62     Chi2Int_2 = 0
63     for i in range(len(z)):
64         Chi2Int_1 = 0
65         for k in range(len(z)):
66             Chi2Int_1 = Chi2Int_1 + DiffDisModulusInt[k]*
InvCovMatrixTotalInt[k,i]
67         Chi2Int_2 = Chi2Int_2 + DiffDisModulusInt[i]*Chi2Int_1
68     return -0.5*Chi2Int_2
69 def LnPrior(theta):
70     Om, MB, alpha, beta = theta
71     if (0.0 < Om < 1.0 and
72         -20.0 < MB < -18.0 and
73         0.0 < alpha < 1.0 and
74         0.0 < beta < 5.0):
75         return 0.0
76     return -np.inf
77 def LnPosterior(theta, z, mb, x1, color):
78     LnPriorInt = LnPrior(theta)

```

```

79     if not np.isfinite(LnPriorInt):
80         return -np.inf
81     return LnPriorInt + LnLikelihood(theta, z, mb, x1, color)
82 Chi2 = lambda *args: -2.0 * LnLikelihood(*args)
83 Result = op.minimize(Chi2, [0.32, -19.05, 0.14, 3.20], args = (z,
    mb, x1, color), bounds = ((0.0, 1.0), (-20.0, -18.0), (0.0, 1.0)
    , (0.0, 5.0)))
84 Result_x = Result["x"]
85 Chi2_min = -2.0*LnLikelihood(Result_x, z, mb, x1, color)
86 Om_min, MB_min, alpha_min, beta_min = Result_x
87 print("""Resultados de la minimizacion de Chi^2:
88     Om = {0}
89     MB = {1}
90     alpha = {2}
91     beta = {3}
92     Chi2 = {4}""".format(Om_min, MB_min, alpha_min, beta_min,
    Chi2_min))
93 nwalkers, steps, ndim = 22, 7000, 4
94 burnin = 3000
95 anew = 4
96 factorinitialChain_1 = 2e-2
97 factorinitialChain_2 = 3e-1
98 factorinitialChain_3 = 1e-2
99 factorinitialChain_4 = 1e-2
100 pos = []
101 for i in range(nwalkers):
102     pos += [np.array([Result_x[0]+factorinitialChain_1*np.random.
    random_sample(), Result_x[1]+factorinitialChain_2*np.random.
    randn(), Result_x[2]+factorinitialChain_3*np.random.randn(),
    Result_x[3]+factorinitialChain_4*np.random.randn()])]
103 sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, LnPosterior, a =
    anew, args= (z, mb, x1, color))
104 posfin, prob, state = sampler.run_mcmc(pos, burnin)
105 sampler.reset()

```

```

106 sampler.run_mcmc(posfin, steps, rstate0=np.random.get_state())
107 print("Mean acceptance fraction: {0:.3f}".format(np.mean(sampler.
    acceptance_fraction)))
108 plt.rcParams.update({'font.size': 10})
109 fig1, axes = plt.subplots(4, 1, sharex=True, figsize=(8, 6))
110 axes[0].plot(sampler.chain[:, :, 0].T, color="k", alpha=0.4)
111 axes[0].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(4))
112 axes[0].axhline(Result_x[0], color="#888888", lw=2)
113 axes[0].set_ylabel(r"$\Omega_m$")
114 axes[1].plot(sampler.chain[:, :, 1].T, color="k", alpha=0.4)
115 axes[1].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(4))
116 axes[1].axhline(Result_x[1], color="#888888", lw=2)
117 axes[1].set_ylabel(r"$M_B$")
118 axes[2].plot(sampler.chain[:, :, 2].T, color="k", alpha=0.4)
119 axes[2].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(4))
120 axes[2].axhline(Result_x[2], color="#888888", lw=2)
121 axes[2].set_ylabel(r"$\alpha$")
122 axes[3].plot(sampler.chain[:, :, 3].T, color="k", alpha=0.4)
123 axes[3].yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(4))
124 axes[3].axhline(Result_x[3], color="#888888", lw=2)
125 axes[3].set_ylabel(r"$\beta$")
126 axes[3].set_xlabel("Step number")
127 samples = sampler.chain[:, :, :].reshape((-1, ndim))
128 Om_LCDM, MB_LCDM, alpha_LCDM, beta_LCDM = (map(lambda v: (v[1], v
    [1]-v[0], v[2]-v[1]), zip(*np.percentile(samples, [16, 50, 84],
    axis = 0))))
129 theta_MCMC = Om_LCDM[0], MB_LCDM[0], alpha_LCDM[0], beta_LCDM[0]
130 Chi2_MCMC = -2.0*LnLikelihood(theta_MCMC, z, mb, x1, color)
131 fig2 = corner.corner(samples, labels = [r"$\Omega_m$", r"$M_B$",
    r"$\alpha$", r"$\beta$"], truths = [Om_LCDM[0], MB_LCDM[0],
    alpha_LCDM[0], beta_LCDM[0]], quantiles = [0.16, 0.5, 0.84],
    show_titles = True, title_kwargs = {"fontsize": 12})
132 print("""Resultados de MCMC:
133     Om = {0}

```



```
134     MB = {1}
135     alpha = {2}
136     beta = {3}
137     Chi2 = {4}"".format(Om_LCDM, MB_LCDM, alpha_LCDM, beta_LCDM,
Chi2_MCMC))
138 AIC = 2.0*ndim+Chi2_MCMC
139 BIC = ndim*np.log(NumSNSample)+Chi2_MCMC
140 print("""Parametros de bondad de ajuste:
141     AIC = {0}
142     BIC = {1}"".format(AIC, BIC))
```

Anexo II

En este anexo se discutirán dos propiedades importantes utilizadas durante el capítulo 2, sección 2.2. La primera trata sobre los tipos de universos no singulares hacia el pasado posibles cuando $\omega < -1/3$, mientras que la segunda tiene relación con el criterio utilizado para establecer un universo rebotante. Estas demostraciones fueron realizadas íntegramente por Felipe Contreras, durante el desarrollo del trabajo colaborativo “Linking little rip cosmologies with regular early universes” [54].

Se iniciará demostrando que para un espacio plano, dominado sólo por un fluido, cuyo índice barotrópico cumple con $\omega < -1/3$, entonces los únicos universos posibles sin singularidades hacia el pasado son los universos del tipo emergente y rebotante. Para este fin, debemos aclarar en un principio un par de cosas.

La definición del índice barotrópico en la ecuación (1.7) es usada para no descartar el caso $p(t_b) = \rho(t_b) = 0$. Además, se requiere que ω esté definido a todo tiempo t , excepto tal vez en algún punto donde éste tienda a $-\infty$. En este sentido, no está permitido que ρ pueda ser cero en todo un intervalo, aun si p también es cero. El siguiente ejemplo ilustra una función $\omega(t)$ que no está bien definida para todo t : Consideremos una solución emergente con funciones ρ , p y a suaves; obtenidas de un factor de escala dado como Ansatz. El comportamiento del factor de escala es constante para $t \leq 0$ y exponencial para $t > 0$, con $\omega < -1$ para $t > 0$. Este comportamiento está representado en la figura 4.4(a).

Como podemos ver, el ejemplo anterior es un universo emergente y Little Rip,

donde a , ρ y p son de clase C^∞ , y el factor de escala es una función convexa, ya que $\ddot{a} \geq 0$. En este caso, $\omega < -1$ para todo $t > 0$, pero no está definido para los valores $t \leq 0$, ya que $p(t) = \rho(t) = 0$ para $t \leq 0$. Así, ρ no puede ser 0 en todo un intervalo (y por ende tampoco \dot{a}). Además, si demandamos que $\rho \in C^\infty$, entonces el conjunto de puntos T , tales que $\rho(t) = 0$, debe ser numerable y su adherencia a cualquier subconjunto T_i de éste, no puede ser igual al intervalo $[x, y]$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. De otra manera, habrían intervalos en los cuales la función ρ podría saltar desde puntos donde es distinta de cero a un punto donde es cero, de manera discontinua. Por lo tanto, a lo más una cantidad numerable de puntos t_n pueden ser considerados, de tal forma que $\rho(t_n) = 0$.

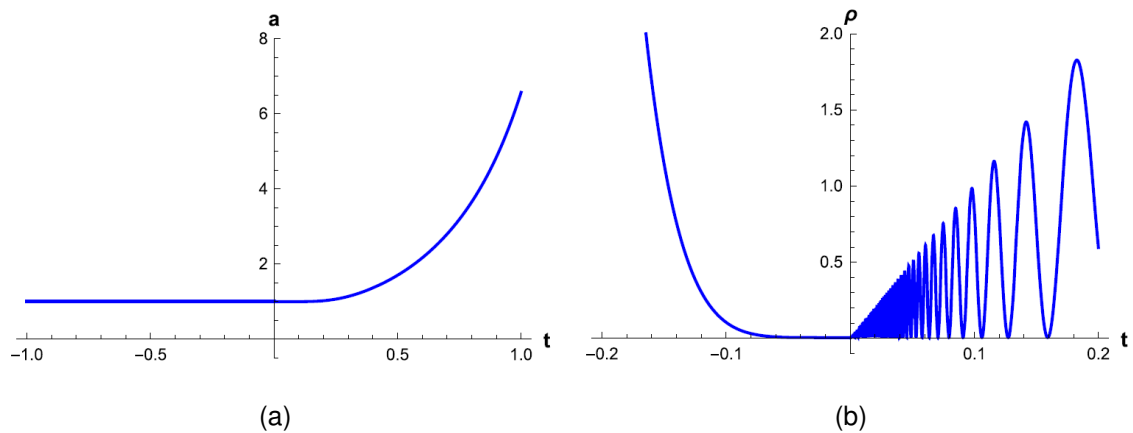


Figura 4.4: Ejemplos ilustrativos de un determinado factor de escala y de una determinada densidad de energía, dados como Ansätze. (a) Representa el gráfico del factor de escala como función del tiempo. (b) Representa el gráfico de la densidad de energía como función del tiempo.

El siguiente es un ejemplo que muestra la existencia de funciones $\rho(t)$ con una cantidad numerable e infinita de puntos donde $\rho(t) = 0$, con un ω bien definido para todos los puntos, y con una función $\rho \in C^\infty$. Esta es una solución válida a la ecuaciones de Friedmann, donde uno puede evadir cualquier tipo

de singularidades, entregando un ω bien definido para todo tiempo, pero que no satisface la condición $\omega < -1/3$. Consideremos entonces una densidad de energía que está dada por una función creciente y oscilante para $t > 0$, y con un comportamiento exponencial para $t < 0$, con $\rho(0) = 0$. Este comportamiento está representado en la figura 4.4(b), donde es posible ver que ω está bien definido a todos los puntos, y que $\omega < -1/3$ en algún trozo de cada ciclo.

Considerando lo expuesto anteriormente, se procederá con la demostración: Supongamos que $\omega < -1/3$, y que el conjunto de puntos T , tales que $\rho(t) = 0$, es numerable; y la adherencia de cualquier subconjunto T_i de T no es igual al intervalo $[x, y]$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$; entonces, existe al menos un punto t tal que $\rho(t) = 0$. En efecto, supongamos que hay un par de puntos $t_a < t_b$ donde $\rho(t_a) = \rho(t_b) = 0$. Por hipótesis, es posible considerar que en el intervalo $I = (t_a, t_b)$ no hay otro punto que satisface la condición $\rho(t) = 0$. Como ρ es definida como no negativa y $\omega < -1/3$, entonces $\ddot{a}(t) > 0$, para todo punto en I , ya que $\rho + 3P = \rho(1 + 3\omega) < 0$. Por ende, la función \dot{a} es estrictamente creciente en I . Por otro lado, $\rho(t_a) = 0$ y por ende $\dot{a}(t_a) = 0$. Así, ya que \dot{a} es estrictamente creciente, resulta que $\dot{a}(t_a) < \dot{a}(t_b)$ y, por lo tanto, $\dot{a}(t_b) > 0$ y $\rho(t_b) > 0$. Esto último claramente es una contradicción, debido a que hemos supuesto que $\rho(t_b) = 0$. Por consiguiente, no puede existir más de un punto t tal que $\rho(t) = 0$.

Finalmente, si ρ es igual a 0 a lo más en un punto, entonces H es también igual a 0 a lo más en un punto, y por ende \dot{a} también. Este último hecho, junto con la convexidad de a , implican que los únicos modelos válidos de las ecuaciones de Friedmann que puede evitar la singularidad inicial son los universos emergentes y rebotantes.

Como punto final, se procederá a demostrar el criterio para obtener universos rebotantes: Si f es una función analítica en t_0 , de tal forma que $f(t_0) = \dot{f}(t_0) = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right| = \infty$. En efecto, sin pérdida de generalidad, es posible

considerar $t_0 = 0$, ya que es suficiente definir $g(t) = f(t + t_0)$. Ahora, como f y \dot{f} son funciones analíticas, es posible representarlas en términos de su serie de Maclaurin, de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n, \\ \dot{f}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} (n+1) t^n. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ el primer entero que cumple con $\alpha_m \neq 0$. Por suposición, $f(0) = \dot{f}(0) = 0$, por lo tanto $m \geq 2$. Entonces la serie de Maclaurin de f y \dot{f} están representadas por

$$\begin{aligned} f(t) &= t^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+m} t^n, \\ \dot{f}(t) &= t^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m+n} (m+n) t^n, \end{aligned} \quad (4.43)$$

respectivamente. Finalmente, aplicando el límite a $\left| \frac{\dot{f}}{f} \right|$, llegamos a la conclusión de que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{t^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m+n} (m+n) t^n}{t^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+m} t^n} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \frac{m |\alpha_m|}{|\alpha_m|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m}{|t|} = \infty. \quad (4.44)$$