

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIA**

**Departamento de Física**



**Esfuerzo inducido sobre la pared de un silo 2D por efecto de la  
ubicación de la apertura de descarga**

**Carolina Ignacia Martínez Guajardo**

**Tesis para optar al Título Profesional  
de Ingeniero Físico.**

**Profesor Guía: Francisco Vivanco  
Arias**

**Santiago - Chile**

**2019**



# **Esfuerzo inducido sobre la pared de un silo 2D por efecto de la ubicación de la apertura de descarga.**

**Carolina Ignacia Martínez Guajardo**

Este trabajo de titulación fue elaborado bajo la tutela y guía del Dr. Francisco Vivanco, miembro del laboratorio de física no lineal del Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile y ha sido aprobado por la siguiente comisión calificadora.

Dr. Francisco Melo \_\_\_\_\_

Dr. Nelson Sepúlveda \_\_\_\_\_

Dr. Guillaume Lagubeau \_\_\_\_\_

---

Dr. Roberto Bernal  
Director del Departamento de Física

## Resumen

Los silos y tolvas son la solución más habitual para el almacenamiento y conservación de productos granulares los que están presentes en industrias relevantes a nivel mundial tales como la alimentaria y la minera, y conforman el segundo material más utilizado, después del agua, sin embargo, a pesar de su relevancia y amplio uso, las normativas que regulan la edificación de las estructuras de almacenamiento se rigen por modelos poco actualizados lo que conduce a fallas en las estructuras, llegando al colapso total de silos.

Por medio de simulaciones numéricas se realiza un estudio sobre el comportamiento estático y cinemático de un medio granular dentro de un silo bidimensional, contrastando el efecto de la distribución del tamaño de partículas, fricción, razón de aspecto del contenedor y condiciones de simetría durante el flujo del material.

Se observa que el parámetro que influye más significativamente en el empaquetamiento de los sistemas es la fricción entre las partículas, llegando a aumentar hasta en 10% el empaquetamiento en los sistemas por efecto de la presencia de roce. Por otra parte, se observa que la distribución del tamaño de las partículas en el material genera un empaquetamiento diferenciado entre el sistema bidisperso y los sistemas mono y totalmente dispersos, siendo estos últimos mayores y con diferencias menores al 1% entre si.

Se determinan las curvas de esfuerzo de los sistemas en estado estático y se encuentra que estas no se ajustan al perfil propuesto por Janssen, alcanzando valores mayores de presión de hasta el doble en el caso del silo alto y menores a lo predicho por el modelo de Janssen en hasta un 40% en el caso del silo ancho.

Se obtienen los perfiles de velocidad vertical de las partículas en 6 distintas posiciones de altura dentro del silo y se contrastan con la solución para la velocidad vertical del modelo cinemático de Nedderman y Tüzün consiguiendo una constante cinemática  $B$  que toma valores entre  $8.77E-05$  [m] y  $2.45E-03$  [m] en el silo pequeño y  $6.66E-05$  [m] y  $3.04E-03$  [m] en el silo ancho. Se encuentra además que para la extracción excéntrica las condiciones iniciales para las partículas en el centro del canal de salida propuestas para la solución analítica del modelo cinemático para una extracción

no simétrica no se satisfacen.

Se estudia la distribución de esfuerzos durante las extracciones donde se observan sobrepresiones alrededor del canal de salida y hacia las paredes del silo, en el caso del flujo simétrico, mientras que para el caso excéntrico los valores máximos de presión se encuentran cercanos a la pared opuesta a la ubicación de la salida del material, alcanzando presiones hasta 1000 veces mayores que las que se encontraron en la pared cercana a la salida del material, comportamiento que se presenta en todos los sistemas estudiados.

*Dedico esta tesis a mi familia.*

## **Agradecimientos**

Llegar al final de este recorrido no fue fácil, pero afortunadamente nunca estuve sola, por eso quisiera agradecer a cada una de las personas que estuvo junto a mi en este largo camino. A mi familia y amigos, les agradezco por su confianza, apoyo incondicional, palabras de aliento y consejos, no estaría en esta instancia sin ustedes. Gracias.

# Tabla de Contenidos

	<b>Página</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Solido Granular</b>	<b>6</b>
1.1 Fracción de empaquetamiento . . . . .	6
1.2 Fuerzas . . . . .	7
1.3 Esfuerzos o stress . . . . .	8
<b>2 Flujo granular</b>	<b>11</b>
2.1 Modelo Cinemático . . . . .	11
2.1.1 Flujo céntrico . . . . .	13
2.1.2 Flujo excéntrico . . . . .	14
<b>3 Simulaciones</b>	<b>17</b>
3.1 Descripción de los sistemas simulados . . . . .	17
3.1.1 Preparación de los estados iniciales . . . . .	18
3.1.2 Extracción del material . . . . .	19
<b>4 Resultados y Análisis</b>	<b>21</b>
4.0.1 Estado estático . . . . .	21
Fracción de empaquetamiento . . . . .	21
Perfil de esfuerzos en estado estático . . . . .	22
Fuerzas normales de contacto . . . . .	26
4.0.2 Estado cinemático . . . . .	29
Perfil de esfuerzos durante la extracción . . . . .	29
Perfiles de velocidad vertical . . . . .	32
<b>Conclusiones</b>	<b>38</b>
4.0.3 Proyecciones . . . . .	39

<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>42</b>
<b>Anexos</b>	<b>44</b>
4.1 Patrones de franjas durante la extracción . . . . .	44
4.2 Perfiles de esfuerzo durante la extracción . . . . .	44
4.3 Evolución del gradiente de esfuerzos dentro del silo . . . . .	44

# Índice de Tablas

3.1	Combinación de factores geométricos y mecánicos que generan los distintos sistemas simulados en el estudio. . . . .	20
3.2	Propiedades mecánicas para las partículas y paredes del sistema. . . . .	20
4.1	Resultados de fracción de empaquetamiento para los sistemas simulados diferenciados por fricción, razón de aspecto y distribución del tamaño de las partículas . . . .	22
4.2	Resultados para la constante cinemática $B$ utilizando como ajuste la solución al modelo cinemático con $n = 8$ . . . . .	35

# Índice de Ilustraciones

1	Ejemplos de medios granulares. . . . .	2
2	Fallas encontradas en silos en distintas aplicaciones de la industria. . . . .	4
1.1	Distribución de fuerzas normales de contacto entre partículas contenidas en silos obtenidas de distintos estudios . . . . .	7
1.2	Cubo infinitesimal con componentes del tensor de esfuerzos . . . . .	8
1.3	Esquema con los perfiles de esfuerzo vertical para una columna de líquido y una columna de un medio granular de acuerdo a modelo de Janssen. . . . .	9
2.1	Planteamiento del modelo cinemático de Nedderman y Tüzün. . . . .	11
2.2	Esquema de un silo bidimensional de fondo plano con canal de salida central. . . . .	13
2.3	Esquema de un silo bidimensional de fondo plano con salida excéntrica . . . . .	15
3.1	Esquema de la ubicación de la salida respecto del centro del sistema de referencia en las simulaciones . . . . .	18
4.1	Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto $\Gamma = 1.4$ . . . . .	23
4.2	Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto $\Gamma = 2.8$ . . . . .	24
4.3	Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto $\Gamma = 0.7$ . . . . .	25
4.4	Frecuencia relativa de la razón $F_t/\mu_w F_n$ en los sistemas totalmente dispersos con roce para los tres tamaños de contenedor . . . . .	27
4.5	Distribuciones de la fuerza de contacto normal entre las partículas para los distintos sistemas simulados . . . . .	28
4.6	Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema completamente disperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	30
4.7	Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas total- mente dispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) . . . . .	31

4.8	Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas totalmente dispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) . . . . .	31
4.9	Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas totalmente dispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) . . . . .	31
4.10	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema completamente disperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	33
4.11	Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) en instante $t=50$ [s] . . . . .	34
4.12	Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) en instante $t=51$ [s]. . . . .	34
4.13	Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) en instante $t=51$ [s]. . . . .	34
4.14	Valores encontrados para $B$ tras ajuste usando el modelo cinemático para un flujo céntrico . . . . .	35
4.15	Curvas trazadas durante el proceso de extracción por las partículas ubicadas en el centro de la salida para 7 distintos instantes. . . . .	37
4.16	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	45
4.17	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	46
4.18	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema totalmente disperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	47
4.19	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	48
4.20	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	49
4.21	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema totalmente disperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	50
4.22	Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	51

4.23 Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	52
4.24 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	53
4.25 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). . . . .	54
4.26 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema disperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	55
4.27 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	56
4.28 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). . . . .	57
4.29 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema disperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	58
4.30 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	59
4.31 Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ). . . . .	60
4.32 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) . . . . .	60
4.33 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) . . . . .	61
4.34 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) . . . . .	61
4.35 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) . . . . .	61
4.36 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) . . . . .	62
4.37 Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) . . . . .	62

# Objetivos

## Objetivo Principal

Determinar a través de simulaciones numéricas, basadas en elementos discretos, los esfuerzos inducidos sobre las paredes de un silo 2D, durante la extracción asimétrica del material confinado.

## Objetivos Secundarios

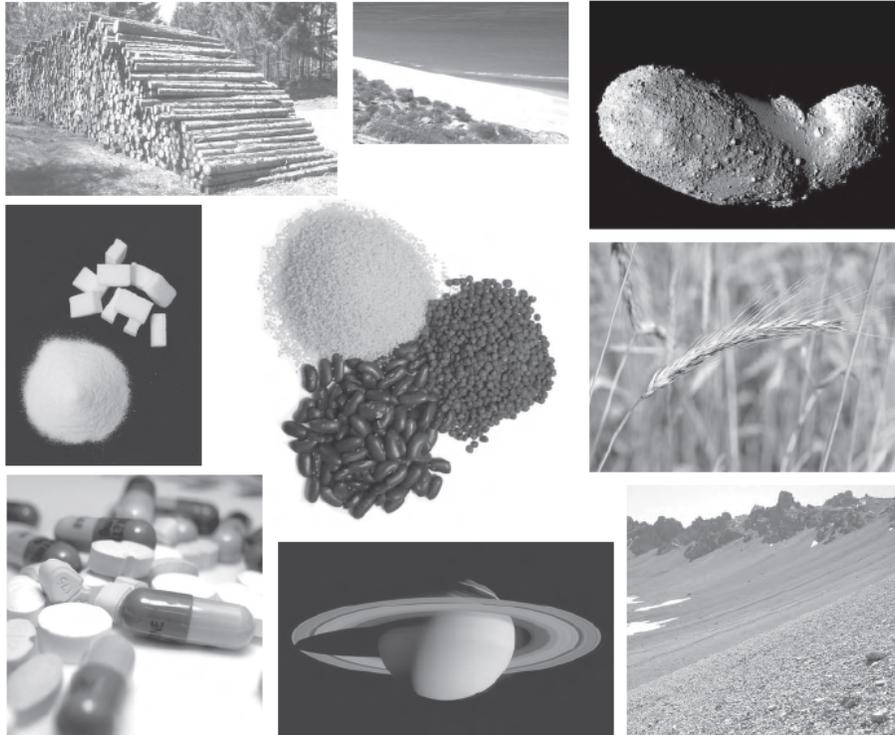
- (i). Diseñar y desarrollar un algoritmo en lenguaje python para el software libre yade-DEM que permita simular un silo 2D con distintas configuraciones de material almacenado, fricción y razón de aspecto del contenedor.
- (ii). Caracterizar el sistema en su condición estática.
- (iii). Determinar perfiles de velocidad y tipo de flujo desarrollado por las partículas al ser extraídas del silo.
- (iv). Analizar las fuerzas y esfuerzos sobre las paredes del silo y su distribución a lo largo del proceso de extracción.

# Introducción

Un medio granular se define como una colección de partículas rígidas macroscópicas, cuyo tamaño es mayor a  $100 \mu\text{m}$  (Andreotti, Forterre, & Pauliquen, 2013). Conforman una extensa familia compuesta por granos de diferentes formas, tamaños y materiales, pero que comparten importantes y determinantes características. Tienen un comportamiento aleatorio y desordenado de manera individual, pero en bloque su comportamiento está dominado por contactos prolongados entre partículas, actuando como sólido o como fluido y desarrollando fenómenos como arcos, avalanchas y segregación.

Se estima que más del 50% de los procesos industriales en el mundo involucra medios granulares en algún nivel de la producción, lo que convierte a los productos a granel en el segundo material más utilizado en la industria después del agua (Duran, 2000). De esta manera, para garantizar la disponibilidad de estas especies en la cantidad, así como en la oportunidad y calidad requeridas, es necesario recurrir a su almacenamiento y conservación. El almacenamiento se refiere a concentrar la producción en lugares estratégicamente seleccionados; en tanto que la conservación implica proporcionar a los productos almacenados las condiciones necesarias para que no sufran daños evitando así mermas en su peso, reducciones en su calidad o en casos extremos la pérdida total. Los silos son la solución más habitual para el almacenamiento de productos granulares. Se trata de contenedores de distintas formas que pueden tener una capacidad de unos pocos metros cúbicos o centenares, y se utilizan para el almacenamiento y conservación de una extensa gama de productos granulares, bien sea semillas, cereales, harinas, forraje, concreto, carbón, material de armamento militar, entre otros.

Debido al uso extendido de los materiales granulares y las estructuras de almacenamiento, se hace necesario su estudio con el fin de comprender su comportamiento frente a distintas condiciones. De esta forma se identifican tres aspectos en esta área que resultan relevantes ante los problemas que se presentan en almacenaje y transporte: En primera instancia, el comportamiento estático del material contenido en un silo con lo que es posible conocer la distribución de esfuerzos, cadenas de contacto y fuerza sobre las paredes del contenedor al estar en reposo. Por otra parte, resulta



**Figura 1.** *Ejemplos de medios granulares.*

importante estudiar el material cuando es movilizado, conociendo así el tipo de flujo desarrollado por los gránulos, las zonas de mayor desplazamiento y las de estancamiento, y difusión del movimiento, lo que tiene implicaciones en la predicción de la distribución de esfuerzos a lo largo de la extracción y vaciado del silo. Mientras que el tercer aspecto de relevancia en el estudio de materiales granulares contenidos en silos hace referencia a las condiciones de simetría tanto en el llenado del contenedor como en el vaciado del mismo, ya que se ha observado que cuando el flujo del material no es simétrico respecto del contenedor y se tiene un flujo de llenado o vaciado de tipo excéntrico, la estabilidad de la estructura se ve comprometida y fallas pueden presentarse (Sielamowicz, Czech, & Kowalewski, 2015).

### **Estática del material granular**

El comercio agrícola potenció la construcción masiva de grandes silos para el almacenaje de cereales. Los materiales utilizados para su fabricación eran fundamentalmente hormigón armado, metal o madera, y para el cálculo de las presiones sobre las paredes se consideraba el modelo de presiones hidrostático, es decir, que tanto la presión lateral como la presión sobre el fondo venía dada por:

$$P = \rho gh + P_0 \quad (1)$$

Donde  $P$  es la presión que ejerce una columna de fluido de altura  $h$  y densidad  $\rho$ , bajo la influencia de  $g$  y presión atmosférica  $P_0$ .

Sin embargo, las diferencias observadas entre líquidos y medios granulares almacenados en silos motivaron a numerosos investigadores a estudiar y desarrollar modelos para describir el comportamiento de estos últimos. De esta forma, la presión de una columna de granos fue medida y reportada por Huber-Burnand (1829), Hagen (1852), y Roberts (1883) (Andreotti et al., 2013), concluyendo que estas presiones no siguen un comportamiento de acuerdo a la ley hidrostática, sino exponencial. En 1895 Janssen midió la presión al fondo de un silo que contenía granos de maíz y propuso un modelo para determinar la distribución de las presiones y esfuerzos dentro de un silo, conocido como el *modelo de Janssen*.

La normativa existente en la actualidad para la regulación de silos y estructuras de almacenamiento afines, apunta a las condiciones técnicas para garantizar la resistencia de las edificaciones. La mayoría de las normas vigentes están basadas en las formulaciones de Janssen para determinar las presiones verticales y horizontales dentro de un silo y consideran además coeficientes de *mayoración* para compensar las sobrepresiones durante el vaciado de los silos (Ravenet, 1975), sin embargo, los problemas hasta la fecha no han desaparecido. La mayoría de los silos construidos para almacenar productos de tipo granular sufren serios problemas de deformación, fracturas y colapso en el mediano y largo plazo, lo que pone en riesgo la seguridad de los trabajadores y la economía de la empresa responsable. Aunque las estadísticas más actuales no se encuentran disponibles, la tasa de fallas en silos ha sido mayor que para otro tipo de estructuras de almacenamiento, llegando a sumar más de 1000 desperfectos en la última década del siglo pasado, sólo en norte américa (Simpson, 1997),(*Nationwide Agribusiness Insurance Company, Bin Failures*, n.d.).

Las estadísticas de fallos y diversos estudios muestran la necesidad de corregir el modelo clásico de Janssen y proponen modificaciones a este (Landry & Grest, 2003).



**Figura 2.** Fallas encontradas en silos en distintas aplicaciones de la industria.

## Cinemática del material granular

El modelo de Janssen considera una masa en reposo, por tanto la teoría es válida para el material contenido en condiciones estáticas, pero no durante el proceso de vaciado del silo, ya que se rompe este equilibrio y se pasa a un estado plástico (Nedderman, 2005).

Uno de los flujos más utilizados es el impulsado por gravedad, cuyo comportamiento cae entre sólido estático y fluido continuo (Chou, Chuang, Smid, Hsiau, & Kuo, 2003). El flujo de un material granular involucra interacciones de las partículas por medio de colisiones y fricción, a través de una red de contactos y fuerzas que cambia y evoluciona continuamente a medida que el material se moviliza. Estas interacciones partícula-partícula y el comportamiento aleatorio de los gránulos en movimiento, conllevan una alta complejidad en el estudio de flujos granulares.

El entendimiento de los perfiles de velocidad e interacciones en la descarga de un silo es útil para la determinación de la distribución de los tiempos de residencia de las partículas, las propiedades de mezcla del silo y la tasa de uso de las paredes, sin embargo el aspecto más relevante en el análisis de las velocidades de descarga es poder predecir el tipo de flujo que desarrolla el material, sea este flujo másico o central, y la principal problemática yace en la formulación de los mecanismos que controlan el flujo principalmente desde el análisis de la velocidad, ya que no existe un acuerdo general sobre la forma de las ecuaciones gobernantes (Nedderman, 2005).

En el año 1979, Nedderman y Tüzün proponen el *modelo cinemático* para el flujo de material granular inducido por gravedad, donde se asume que las partículas fluyen al caer en los espacios liberados por las partículas que salen en la capa debajo. En este planteamiento se reconoce la naturaleza discreta del medio, en contraste con la visión anterior donde el flujo era considerado

como un material continuo.

Si bien el modelo ha sido puesto a prueba con diversos métodos, la mayoría de estos estudios se han enfocado en el análisis de flujos simétricos y las condiciones asimétricas han recibido menos atención (Chou, Hsu, & Lau, 2002), a pesar de ser condiciones ampliamente utilizadas en la industria, siendo el mayor ejemplo de esto el caso de los silos multicelulares para crudo de cemento, donde la salida de material puede ser múltiple o bien única y fuera del centro del contenedor, creando condiciones de riesgo para la estructura y los trabajadores (Ravenet, 1977).

Las simulaciones numéricas conforman una herramienta muy útil para estudiar ciertos fenómenos complejos y en particular el método de elementos discretos es una aproximación prometedora para simular las condiciones mecánicas en sistemas que no se ajustan a un medio continuo (Kobylka & Molenda, 2013), como es el caso de los medios granulares. Utilizando un software de simulación basado en el método de elementos discretos se estudiará la condición estática y cinemática de un conjunto de partículas contenidas en una estructura 2D de fondo y paredes planas. En particular se busca conocer la distribución de esfuerzos dentro del silo bidimensional y su evolución al extraer el material por medio de un flujo constante, estudiando además el efecto de la simetría del flujo en la distribución.

# Capítulo 1

## Solido Granular

Un medio granular sin perturbaciones externas puede ser considerado como un sólido, donde el material soporta las fuerzas externas sin fluir. Ejemplos de esta situación son una pila de arena, el suelo sobre el que se asienta una casa o el material contenido dentro de un silo sin fluir (Andreotti et al., 2013).

### 1.1 Fracción de empaquetamiento

El empaquetamiento se encuentra directamente relacionado con el volumen del material. Considérese  $N$  partículas, cada una con volumen  $v_0$ , almacenadas en un silo ocupando un volumen  $V$  del contenedor, entonces la fracción de volumen o empaquetamiento viene dado por:

$$\phi = \frac{V_{grains}}{V_{total}} = \frac{Nv_0}{V} \quad (1.1)$$

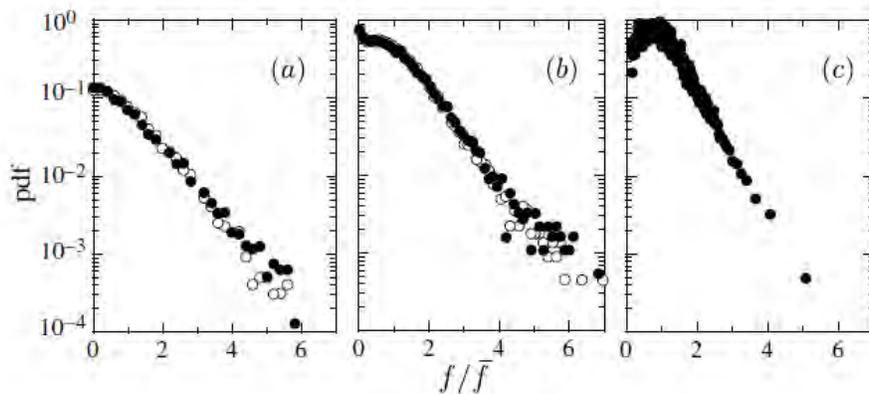
De esta forma el factor de empaquetamiento siempre será menor que 1, alcanzando este valor cuando los granos ocupan todo el volumen disponible, un ejemplo de este caso sería un conjunto de partículas cúbicas perfectamente apiladas. De esta forma, mientras menor sea el valor de  $\phi$  se estará en presencia de un empaquetamiento poco compactado o suelto, y a mayores valores de  $\phi$  se tendrá un empaquetamiento compacto o denso. (Hinrichsen & E Wolf, 2004)

Por otra parte la porosidad del material apilado está dada por la razón entre el volumen de espacios vacíos y el volumen total cubierto por las partículas, esto es:

$$\varepsilon = \frac{V_{vacio}}{V_{total}} = 1 - \phi \quad (1.2)$$

El empaquetamiento del material confinado puede ser modificado debido a perturbaciones como por ejemplo vibraciones, provocando cambios en la configuración.

## 1.2 Fuerzas



**Figura 1.1.** Distribución de fuerzas normales de contacto entre partículas contenidas en silos obtenidas de distintos estudios

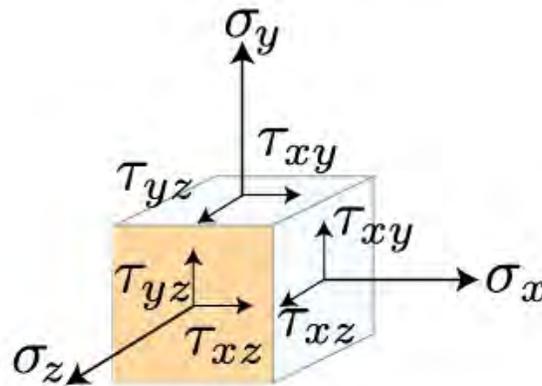
Un conjunto de granos apilados en reposo es el resultado del equilibrio mecánico de todas las partículas. La fuerza de contacto entre dos granos se separa en una fuerza normal y una tangencial, en el caso de una pila en reposo las fuerzas entre los granos se organizan de manera tal que cada partícula se encuentra en equilibrio.

Estudios experimentales utilizando diversas técnicas de medición como el método del papel de carbón, maquetas con partículas fotoelásticas, entre otras (Majmudar & Behringer, 2005), (Mueth, Jaeger, & Nagel, 1999), (Radjai, Roux, & Moreau, 1999) han encontrado que en un conjunto de partículas granulares contenidas en silos bajo condiciones de equilibrio estático, sin ser sometidas a fuerzas o cargas externas, existe una distribución de fuerzas entre partículas de gran amplitud de rango, observando una coexistencia entre fuerzas muy pequeñas de una mínima fracción de la media total de las fuerzas presentes en el sistema, hasta fuerzas de hasta 6 veces la media.

La forma de la distribución de las fuerzas normales de contacto entre las partículas es consistente en los estudios mencionados (ver figura 1.1), conservando una tendencia exponencial para fuerzas mayores a la media,  $\bar{f}$ , mientras que para fuerzas menores a  $\bar{f}$  la distribución se torna más plana y es proporcional a una relación de potencia, esto es  $P(f) \propto (f/\bar{f})^\alpha$ , con  $\alpha$  cercano a cero.

### 1.3 Esfuerzos o stress

Considere un cubo infinitesimal como en la figura 1.2, cuyas caras y aristas son paralelas a los ejes coordenados. Cada cara del cubo es identificada por la dirección de sus normales, de esta manera se tienen dos caras  $x$ , otras dos caras  $y$  y otras dos caras con identificación  $z$ .



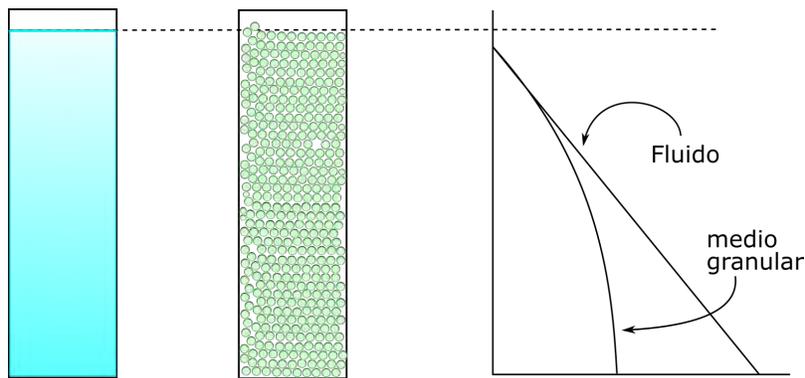
**Figura 1.2.** Cubo infinitesimal con componentes del tensor de esfuerzos

Sea  $F_x$  una fuerza actuando sobre una de las caras  $x$  del cubo. Como el cubo es infinitesimal la fuerza actuante sobre la cara  $x$  contraria no difiere significativamente (Nedderman, 2005). Si  $F_x$  no es una fuerza normal tiene componentes en las tres direcciones coordenadas, siendo estas  $F_{xx}$ ,  $F_{xy}$  y  $F_{xz}$ . Dividiendo por el área de la cara  $x$ ,  $A_x$ , se obtiene el esfuerzo o *stress* en esta cara. Por convención el *stress* normal es denotado por  $\sigma_{xx}$  mientras que los restantes son llamados esfuerzos de cizalle y se denotan como  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  (Nedderman, 2005).

Luego para las caras restantes del cubo existen igualmente tres componentes de *stress*, de esta manera para un sistema tridimensional se tiene que el tensor de esfuerzos tiene 9 componentes y puede escribirse de la forma:

$$\begin{matrix}
 \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}
 \end{matrix}
 \quad (1.3)$$

Un caso particular de esfuerzo es la *Presión*, donde se tiene que todos los esfuerzos normales son iguales y los de cizalle son cero. Este escenario es más común en el campo de la mecánica de fluidos y se conoce también como presión isotrópica.



**Figura 1.3.** Esquema con los perfiles de esfuerzo vertical para una columna de líquido y una columna de un medio granular de acuerdo a modelo de Janssen.

En el caso de un medio granular contenido en un silo el modelo más utilizado hasta la fecha para determinar la distribución de *stress* en la columna de material es el *modelo de Janssen*, formulado en 1895 por Janssen tras realizar una serie de experimentos en silos llenos de granos de maíz donde registraba la presión en el fondo del contenedor, observando que, a diferencia de lo que sucede en un medio líquido, la presión en la columna de material se saturaba mientras más granos de maíz eran agregados al silo (Andreotti et al., 2013).

Para formular su modelo Janssen realiza 3 supuestos:

1. El esfuerzo vertical  $\sigma_{zz}$  es considerado uniforme a través de la sección transversal del silo.
2. La fricción está completamente movilizada en las paredes. De esta manera el esfuerzo de cizalle en las paredes verticales está orientado hacia arriba y es igual a  $\tau = \mu_w \sigma_{rr}$ , donde  $\mu_w$  es el coeficiente de roce entre las paredes y las partículas.
3. El esfuerzo horizontal normal es proporcional al esfuerzo vertical normal  $\sigma_{rr} = \kappa \sigma_{zz}$ , con  $\kappa$  una constante.

Bajo estos supuestos Janssen propone que la distribución de esfuerzos vertical estará dada por:

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}) \quad (1.4)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del conjunto de partículas en el material,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $\lambda$  es un largo característico que está dado por:

$$\lambda = \frac{D}{4\kappa\mu_w} \quad (1.5)$$

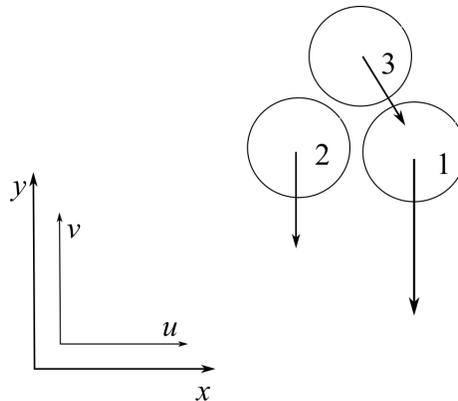
Con  $D$  el diámetro del silo.

## Capítulo 2

### Flujo granular

#### 2.1 Modelo Cinemático

En el modelo cinemático de Nedderman y Tüzün se propone que las partículas apiladas en un silo o contenedor fluyen de manera tal que aquellas que se encuentran inmediatamente sobre el canal de salida caen primero evacuando el silo. A continuación las partículas ubicadas en la capa superior más próxima se deslizan a los espacios vacantes dejados por las partículas que han salido del contenedor y de manera similar las partículas de la capa siguiente se deslizan a ocupar los espacios dejados por las anteriores, propagando el movimiento entre el material. De esta forma el flujo de las partículas es generado por aceleración de gravedad, por lo que se asume que el peso de los granos es suficiente para inducir el movimiento y no se ve afectado por gradientes de estrés dentro del silo (R M Nedderman, 1978).



**Figura 2.1.** Planteamiento del modelo cinemático de Nedderman y Tüzün.

Considere tres partículas como se muestra en la figura 2.1. Si la velocidad de descenso de la partícula 1 es mayor que la partícula 2 entonces habrá una tendencia para la partícula 3 de moverse hacia la derecha, es decir existirá una relación entre la velocidad horizontal  $u$  y el gradiente de la

velocidad vertical  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . La relación más simple posible es:

$$u = -B \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1)$$

Donde  $B$  es una constante relacionada con la naturaleza del material. Para un material incompresible, es posible relacionar la ecuación 2.1 con la ecuación de continuidad en dos dimensiones, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Con  $\frac{\partial u}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

Se supone una solución para la velocidad vertical de la forma

$$v(x, y) = v_p + X(x)Y(y) \quad (2.4)$$

Derivando 2.4 y reemplazando en 2.3 se tiene

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{BY(y)} \frac{dY(y)}{dy} = -\lambda_n^2 \quad (2.5)$$

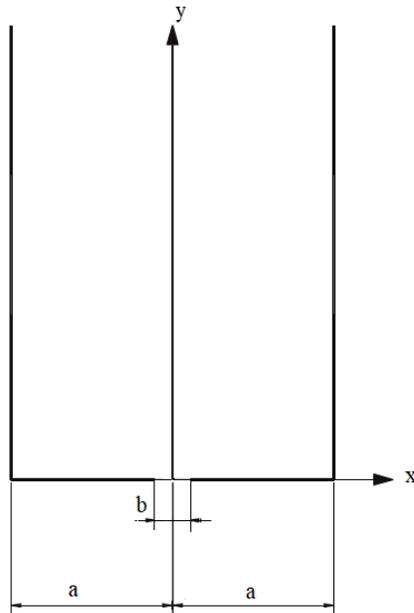
Luego, las soluciones para  $X(x)$  e  $Y(y)$  se obtienen usando:

$$X(x) = C_1 \cos(\lambda_n x) + C_2 \sin(\lambda_n x) \quad (2.6)$$

$$Y(y) = A e^{-\lambda_n^2 B y} \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Flujo céntrico

Considere un silo bidimensional de fondo plano con salida central, como se muestra en la figura 2.2, donde por conveniencia se establece el sistema de coordenadas en el centro de la salida.



**Figura 2.2.** Esquema de un silo bidimensional de fondo plano con canal de salida central.

Ya que no existe flujo en las paredes del contenedor, se tiene:

$$\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0 \quad (2.8)$$

Por otro lado, en el fondo del silo se asume que las partículas sobre la salida fluirán con velocidad constante  $v_0$ , mientras que hacia los costados de la salida no fluirán, esto es:

$$v(x, 0) = v_0, \quad -b < x < b \quad (2.9)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad -a < x < -b \text{ y } b < x < a \quad (2.10)$$

Se asume además que la velocidad horizontal de las partículas en el centro del canal de salida es cero, esto es

$$\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.11)$$

Utilizando estas condiciones en la ecuación 2.7 se obtiene una solución para la velocidad vertical en un silo con flujo céntrico:

$$v(x, y) = \frac{b}{a}v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0}{n\pi} e^{-(n\pi/a)By} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (2.12)$$

Mientras que la velocidad horizontal de las partículas para el flujo simétrico estará dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bv_0}{a} e^{-(n\pi/a)By} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (2.13)$$

### 2.1.2 Flujo excéntrico

Considérese ahora un silo bidimensional de fondo plano con abertura excéntrica, como se muestra en la figura 2.3. De igual forma que en el caso anterior, el sistema de coordenadas se establece en el centro de la salida.

Las condiciones de borde para este sistema serán

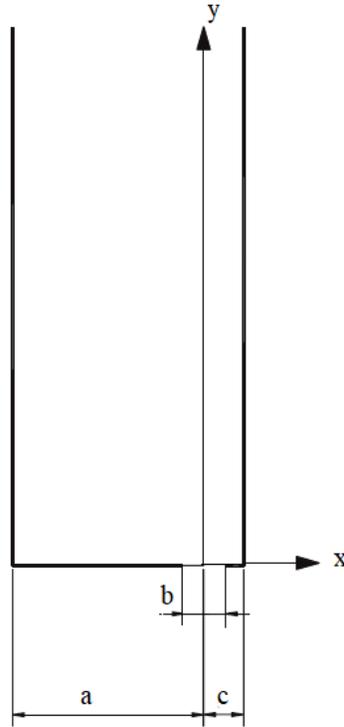
$$\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=c} = 0 \quad (2.15)$$

Se considera igualmente que la velocidad vertical de las partículas es uniforme a través de la salida y que no existe flujo vertical fuera de esta

$$v(x, 0) = v_0, \quad -b < x < b \quad (2.16)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad -a < x < -b \text{ y } b < x < c \quad (2.17)$$



**Figura 2.3.** Esquema de un silo bidimensional de fondo plano con salida excéntrica

Y de igual forma que el caso céntrico, se considera como condición inicial que no existe movimiento horizontal en las partículas en  $x = 0$

$$\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.18)$$

Con estas condiciones se obtiene una solución para la velocidad vertical  $v(x, y)$  y para su componente horizontal  $u(x, y)$  para el caso de un flujo asimétrico. En el lado derecho de la salida se tiene que la velocidad vertical  $v_d(x, y)$  y su componente horizontal  $u_d(x, y)$  serán:

$$v_d(x, y) = \frac{2b}{a+c} v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0}{n\pi} e^{-(n\pi/c)B_d y} \sin\left(\frac{n\pi b}{c}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right) \quad (2.19)$$

$$u_d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_d v_0}{c} e^{-(n\pi/c)B_d y} \sin\left(\frac{n\pi b}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right) \quad (2.20)$$

Mientras que para el lado izquierdo las soluciones obtenidas son

$$v_i(x, y) = \frac{2b}{a+c}v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0}{n\pi} e^{-(n\pi/a)B_i y} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.21)$$

$$u_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_i v_0}{a} e^{-(n\pi/a)B_i y} \sin\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.22)$$

Cabe notar que la constante cinemática  $B$  tiene unidades de longitud, por lo que debe relacionarse con la escala de longitud del material o bien del contenedor (Nedderman, 2005). De esta manera, es razonable asumir una relación entre  $B$  y la difusión del movimiento dentro del material, esperando entonces que ésta sea proporcional al diámetro de las partículas (Melo, Vivanco, Fuentes, & Apablaza, 2008).

# Capítulo 3

## Simulaciones

El software libre Yade fue utilizado para realizar las simulaciones en este estudio. Se trata de un software de código abierto para modelos numéricos discretos, enfocado en el Método de Elementos Discretos (DEM por sus siglas en inglés). La estructura principal de Yade está basada en C++, usando un modelo de objetos flexible que permite la implementación de nuevos algoritmos e interfaces (*Yade, DEM*, n.d.), mientras que para la construcción y control de simulaciones se emplea Python como lenguaje principal.

### 3.1 Descripción de los sistemas simulados

Los sistemas diseñados para el estudio se diferencian en 4 principales aspectos:

1. Distribución del radio de las partículas:

Bajo este parámetro se crean 3 modelos, uno monodisperso, es decir donde todas las partículas del sistema tienen el mismo radio, en particular  $r = 0.45[mm]$ , un segundo modelo bidisperso, donde el 50% del total del material tiene radio  $r_1 = 0.40[mm]$  y el 50% restante tiene radio  $r_2 = 0.45[mm]$  y un tercer sistema totalmente disperso, donde todas las partículas tienen distinto tamaño, y donde la diferencia entre el radio de la partícula más pequeña y la más grande, con  $r = 0.45[mm]$ , es de 1%.

2. Fricción:

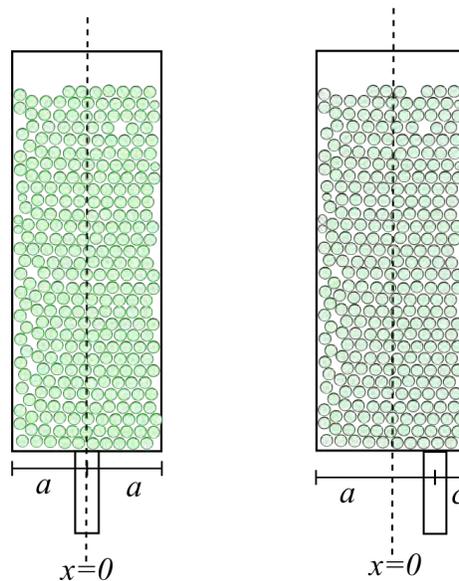
Se diseñan dos sistemas diferenciados por esta variable. En el primero se establece la fricción en las paredes del contenedor y el ángulo de fricción del material granular con los valores  $\mu_w = 0.45$  y  $\phi_p = 0.61$ , respectivamente. Por otra parte, para la segunda configuración se establece roce nulo tanto en las paredes del silo, como entre las partículas del material, es decir,  $\mu_w = 0$  y  $\phi_p = 0$ .

### 3. Posición de la salida:

Para el estudio de la influencia de la simetría en el flujo de material inducido por gravedad se dispone de dos sistemas, uno donde el canal de extracción del material es simétrico respecto del contenedor y se encuentra centrado en la base del silo, y un segundo sistema con salida excéntrica, donde la apertura del canal se encuentra a  $c = 9.45[mm]$  de la pared derecha del silo, como se ve en la figura 3.1.

### 4. Razón de aspecto del silo:

Se construyen tres silos, de manera que se tiene un silo alto con  $\Gamma = 2.8$ , un silo ancho con  $\Gamma = 0.7$  y uno más pequeño con razón de aspecto  $\Gamma = 1.4$ .



**Figura 3.1.** Esquema de la ubicación de la salida respecto del centro del sistema de referencia en las simulaciones

De esta forma, combinando las variables antes enumeradas se tienen 36 sistemas, los que se ordenan en la tabla 3.1 de acuerdo a sus características.

Por otra parte, los sistemas comparten las propiedades mecánicas de densidad del material  $\rho$ , módulo de Young  $\nu$  y módulo de Poisson  $E$ , cuyos valores se ordenan en la tabla 3.2.

El proceso de simulación se desarrolla en dos etapas que se detallan a continuación.

#### 3.1.1 Preparación de los estados iniciales

Para la preparación de los estados iniciales se disponen las partículas aleatoriamente en la parte superior del silo, a modo de nube, y por medio de gravedad se depositan en el fondo del contenedor. El proceso de preparación del sistema continúa mientras las partículas se apilan y compactan hasta que el material alcanza un equilibrio cuasi estático. Se considera que el sistema ha alcanzado este

estado cuando tanto la fuerza total desbalanceada y la energía cinética media de las partículas son menores a  $\varepsilon_F = 1 * 10^{-5}[N]$  y  $\varepsilon_K = 1 * 10^{-5}[J]$ , respectivamente. De esta forma se generan 18 estados iniciales para los sistemas diferenciados por la fricción.

Cabe mencionar que tanto para la etapa de preparación, como para la posterior extracción del material, se limita la rotación de las partículas al plano XZ y la traslación a  $\hat{x}$  y  $\hat{z}$ .

### **3.1.2 Extracción del material**

La etapa de extracción comienza a partir del estado final de la etapa de preparación. En primera instancia se dibujan franjas de color verde y rojo intercaladas con ancho 10 diámetros, lo que permite visualizar las zonas movilizadas.

Posteriormente se ubica el canal de salida, centrado respecto del silo o excéntrico, y posteriormente se abre el mismo induciendo el flujo del material por medio de gravedad. El ancho del canal de salida es de 5.4 [mm] y es igual para todas las configuraciones.

El proceso de extracción se detiene cuando el 50% del material confinado ha sido evacuado. Para cada silo se realiza el mismo tratamiento y se aplican las mismas condiciones de detención.

Una vez detenido el flujo del material se procede a la extracción de datos, donde para cada paso de cálculo de la simulación se obtienen dos archivos en formato .dat conteniendo la información de radios, posiciones (x,y,z), velocidad lineal (x,y,z), rotación (x,y,z), velocidad angular (x,y,z), color (r,g,b), puntos de contacto (x,y,z), fuerza normal de contacto (x,y,z), fuerza de cizalle (x,y,z)

$\Gamma = 2.8$ n=39700	Monodisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Bidisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Disperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
$\Gamma = 0.7$ n=39700	Monodisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Bidisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Disperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
$\Gamma = 1.4$ n=19800	Monodisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Bidisperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica
	Disperso	Con Roce	Central
			Excéntrica
		Sin Roce	Central
			Excéntrica

**Tabla 3.1.** Combinación de factores geométricos y mecánicos que generan los distintos sistemas simulados en el estudio.

	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E$ [MPa]	$\nu$
Partículas	1130	4	0.5
Paredes	8000	210000	0.5

**Tabla 3.2.** Propiedades mecánicas para las partículas y paredes del sistema.

## Capítulo 4

### Resultados y Análisis

#### 4.0.1 Estado estático

##### Fracción de empaquetamiento

Para cada uno de los sistemas se encuentra la altura máxima alcanzada por la columna de material apilado y se determina el empaquetamiento del mismo antes de comenzar el vaciamiento del silo. En la tabla 4.1 se comparan los resultados obtenidos para los sistemas con y sin fricción para los distintos tamaños de silo en estudio.

La máxima altura se alcanza en los sistemas monodispersos y totalmente dispersos, y se observa que para cada caso las diferencias entre las alturas de estos sistemas son menores a un radio medio de las partículas. Mientras que la altura de los sistemas bidispersos resulta ser la menor en todos los casos, encontrando la mayor diferencia en el silo alto con fricción entre los sistemas bidisperso y monodisperso, siendo esta diferencia de 67 radios medios, esto es aproximadamente 33 partículas.

Por otra parte, el empaquetamiento de los sistemas monodisperso, bidisperso y totalmente disperso, para el silo pequeño con fricción, tienen diferencias despreciables, mientras que para el mismo sistema pero sin fricción todos los factores de empaquetamiento aumentan y el mayor empaquetamiento lo tiene el sistema monodisperso. Esta condición, donde el mayor empaquetamiento la tiene el sistema monodisperso, se repite en todos los casos, a excepción del caso del silo ancho con fricción.

Silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) con fricción		
	Altura máxima [m]	Empaquetamiento
Monodisperso	0.1494	0.7846
Bidisperso	0.1337	0.7847
Disperso	0.1493	0.7853
Silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) sin fricción		
Monodisperso	0.1365	0.8590
Bidisperso	0.1264	0.8296
Disperso	0.1364	0.8597
Silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) con fricción		
Monodisperso	0.2987	0.7892
Bidisperso	0.2685	0.7857
Disperso	0.2980	0.7853
Silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) sin fricción		
Monodisperso	0.2719	0.8669
Bidisperso	0.2520	0.8372
Disperso	0.2720	0.8666
Silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) con fricción		
Monodisperso	0.1503	0.7833
Bidisperso	0.1350	0.7802
Disperso	0.1505	0.7853
Silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) sin fricción		
Monodisperso	0.1366	0.8615
Bidisperso	0.1270	0.8289
Disperso	0.1370	0.8589

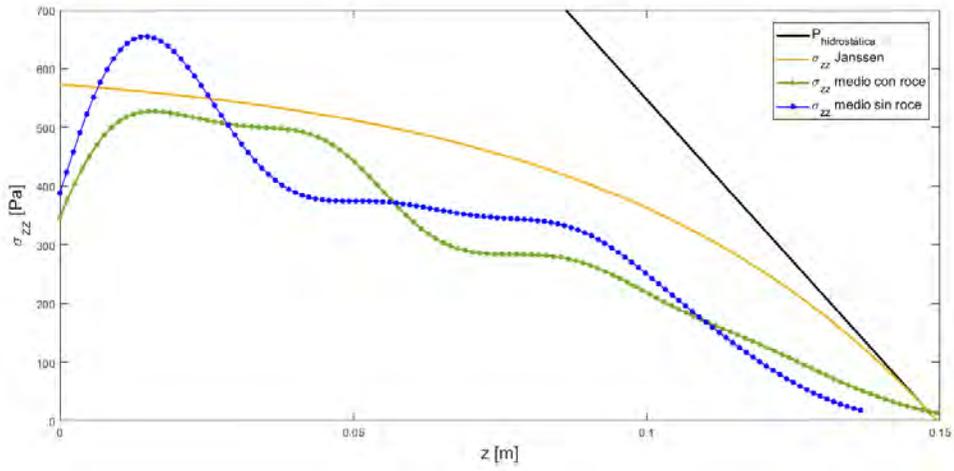
**Tabla 4.1.** Resultados de fracción de empaquetamiento para los sistemas simulados diferenciados por fricción, razón de aspecto y distribución del tamaño de las partículas

### Perfil de esfuerzos en estado estático

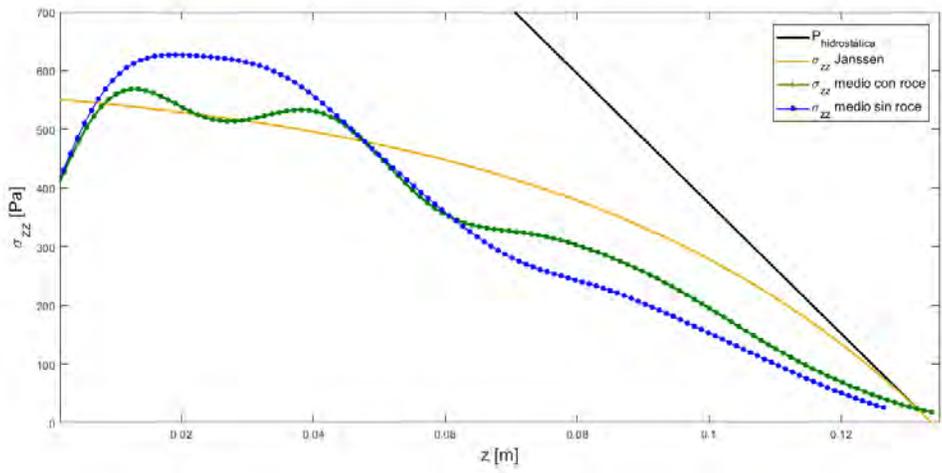
En la figura 4.1, se muestran los perfiles de *stress* de los sistemas monodisperso, bidisperso y totalmente disperso en el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ). En las gráficas se contrasta el perfil de esfuerzos medio de los sistemas, en los casos con y sin fricción, y se compara con el perfil de esfuerzo determinado de acuerdo al modelo de Janssen y con la de presión hidrostática para una columna de fluido de igual altura.

Se observa que los sistemas sin fricción tienden a alcanzar valores más altos de presión que sus equivalentes con fricción.

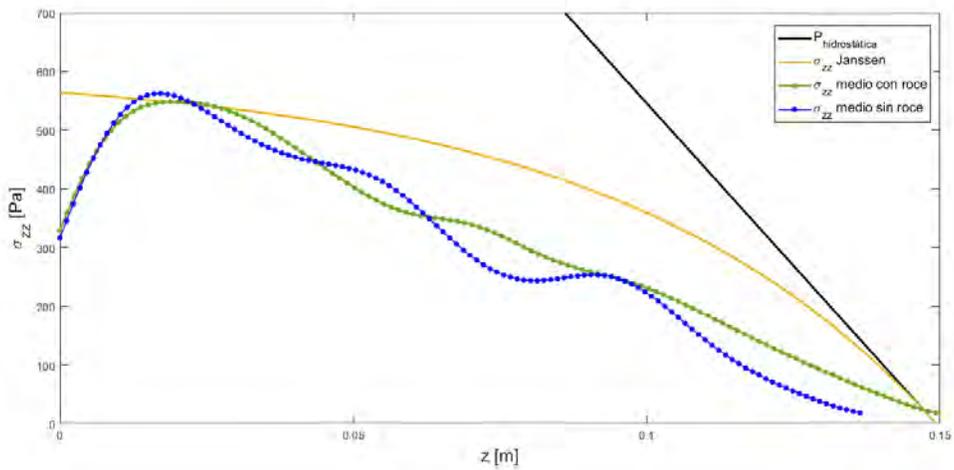
En general los perfiles de esfuerzos de los sistemas simulados no se ajustan al perfil propuesto por Janssen, encontrando las mayores diferencias en el silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) donde para todas las distribuciones de partículas se encontraron valores mayores de *stress*, superando a lo estimado por el modelo de Janssen en alrededor de 400 [Pa] para los casos con fricción, mientras que para los casos sin roce la máxima diferencia hallada es en el caso monodisperso, donde el perfil de esfuerzo es hasta 3 veces mayor en su máxima amplitud.



(a). Sistema monodisperso

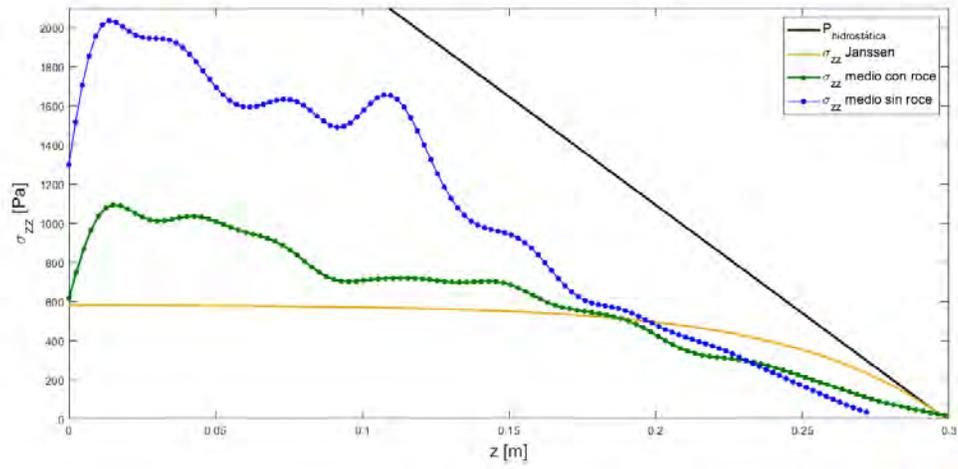


(b). Sistema bidisperso

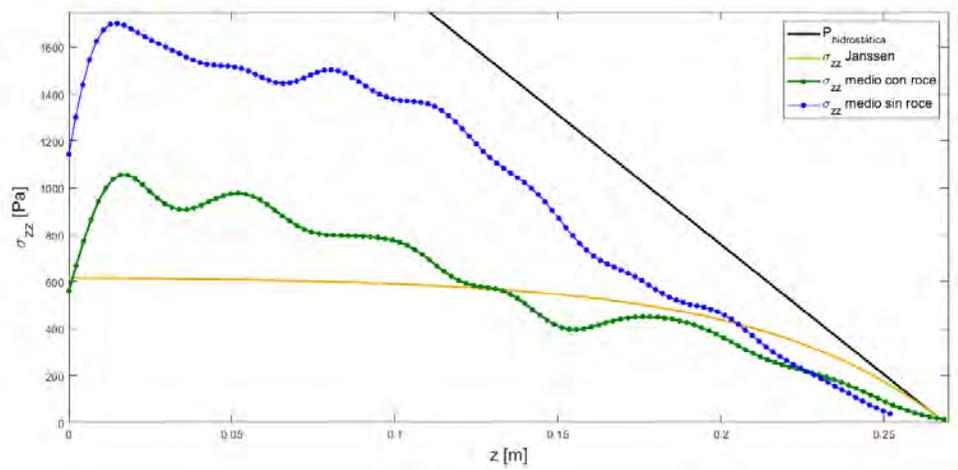


(c). Sistema disperso

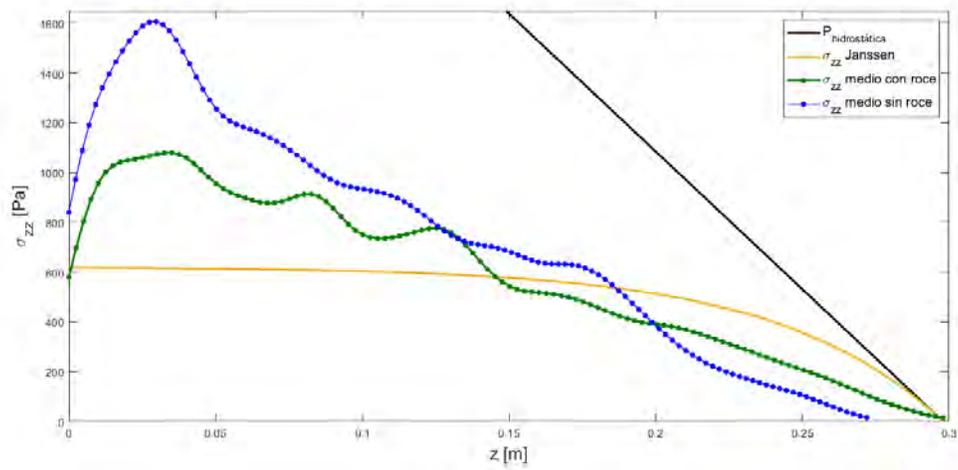
Figura 4.1. Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto  $\Gamma = 1.4$



(a). Sistema monodisperso

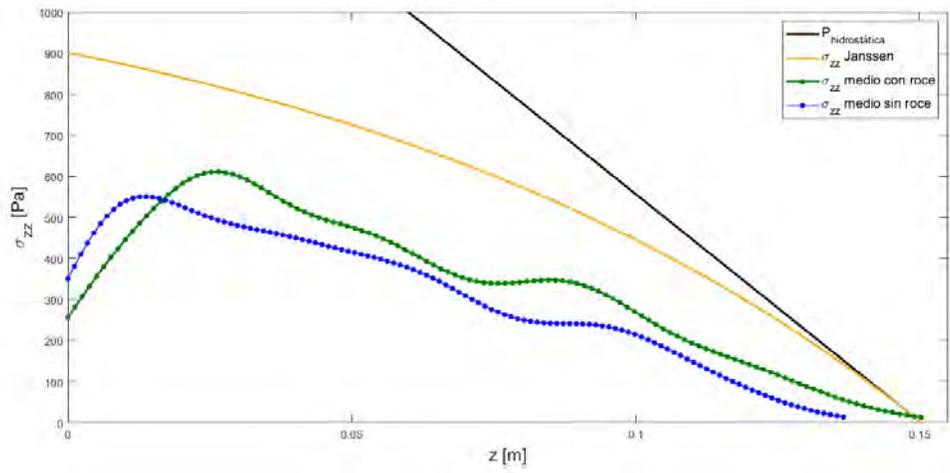


(b). Sistema bidisperso

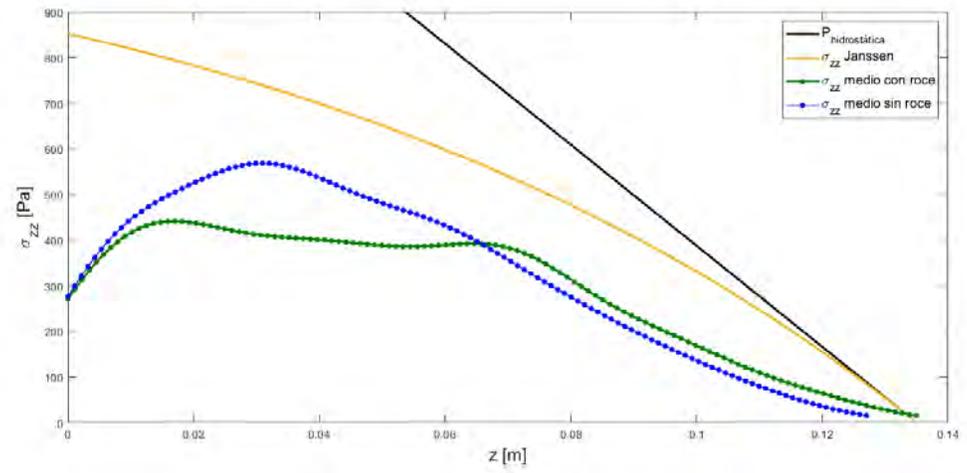


(c). Sistema disperso

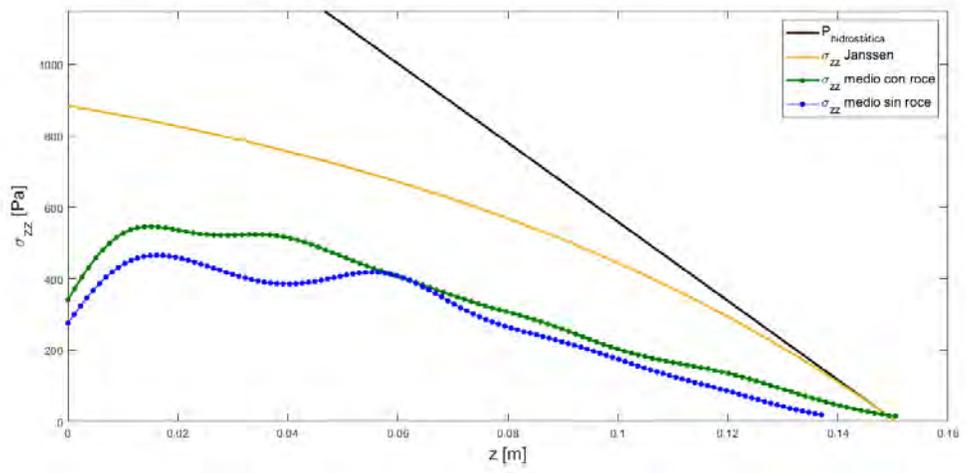
Figura 4.2. Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto  $\Gamma = 2.8$



(a). Sistema monodisperso



(b). Sistema bidisperso



(c). Sistema disperso

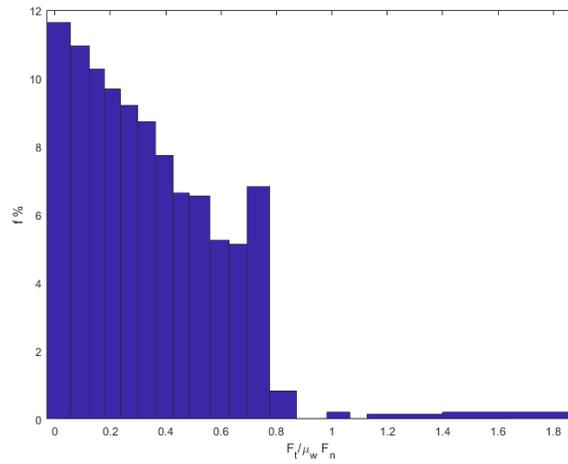
Figura 4.3. Comparación de los perfiles de esfuerzo vertical para cada sistema en el silo con razón de aspecto  $\Gamma = 0.7$

Por otra parte, en el caso del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ), se tiene que los perfiles de esfuerzo resultan ser menores a lo calculado utilizando el modelo de Janssen en todas las configuraciones simuladas, encontrando diferencias entre los 300 [Pa] y 500 [Pa].

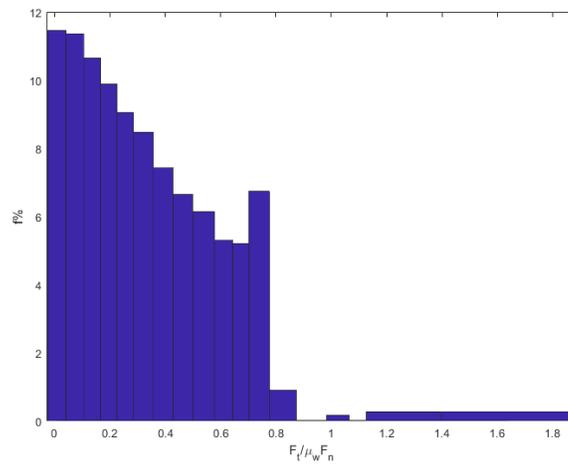
Las diferencias halladas entre los perfiles de esfuerzo de los sistemas simulados y los calculados utilizando el modelo de Janssen puede relacionarse a que el segundo supuesto de Janssen no siempre se cumple, es decir la fuerza de fricción en la pared no se encuentra completamente movilizada. En particular se tiene que un porcentaje mucho menor al 10% de las fuerzas de interacción cumple con este criterio (ver figura 4.4).

### **Fuerzas normales de contacto**

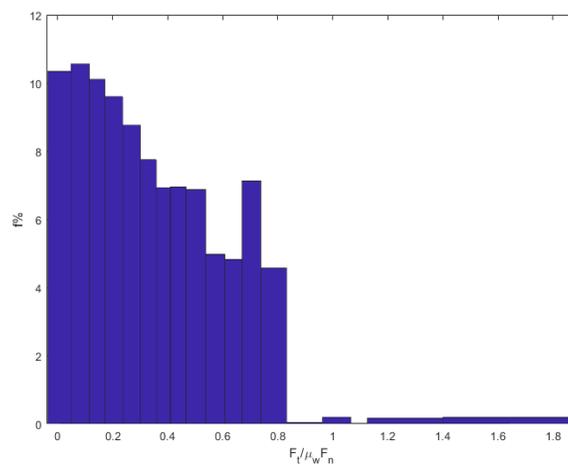
En la figura 4.5 se tienen las gráficas de la distribución de la fuerza normal de contacto entre las partículas dentro del silo. La tendencia que se observa en las tres gráficas es consistente con lo planteado en la sección 1.2, donde, independiente de las condiciones de fricción y distribución de tamaños de las partículas, la distribución de amplitudes de la fuerza normal de contacto sigue una tendencia del tipo decaimiento exponencial.



(a). Sistema monodisperso

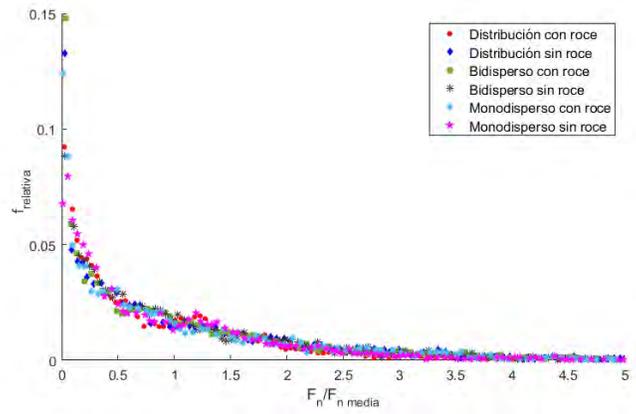


(b). Sistema bidisperso

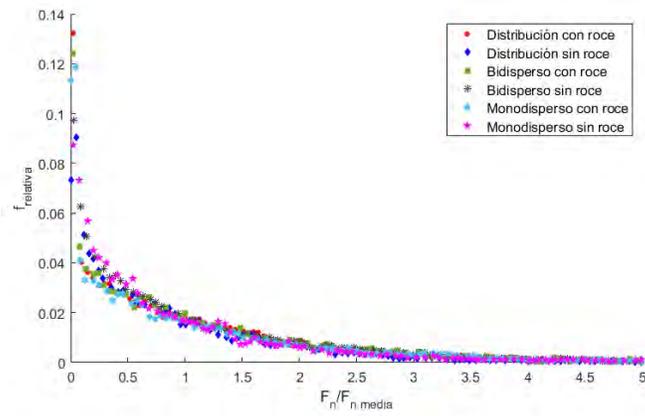


(c). Sistema bidisperso

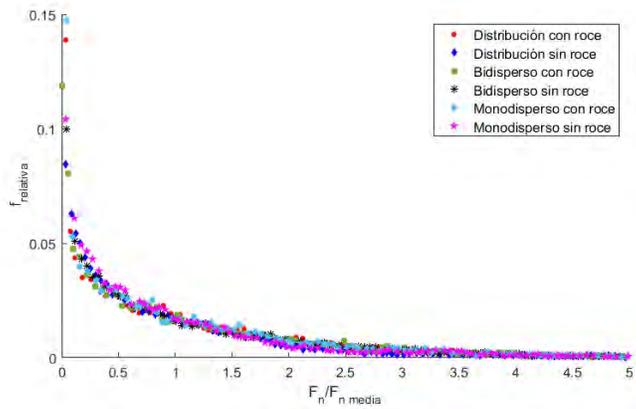
**Figura 4.4.** Frecuencia relativa de la razón  $F_t / \mu_w F_n$  en los sistemas totalmente dispersos con roce para los tres tamaños de contenedor



(a).  $\Gamma = 1.4$



(b).  $\Gamma = 2.8$



(c).  $\Gamma = 0.7$

**Figura 4.5.** Distribuciones de la fuerza de contacto normal entre las partículas para los distintos sistemas simulados

## 4.0.2 Estado cinemático

### Perfil de esfuerzos durante la extracción

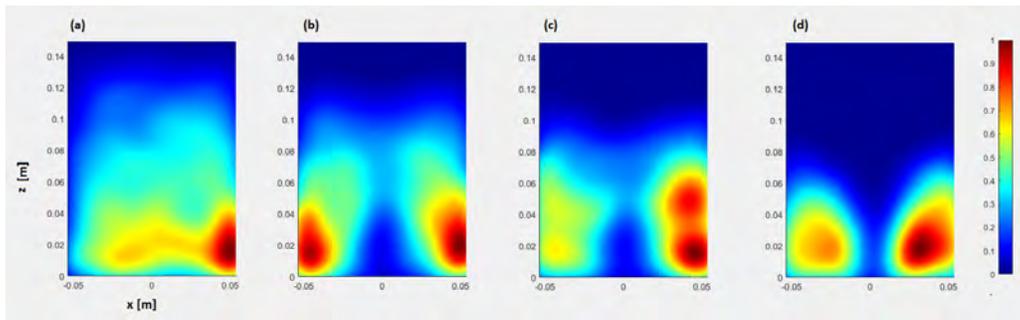
En la figura 4.6, se tiene el mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del contenedor. Se tienen 4 instantes en el proceso de extracción para el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ), con partículas totalmente dispersas. Los instantes de extracción en la figura corresponden a:

- a Condición inicial de la extracción
- b Transcurrido un 25% de la extracción
- c Transcurrido un 50% de la extracción
- d Condición final de la extracción

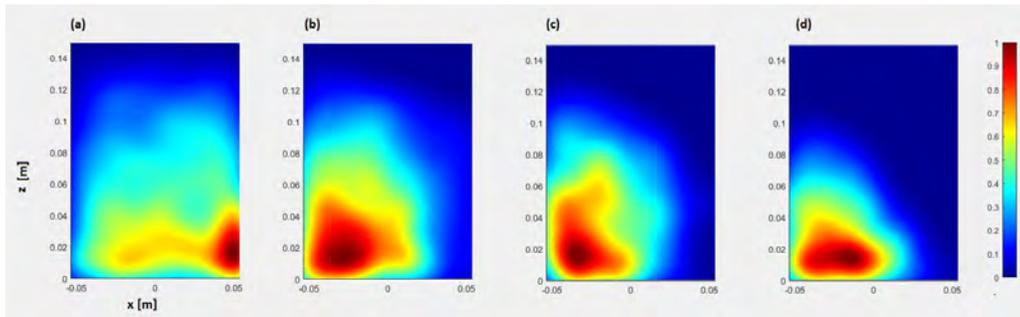
En el anexo se pueden encontrar los mapas de intensidades de los esfuerzos dentro del silo de los mismos instantes de extracción para cada uno de los sistemas restantes.

Se observa que para los sistemas con flujo simétrico, la intensidad de los esfuerzos se distribuye hacia ambos lados de la salida, mientras que en caso de los flujos excéntricos la pared opuesta a la posición del canal de salida tiene las mayores intensidades. Las diferencias entre la máxima y mínima magnitud de los esfuerzos dentro del silo van desde los 400 [Pa] en el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) hasta los 900 [Pa] y 1000 [Pa], diferencias encontradas en el silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).

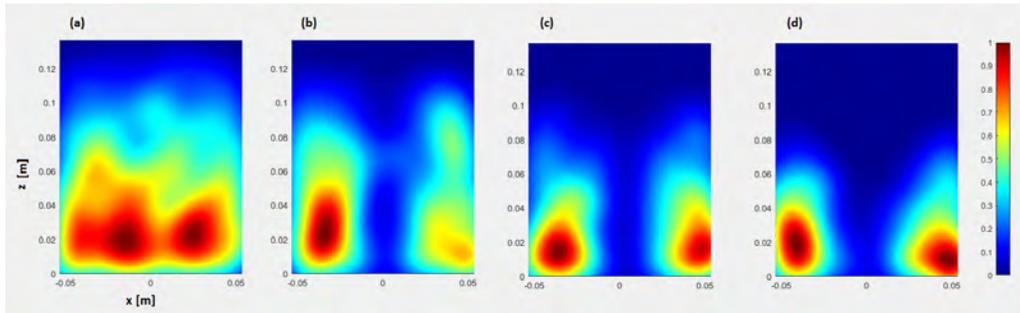
Se tiene también que conforme se extrae el material del silo el gradiente de esfuerzos tiende a disminuir, como se muestra en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9.



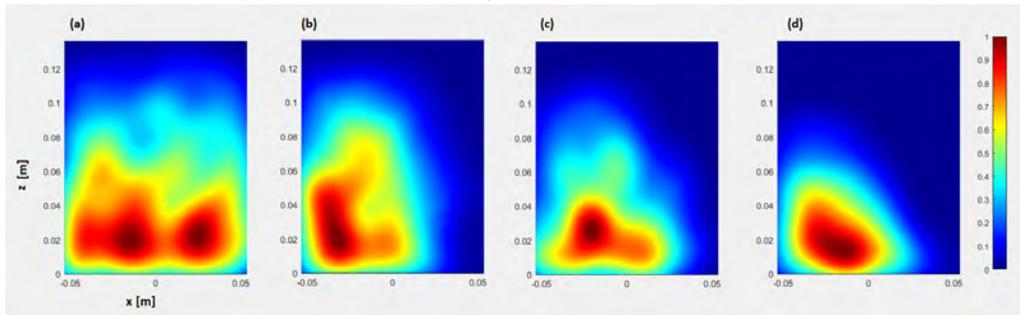
(a). Sistema completamente disperso con roce, extracción central



(b). Sistema totalmente disperso con roce, extracción excéntrica

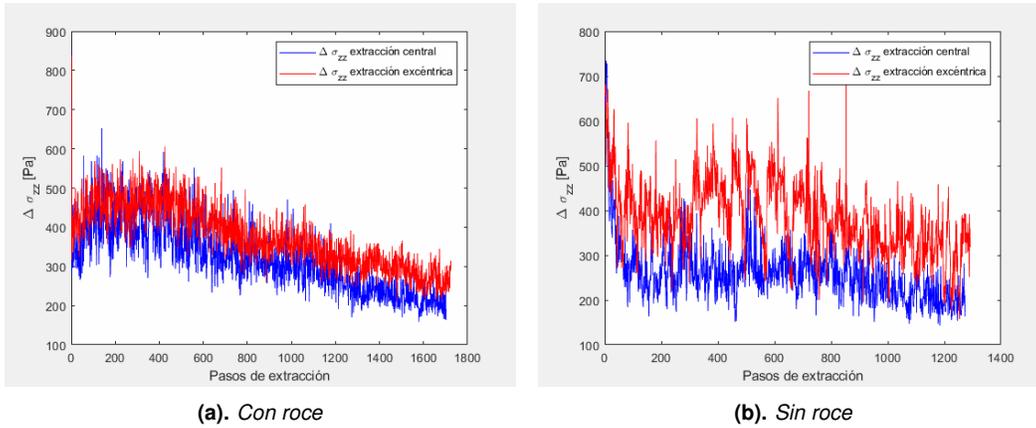


(c). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción central

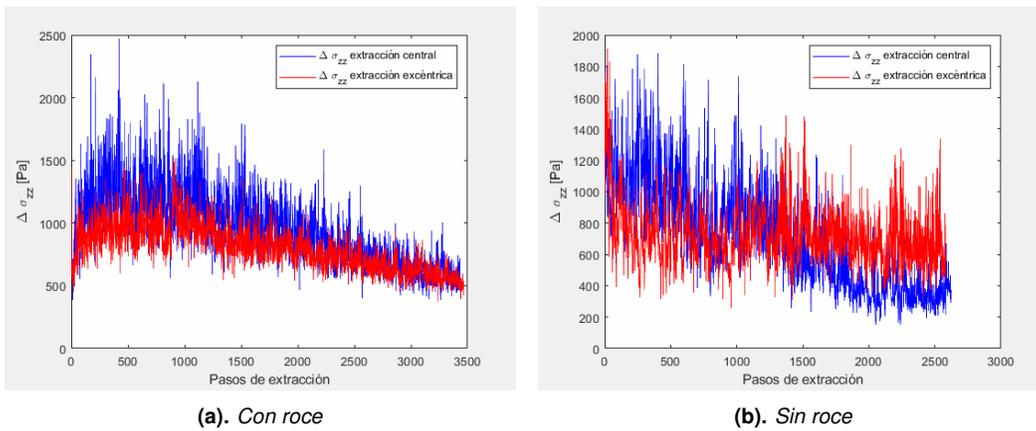


(d). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción excéntrica

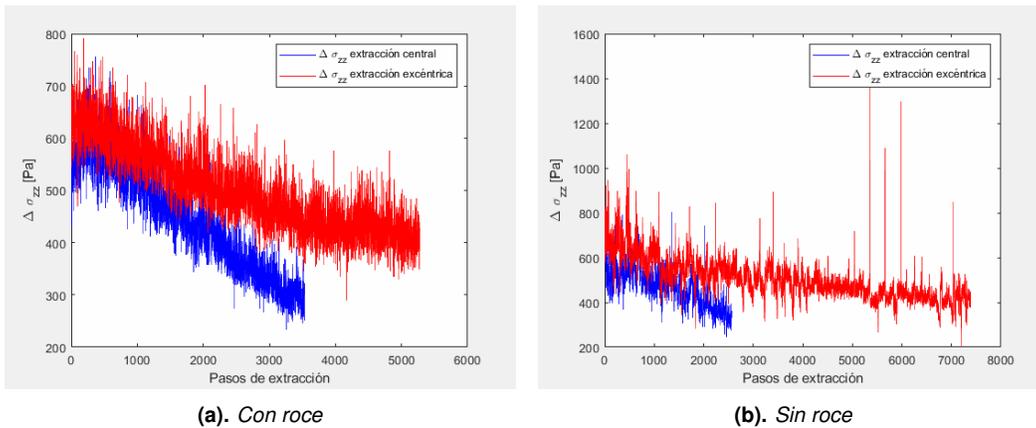
**Figura 4.6.** Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema completamente disperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).



**Figura 4.7.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas totalmente dispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ )



**Figura 4.8.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas totalmente dispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ )



**Figura 4.9.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas totalmente dispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ )

## Perfiles de velocidad vertical

En la figura 4.19, se tienen 4 instantes en el proceso de extracción para el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ), con partículas totalmente dispersas. Los instantes de extracción en la figura corresponden a:

- a Condición inicial de la extracción
- b Transcurrido un 25% de la extracción
- c Transcurrido un 50% de la extracción
- d Condición final de la extracción

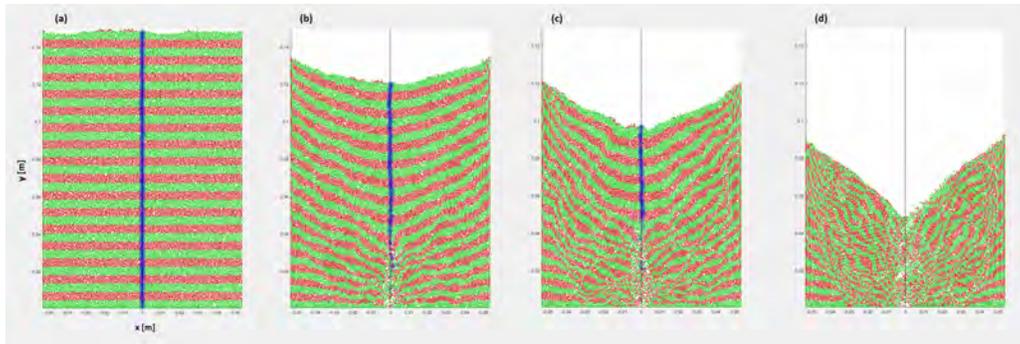
En el anexo se pueden encontrar los patrones de franjas de los mismos instantes de extracción para cada uno de los sistemas restantes.

En la imagen se puede observar la distribución del movimiento dentro del silo por medio de la deflexión que sufren las franjas coloreadas durante la extracción. Se distingue de esta forma que en los sistemas con roce se desarrolla mayoritariamente un tipo de flujo central (*core flow*), donde la mayor cantidad de material movilizado se encuentra en las cercanías de la salida y existen zonas de estancamiento hacia las paredes del contenedor. Mientras que en el caso de los sistemas sin fricción se observa un tipo de flujo másico (*mass flow*), donde el movimiento se difunde por todo el material y este desciende conjuntamente por el contenedor.

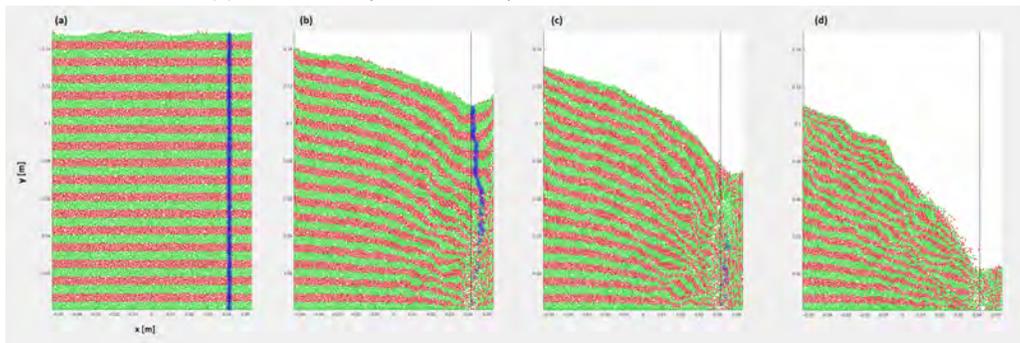
En la figura 4.19, las partículas coloreadas de azul corresponden a las partículas ubicadas en el centro del canal de extracción antes de comenzar el flujo. Al seguir su trayectoria durante la extracción se observa que, para los casos con extracción simétrica o central su velocidad horizontal es casi nula y caen verticalmente, satisfaciendo la condición para el modelo cinemático supuesta en la ecuación 2.11, sin embargo para el caso excéntrico esta condición no se cumple. Se observa que las partículas no bajan solo verticalmente, sino que existe una componente de velocidad horizontal y su trayectoria de descenso traza una curva.

Por otra parte, se obtienen los perfiles de velocidad vertical para 6 alturas distintas de los silos (ver figuras 4.11, 4.12, 4.13) y se realiza un ajuste utilizando la herramienta `curve_fit` de python. Se estudia el instante de  $t = 51[s]$  para todos los casos. Se ingresa como función de ajuste la solución céntrica del modelo cinemático con  $n = 8$ , y se obtienen los valores para la constante de difusión  $B$  que se encuentran en la tabla 4.2.

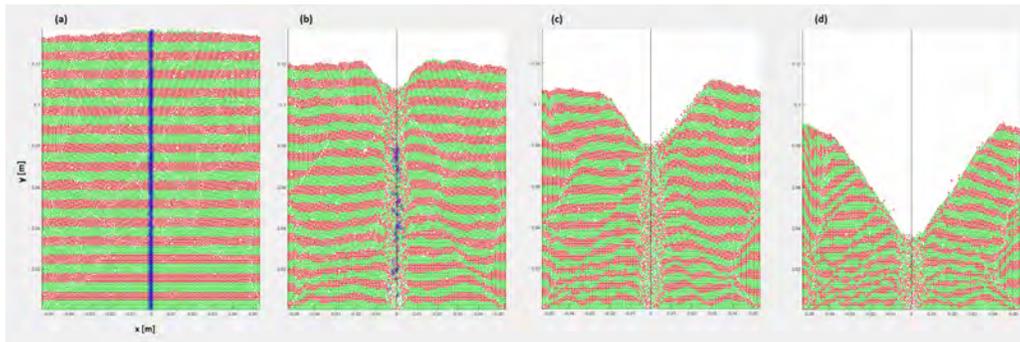
En el caso del ajuste para el silo alto se obtuvieron coeficientes de determinación  $R^2$  mucho menores a 1 por lo que los resultados arrojados por el ajuste no se consideran válidos. Por otro



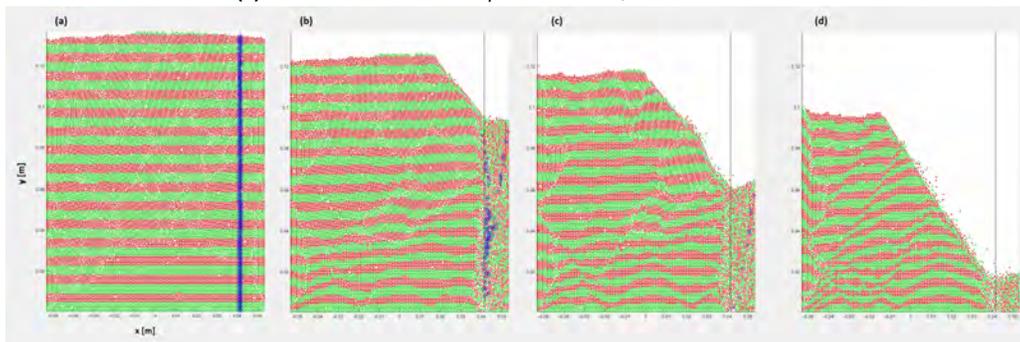
(a). Sistema completamente disperso con roce, extracción central



(b). Sistema totalmente disperso con roce, extracción excéntrica



(c). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción central



(d). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción excéntrica

**Figura 4.10.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema completamente disperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).

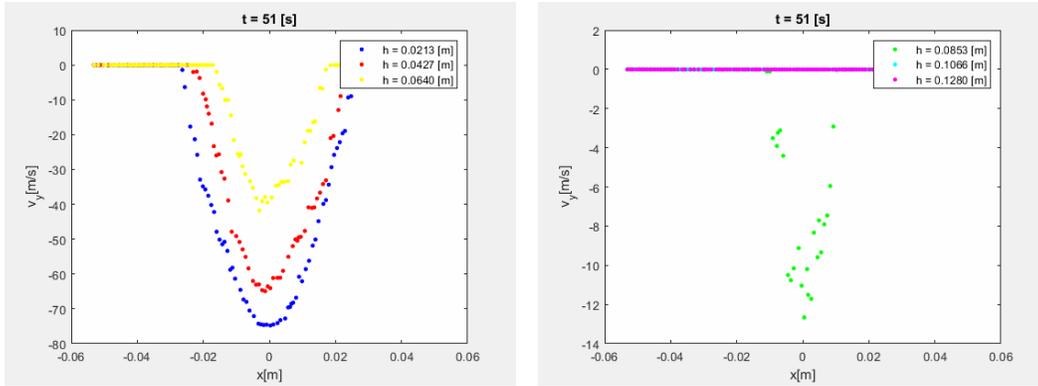


Figura 4.11. Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) en instante  $t=50$  [s]

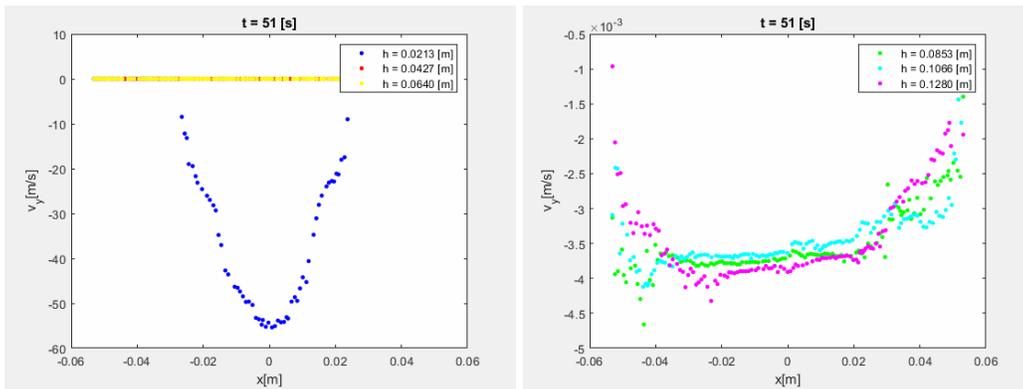


Figura 4.12. Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) en instante  $t=51$  [s].

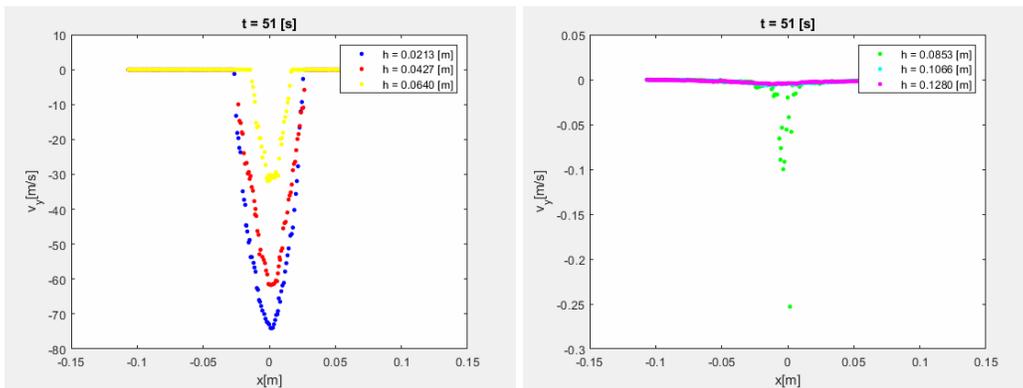
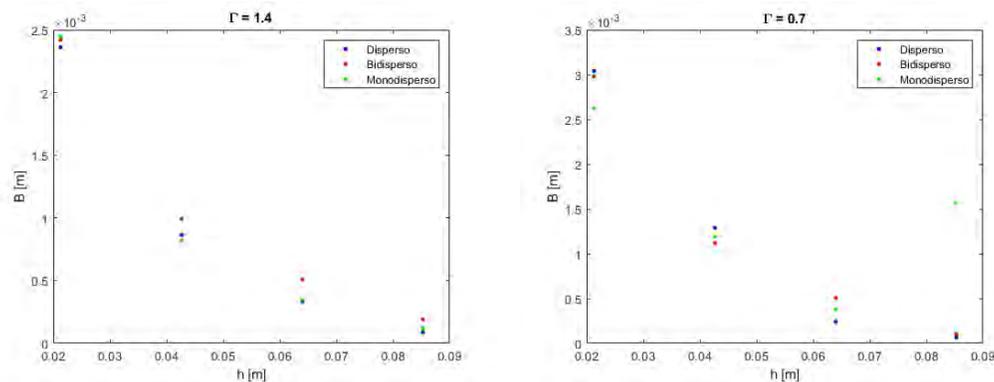


Figura 4.13. Curvas de velocidad vertical para sistema completamente disperso con roce, extracción céntrica silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) en instante  $t=51$  [s].

Silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) con fricción						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Altura [m]	0.0213	0.0427	0.0640	0.0853	0.1066	0.1280
Monodisperso	2.45E-03	8.22E-04	3.46E-04	1.18E-04	4.59E-05	1.94E-03
Bidisperso	2.42E-03	9.91E-04	5.08E-04	1.92E-04	7.90E-06	1.16E-03
Disperso	2.36E-03	8.65E-04	3.33E-04	8.77E-05	2.77E-03	2.59E-03
Silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ) con fricción						
Altura [m]	0.0425	0.0851	0.1277	0.1703	0.2128	0.2554
Monodisperso	1.31E-03	4.43E-03	4.09E-03	3.50E-03	3.06E-03	2.64E-03
Bidisperso	1.46E-03	1.62E-03	9.76E-03	6.77E-03	4.61E-03	4.19E-03
Disperso	1.18E-03	4.33E-03	5.72E-03	4.71E-02	3.32E-02	2.44E-03
Silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ) con fricción						
Altura [m]	0.0213	0.0427	0.0640	0.0853	0.1066	0.1280
Monodisperso	2.62E-03	1.19E-03	3.78E-04	1.57E-03	2.00E-03	2.64E-03
Bidisperso	2.98E-03	1.12E-03	5.09E-04	1.03E-04	2.12E-04	1.95E-03
Disperso	3.04E-03	1.29E-03	2.40E-04	6.66E-05	2.89E-03	2.77E-03

**Tabla 4.2.** Resultados para la constante cinemática  $B$  utilizando como ajuste la solución al modelo cinemático con  $n = 8$



(a). Comportamiento del parámetro  $B$  obtenido para el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) (b). Comportamiento del parámetro  $B$  obtenido para el silo pequeño ( $\Gamma = 0.7$ )

**Figura 4.14.** Valores encontrados para  $B$  tras ajuste usando el modelo cinemático para un flujo céntrico

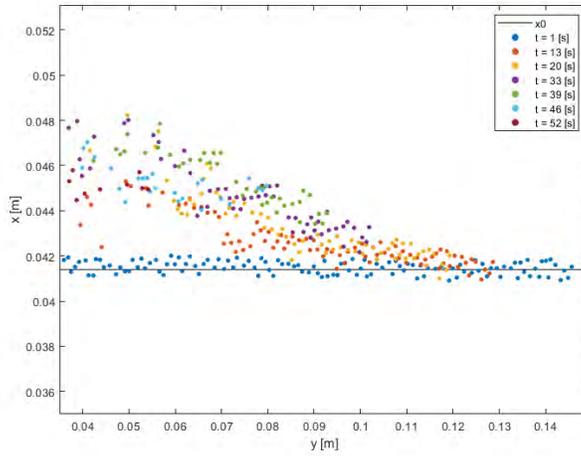
lado para los silos pequeño y ancho los valores de  $R^2$  obtenidos se encontraron en el intervalo [0.282490075 ; 0.956100292], obteniendo los mejores ajustes ( $R^2$  entre 0.78 y 0.96) en la primera mitad del silo, por lo que para el análisis se consideran solo estos resultados.

En la figura 4.14 se tiene la gráfica de los valores obtenidos para  $B$ , es fácil ver que no se obtuvo un valor constante como se esperaba, sino que el parámetro muestra una variación de tipo decaimiento exponencial con la altura.

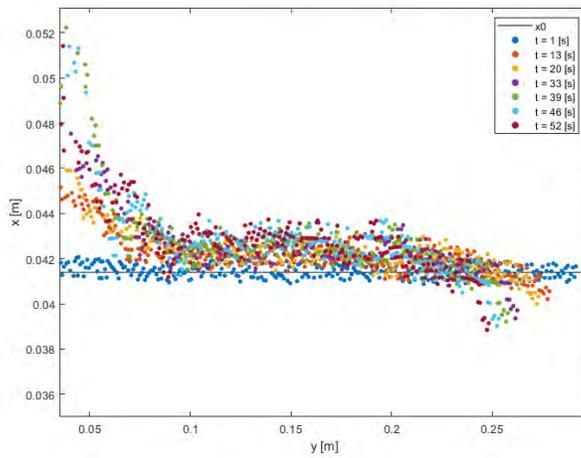
Cabe mencionar que para el resto de los sistemas no se logra un ajuste satisfactorio, obteniendo coeficientes de determinación,  $R^2$  mucho menores a 1 por lo que se descarta su análisis. Esta falta de consistencia entre los datos obtenidos de velocidad vertical para los sistemas simulados y el

modelo cinemático se asocia a que se ha demostrado que este predice exitosamente los perfiles de velocidad vertical en sistemas con empaquetamiento suelto (Melo et al., 2008), sin embargo cuando el sistema presenta mayor compactación no se consigue un acuerdo óptimo entre las velocidades experimentadas por las partículas en el sistema y el modelo cinemático. En los casos simulados, los estados iniciales presentaban una alta compactación, especialmente en los casos sin roce.

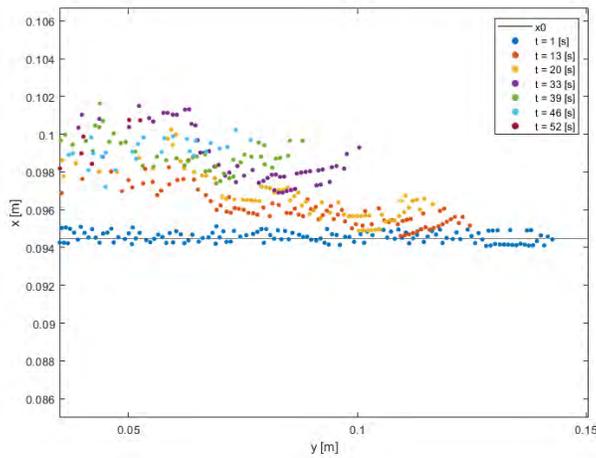
Por otro lado, para los casos con flujo excéntrico la condición inicial supuesta para las partículas ubicadas en centro de la salida no se satisface, ya que al descender tienen una componente de velocidad horizontal. En la figura 4.15 se muestran las gráficas  $x$  vs  $y$  de las curvas descritas por las partículas y se observa que la trayectoria de las partículas alcanza una amplitud máxima antes de salir del silo.



(a). Sistema completamente disperso con roce, extracción excéntrica silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ )



(b). Sistema totalmente disperso con roce, extracción excéntrica silo alto ( $\Gamma = 2.8$ )



(c). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción excéntrica silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ )

**Figura 4.15.** Curvas trazadas durante el proceso de extracción por las partículas ubicadas en el centro de la salida para 7 distintos instantes.

## Conclusiones

Se implementó un algoritmo basado en el método de elementos discretos que permitió simular 36 sistemas para estudiar las condiciones estáticas y cinemáticas de un medio granular confinado en un silo bidimensional de paredes y fondo plano, contrastando el efecto en la respuesta mecánica y cinemática de distintas configuraciones de fricción, distribución del tamaño de partículas, razón de aspecto de la columna de material y condiciones de simetría del flujo.

Se encontró que la distribución del tamaño de partículas dentro del silo tiene un efecto en la compactación y empaquetamiento de los sistemas. Los mayores valores para la fracción de empaquetamiento relacionadas a la distribución del tamaño de partículas se encontraron en los sistemas monodisperso y totalmente disperso, mientras que las menores correspondieron al sistema bidisperso. Se encontró además que el roce entre partículas y paredes del contenedor influyen significativamente en la compactación, teniendo que en los sistemas sin fricción los factores de empaquetamiento aumentaron en todos los casos en alrededor de un 10%.

Por otro lado, se encontró que en su condición estática las fuerzas normales de contacto entre las partículas tienen una tendencia consistente en todos los sistemas independiente de las configuraciones simuladas.

Se comparó el modelo de Janssen para el esfuerzo vertical en la columna de material con los obtenidos en los sistemas antes de comenzar la extracción del material. Se observó una influencia de la razón de aspecto de la columna de material en los perfiles de esfuerzo vertical encontrados, teniendo que a mayor razón de aspecto, es decir en silos más altos que anchos, las magnitudes de los esfuerzos superan significativamente lo predicho por Janssen, mientras que para el silo más ancho se obtuvo el escenario opuesto, teniendo valores menores en hasta 500 [Pa].

En la etapa de movilización del material confinado, se encontró que las condiciones de fricción dentro del silo influyen en el tipo de flujo desarrollado por el material, generándose un flujo másico en ausencia de roce y un flujo de tipo central en presencia de este.

Se estudió también la distribución de esfuerzos dentro del contenedor durante el proceso de extracción, encontrando que para el flujo simétrico las magnitudes de los esfuerzos se distribuían de manera cuasi equitativa alrededor de la salida. Sin embargo para el caso del flujo excéntrico se encuentra que los valores máximos de *stress* se encuentran hacia la pared opuesta de la ubicación de la salida, y existen diferencias entre 400 [Pa] para el silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ) y de 900 a 1000 [Pa] para el silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ). Se tiene además que conforme el material es extraído el gradiente de esfuerzos dentro del silo disminuye, esta tendencia se observó en todos los sistemas estudiados.

Se obtuvieron los perfiles de velocidad vertical para 6 distintas alturas dentro de los silos. Se realizó un ajuste a las curvas de los sistemas con roce y extracción céntrica utilizando la solución para el modelo cinemático de Nedderman y Tüzün con  $n=8$ . Se encontró que el modelo cinemático se ajustaba satisfactoriamente para los silos pequeño y ancho, en particular para las primeras 4 alturas (desde la base del contenedor). A partir de estos ajuste se encuentra que el parámetro  $B$  no se comporta como una constante y varía con la altura siguiendo una tendencia de tipo decaimiento exponencial.

Por otra parte para los sistemas con flujo asimétrico se halla que las partículas centradas en el canal de salida en su posición inicial, descienden describiendo una curva similar a la mitad de una gaussiana. De esta manera no se satisface una de las condiciones iniciales supuestas y no se consigue ajustar el modelo cinemático para el flujo fuera del centro.

### **4.0.3 Proyecciones**

Como proyecciones y trabajos futuros a realizar se propone analizar los perfiles de velocidad vertical siguiendo un procedimiento de linealización descrito en (Sielamowicz et al., 2015), con el fin de contrastar los resultados para  $B$  obtenidos a partir del modelo cinemático de Nedderman y Tüzün y obtener un modelo que permita estudiar los flujos excéntricos independizándose de las condiciones iniciales y geométricas.

Se propone también encontrar una curva que se ajuste a la trayectoria descrita por las partículas ubicadas en el centro de la salida antes de la extracción y considerar ésta como nueva condición inicial para resolver el modelo cinemático para un flujo excéntrico.

Por otra parte, para el estudio de esfuerzos dentro del silo, se propone replicar los flujos simulados en maquetas experimentales, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos y concluir la

fidelidad de los resultados de las simulaciones, ya que se ha encontrado en resultados de sistemas simulados valores menores a los encontrados en sistemas reproducidos experimentalmente, esto se asocia a la forma perfectamente esférica de las partículas en las simulaciones (Kobylka & Molenda, 2013).

Finalmente, se propone extender el estudio a 3 dimensiones y contrastar los resultados encontrados para los sistemas bidimensionales.



## Referencias Bibliográficas

- Andreotti, B., Forterre, Y., & Pauliquen, O. (2013). *Granular media between fluid and solid*. Cambridge University Press.
- Chou, C. S., Chuang, Y. C., Smid, J., Hsiau, S. S., & Kuo, J. T. (2003). Kinematic model for granular flow in a two-dimensional flat-bottomed hopper. *Advanced Powder Technology*, 14, 313-331.
- Chou, C. S., Hsu, J. Y., & Lau, Y. D. (2002). The granular flow in a two-dimensional flat-bottomed hopper with eccentric discharge. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 308, 46-58.
- Duran, J. (2000). *Sands, powders and grains: An introduction to the physics of granular materials*. WILEY-VCH.
- Hinrichsen, H., & E Wolf, D. (2004). *The physics of granular media*. WILEY-VCH.
- Kobylka, R., & Molenda, M. (2013). *Dem modelling of silo load asymmetry due to eccentric filling and discharge* (Vol. 233).
- Landry, J. W., & Grest, G. S. (2003). Confined granular packings: Structure, stress and forces. *Phys. Rev.*, 67, 041303.
- Majmudar, T. S., & Behringer, R. P. (2005). Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435, 1079-1082.
- Melo, F., Vivanco, F., Fuentes, C., & Apablaza, V. (2008). Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: dilatancy effects on drwbody shapes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 45, 248-259.
- Mueth, D. M., Jaeger, H. M., & Nagel, S. R. (1999). Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev.E*, 57, 3164-3169.
- Nationwide Agribusiness Insurance Company, bin failures*. (n.d.). <https://www.mynsightonline.com/articles/safety/grain-bin-failures>. (Accessed: 2018-07-25)
- Nedderman, R. M. (2005). *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press.
- Radjai, F., Roux, S., & Moreau, J. J. (1999). Contact forces in a granular packing. *Chaos*, 9, 544-550.
- Ravenet, J. (1975). Sobrepresiones en las paredes de los silos debidas al vaciado. *Informes de la*

*construcción*, 28, 272-285.

Ravenet, J. (1977). *Silos: teoría, investigación, construcción, vol. 1*. Editores técnicos asociados, s.a.

R M Nedderman, U. T. (1978). A kinematic model for the flow of granular materials. *Powder Technology*, 22, 243-253.

Sielamowicz, I., Czech, A., & Kowalewski, T. A. (2015). Comparative analysis of empirical descriptions of eccentric flow in silo model by the linear and nonlinear regressions. *Powder Technology*, 270, 393-410.

Simpson, B. (1997). *Containment structures: Risk, safety and reliability. proceedings of the iabse colloquium*. CRC Press Book.

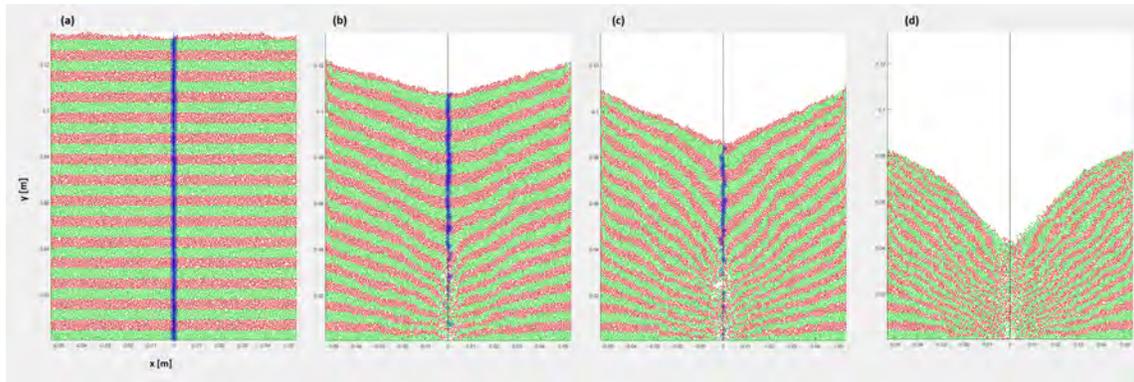
Yade,dem. (n.d.). <https://yade-dem.org/doc/>. (Accessed: 2019-09-20)

## **Anexos**

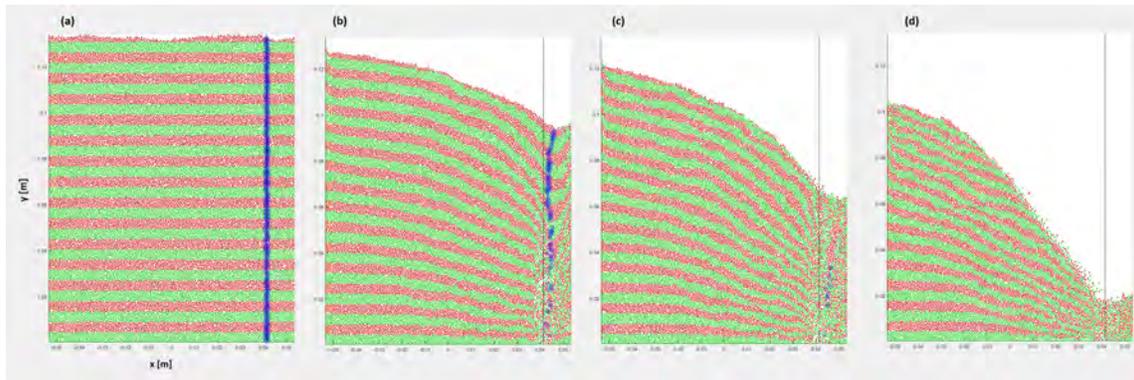
**4.1 Patrones de franjas durante la extracción**

**4.2 Perfiles de esfuerzo durante la extracción**

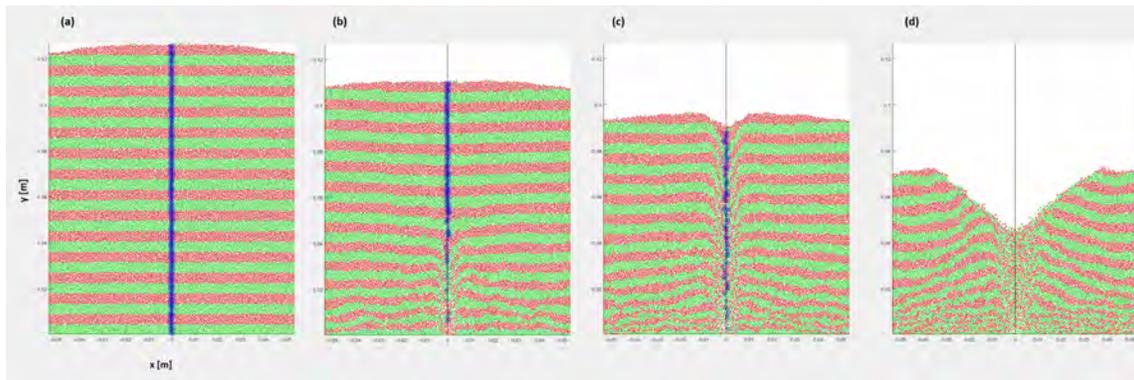
**4.3 Evolución del gradiente de esfuerzos dentro del silo**



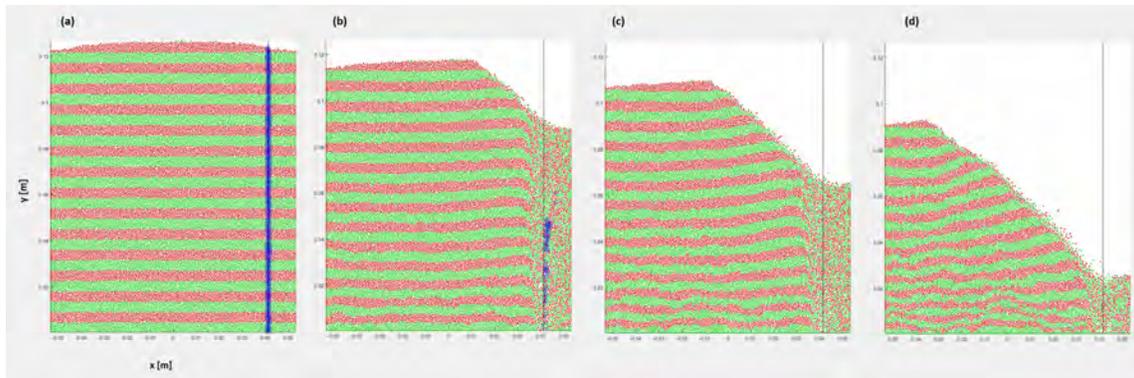
(a). Sistema completamente disperso con roce, extracción central



(b). Sistema totalmente disperso con roce, extracción excéntrica

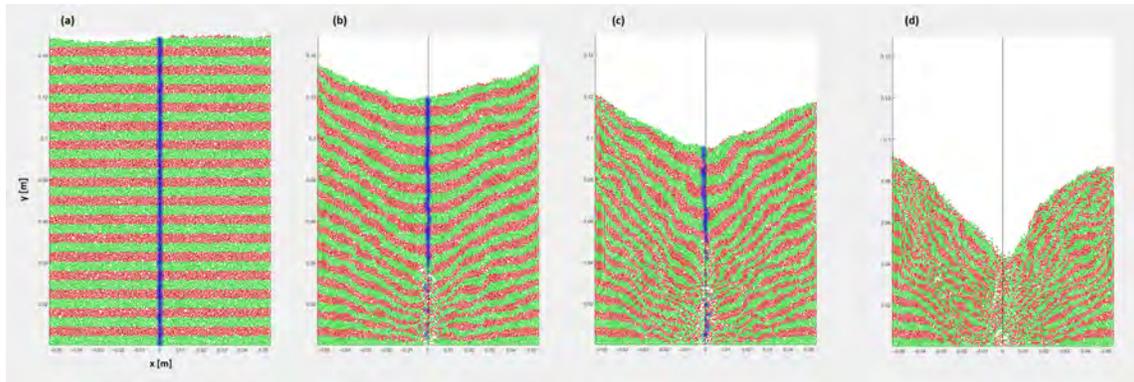


(c). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción central

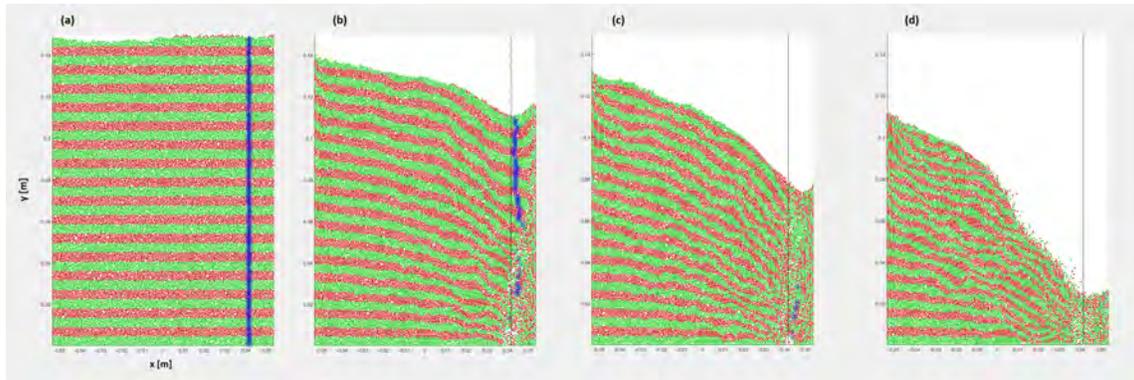


(d). Sistema totalmente disperso sin roce, extracción excéntrica

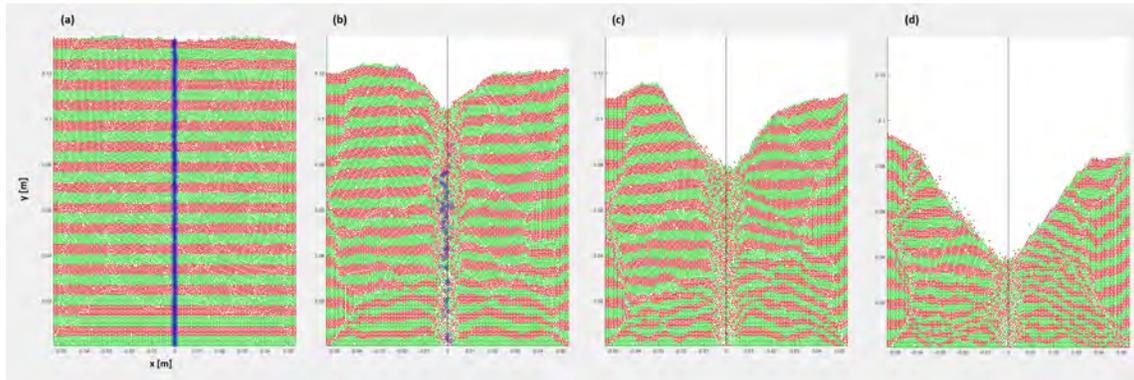
**Figura 4.16.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).



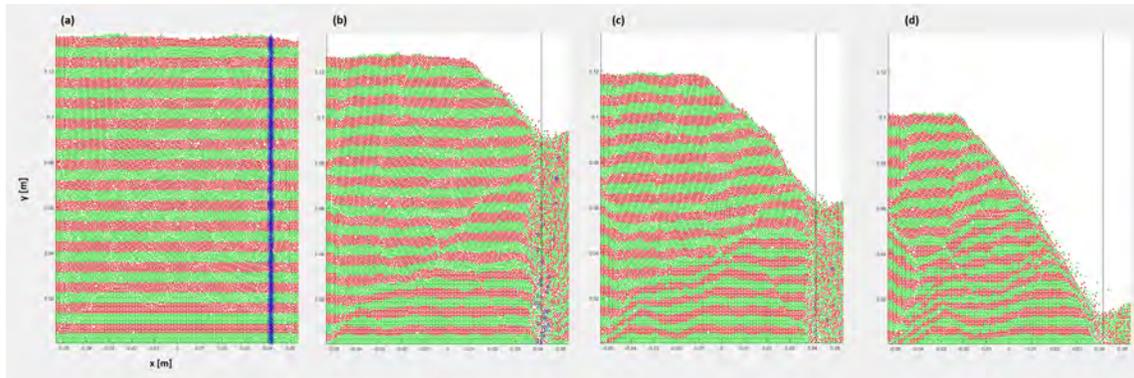
(a). Sistema monodisperso con roce, extracción central



(b). Sistema monodisperso con roce, extracción excéntrica

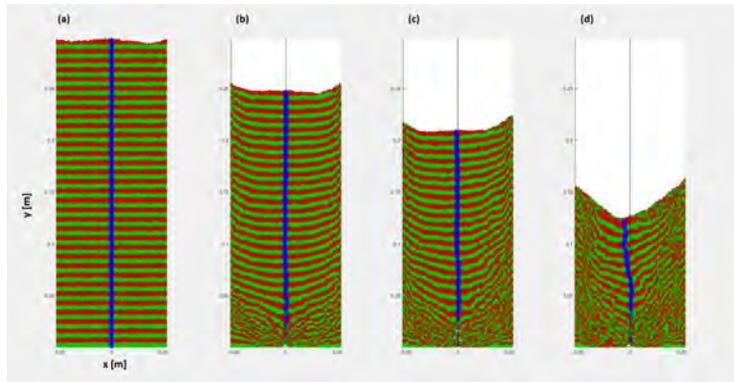


(c). Sistema monodisperso sin roce, extracción central

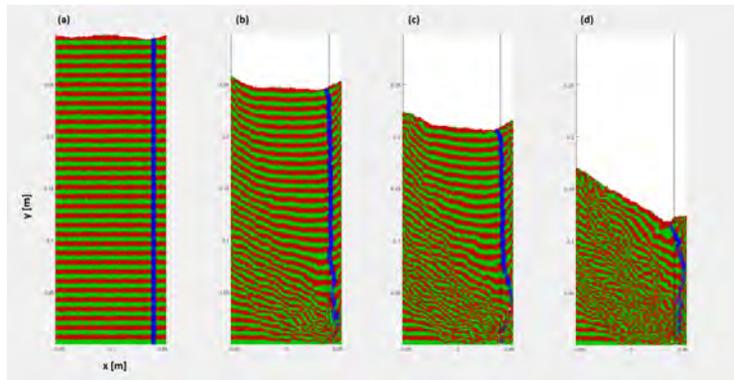


(d). Sistema monodisperso sin roce, extracción excéntrica

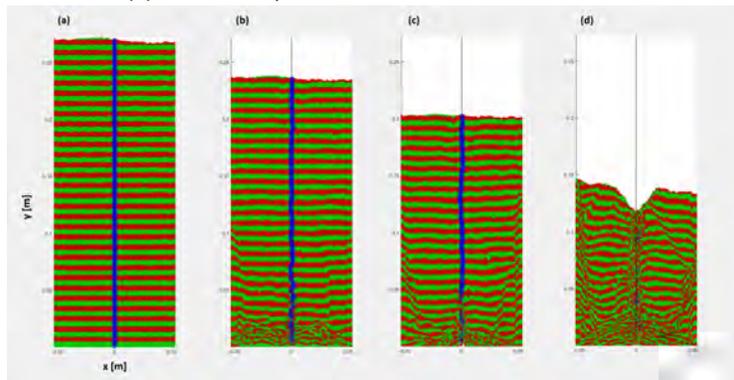
**Figura 4.17.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).



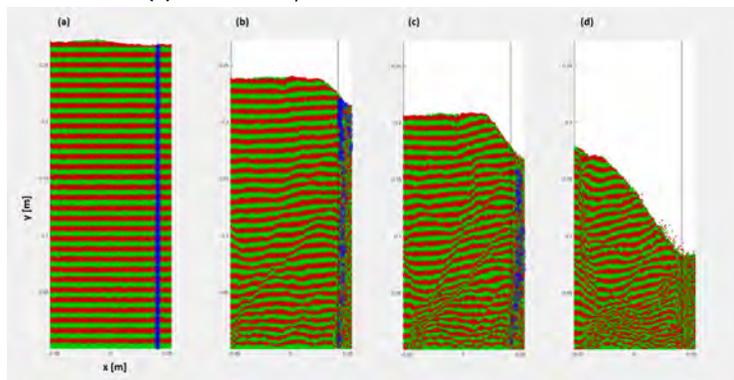
(a). Sistema disperso con roce, extracción central



(b). Sistema disperso con roce, extracción excéntrica

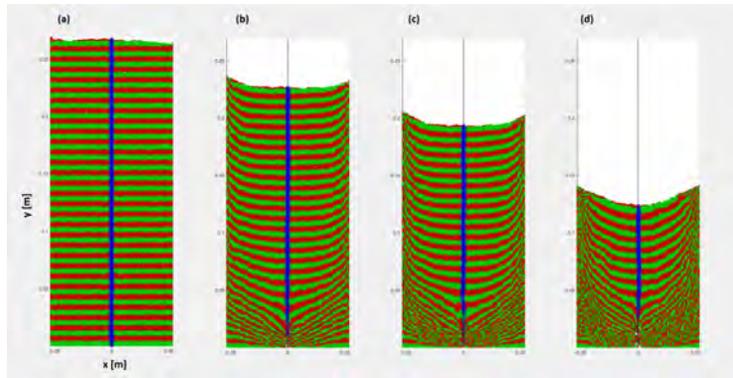


(c). Sistema disperso sin roce, extracción central

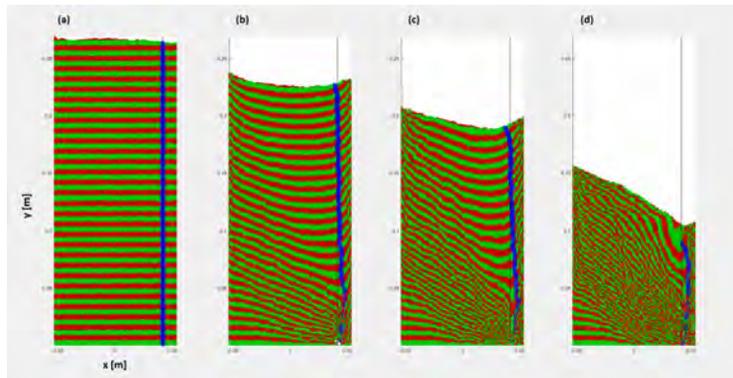


(d). Sistema disperso sin roce, extracción excéntrica

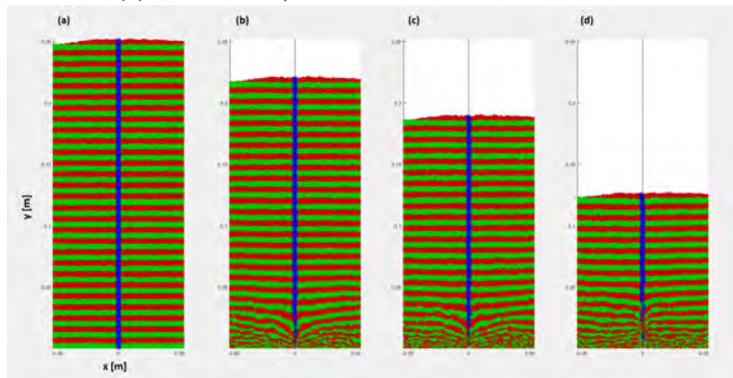
**Figura 4.18.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema totalmente disperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



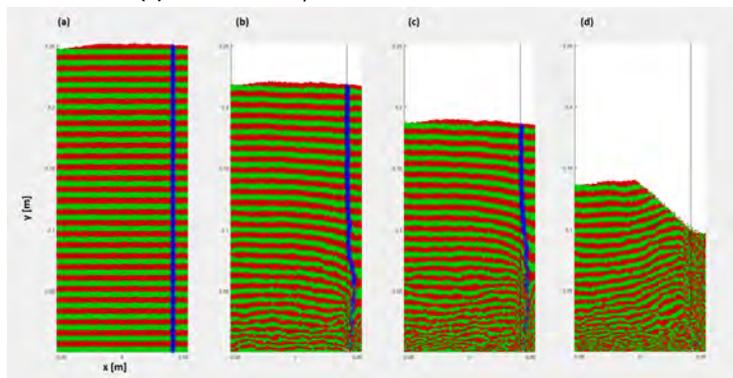
(a). Sistema bidisperso con roce, extracción central



(b). Sistema bidisperso con roce, extracción excéntrica

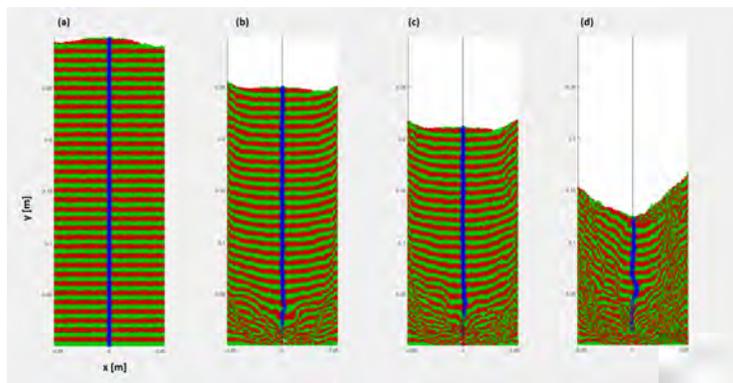


(c). Sistema bidisperso sin roce, extracción central

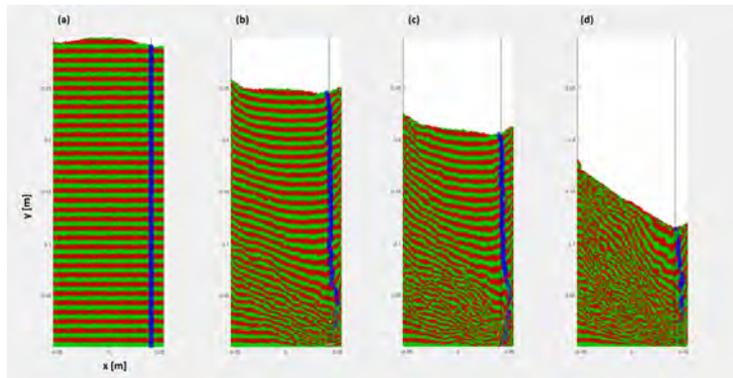


(d). Sistema bidisperso sin roce, extracción excéntrica

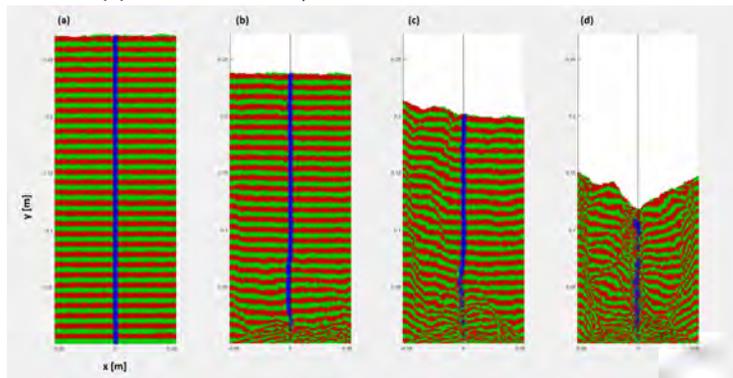
**Figura 4.19.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



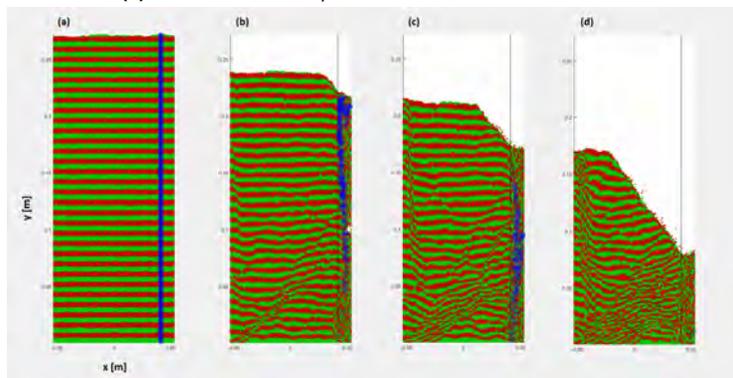
(a). Sistema monodisperso con roce, extracción central



(b). Sistema monodisperso con roce, extracción excéntrica

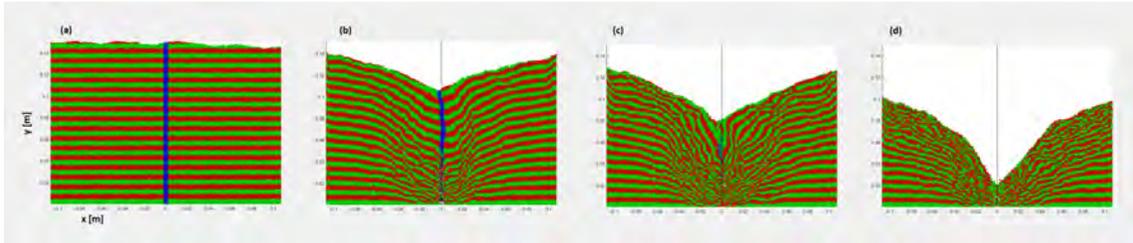


(c). Sistema monodisperso sin roce, extracción central

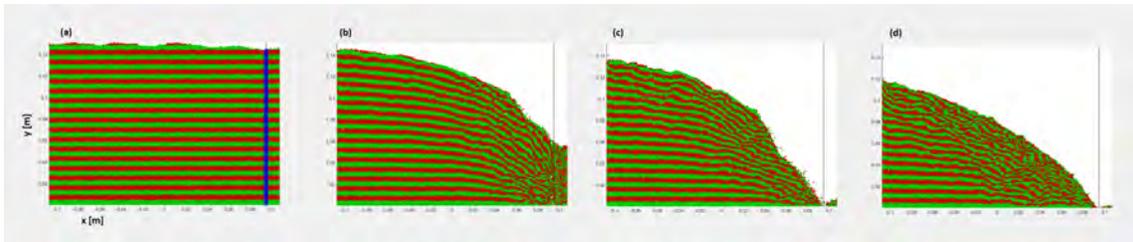


(d). Sistema monodisperso sin roce, extracción excéntrica

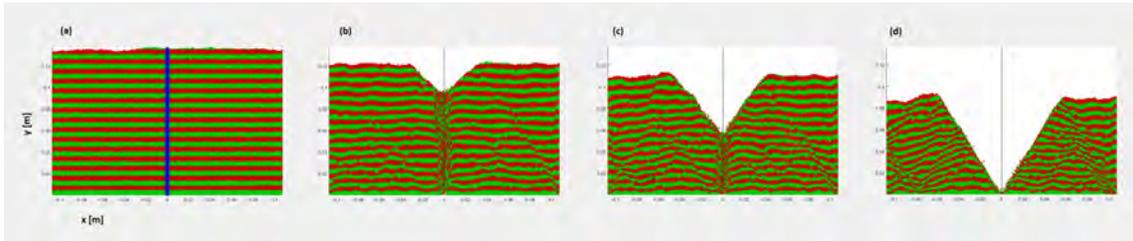
**Figura 4.20.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



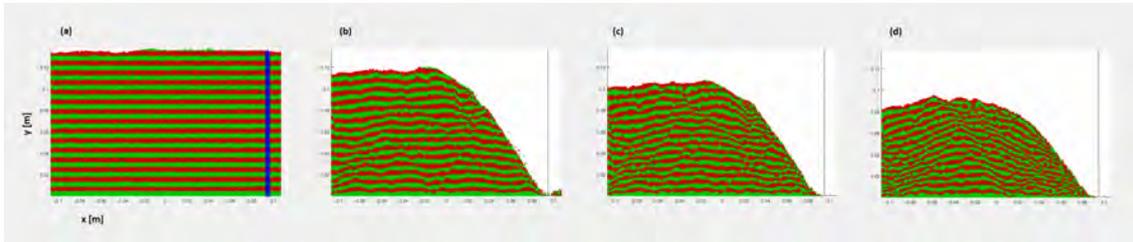
(a). Sistema disperso con roce, extracción central



(b). Sistema disperso con roce, extracción excéntrica

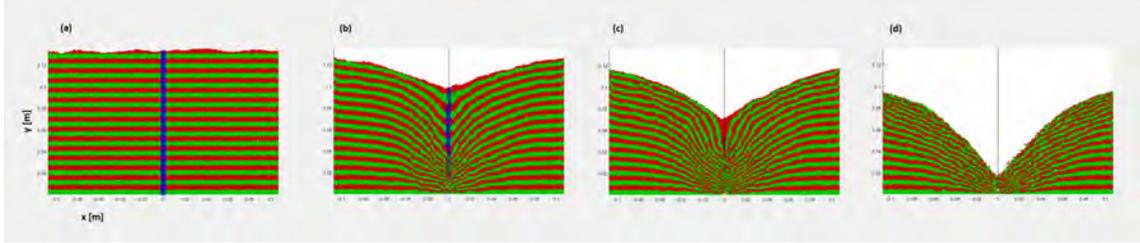


(c). Sistema disperso sin roce, extracción central

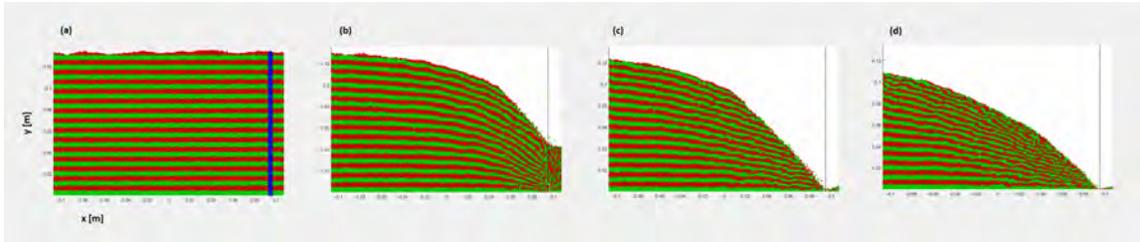


(d). Sistema disperso sin roce, extracción excéntrica

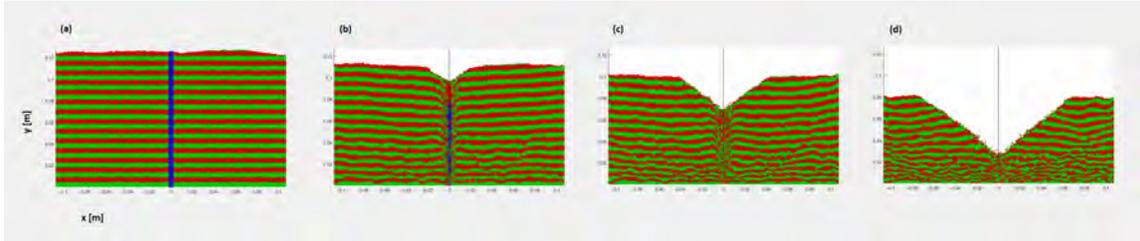
**Figura 4.21.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema totalmente disperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).



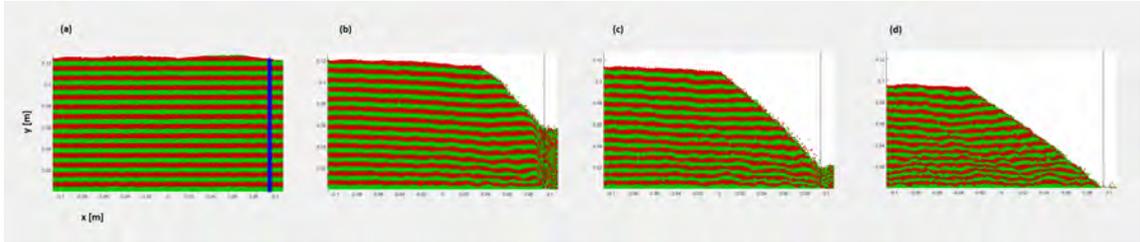
(a). Sistema bidisperso con roce, extracción central



(b). Sistema bidisperso con roce, extracción excéntrica

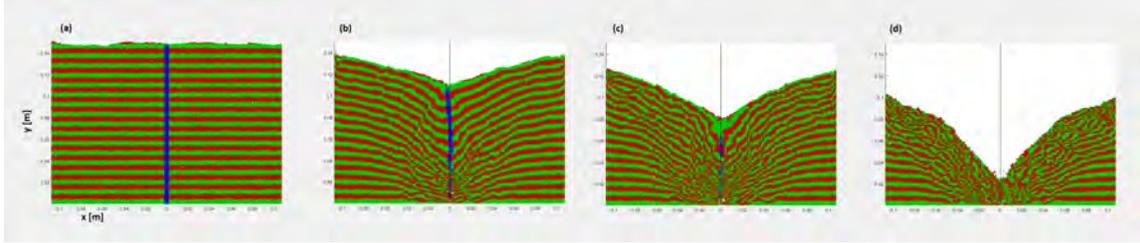


(c). Sistema bidisperso sin roce, extracción central

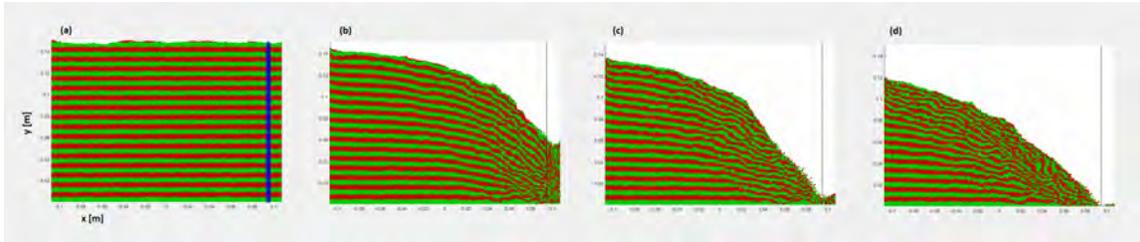


(d). Sistema bidisperso sin roce, extracción excéntrica

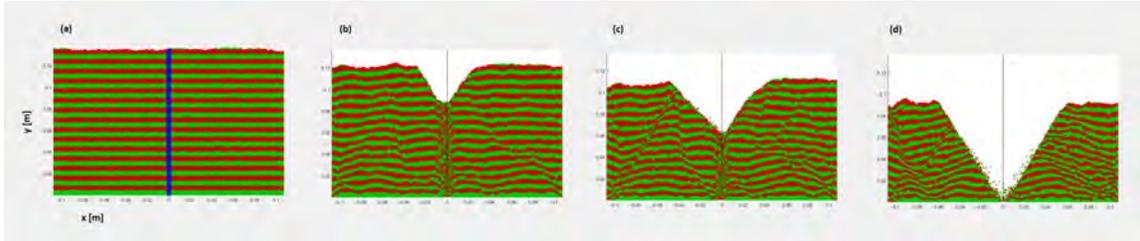
**Figura 4.22.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema bidisperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).



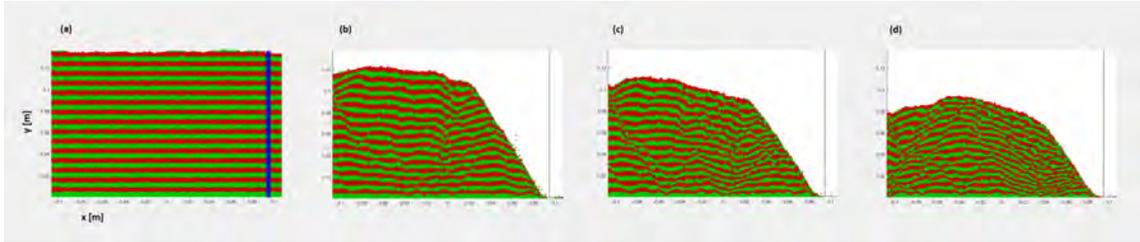
(a). Sistema monodisperso con roce, extracción central



(b). Sistema monodisperso con roce, extracción excéntrica

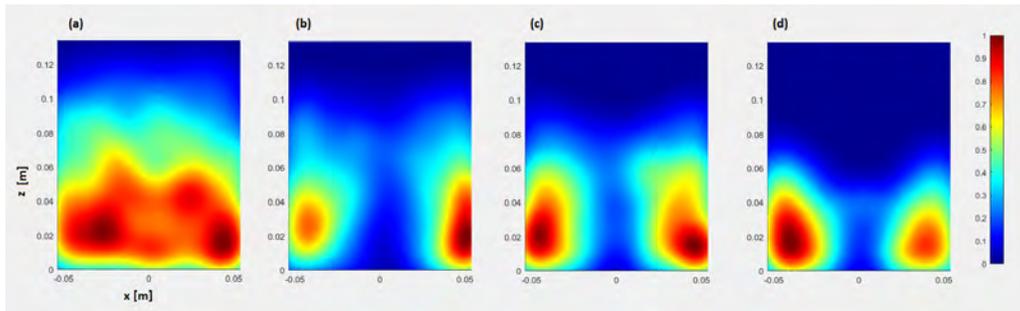


(c). Sistema monodisperso sin roce, extracción central

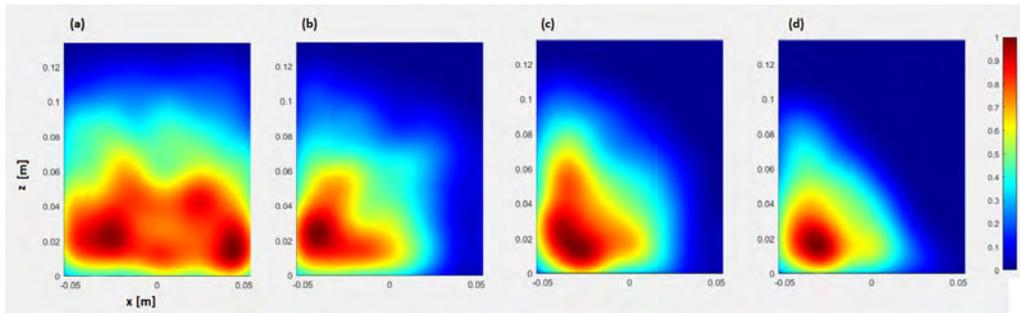


(d). Sistema monodisperso sin roce, extracción excéntrica

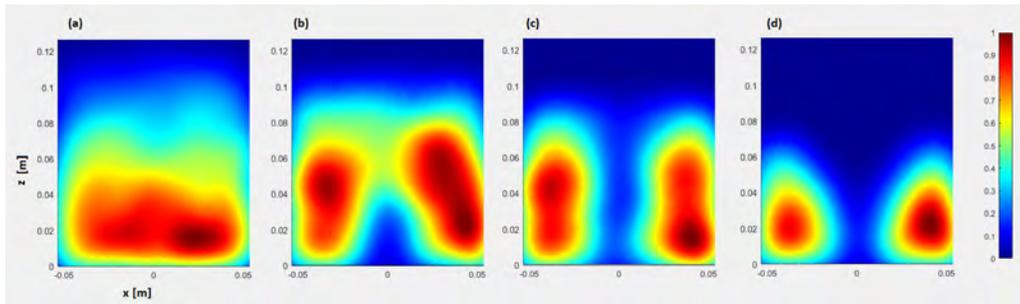
**Figura 4.23.** Patrón de franjas en 4 instantes de la extracción que muestra la distribución del movimiento durante la extracción en sistema monodisperso dentro del silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).



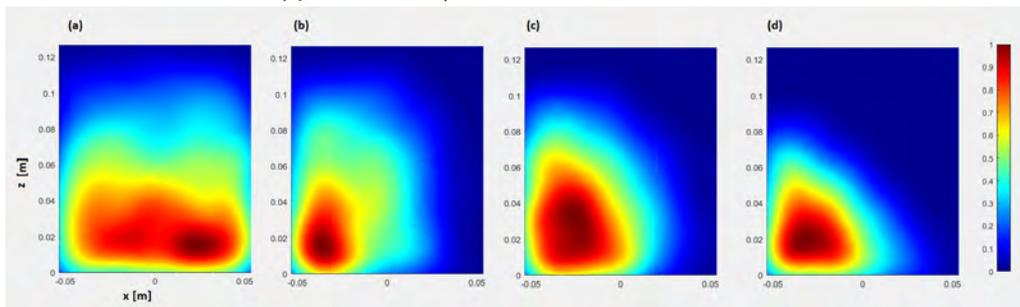
(a). Sistema bidisperso con roce, extracción central



(b). Sistema bidisperso con roce, extracción excéntrica

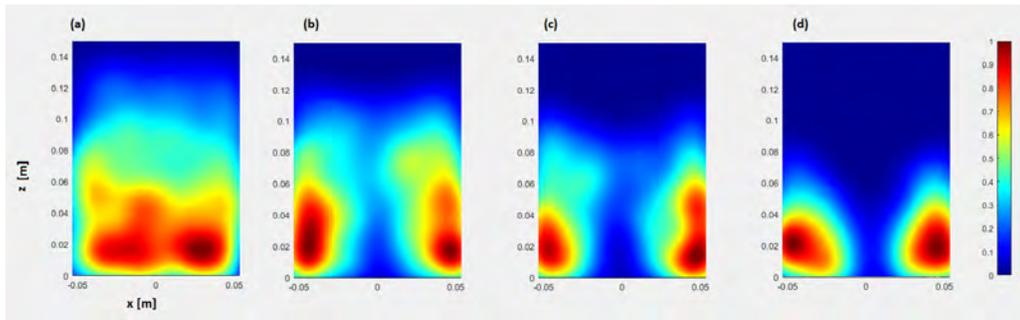


(c). Sistema bidisperso sin roce, extracción central

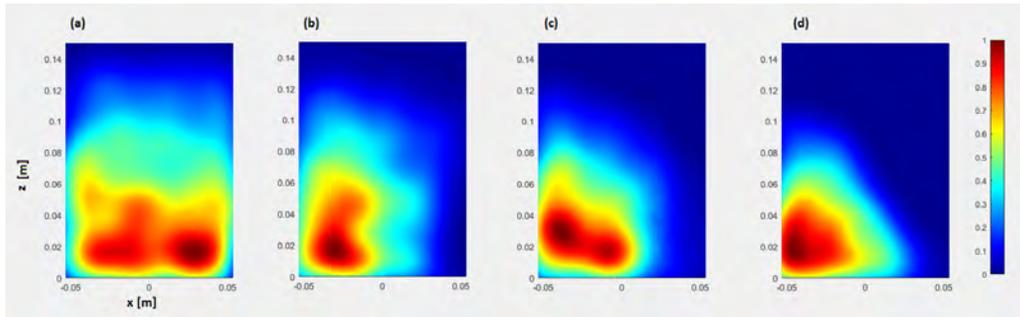


(d). Sistema bidisperso sin roce, extracción excéntrica

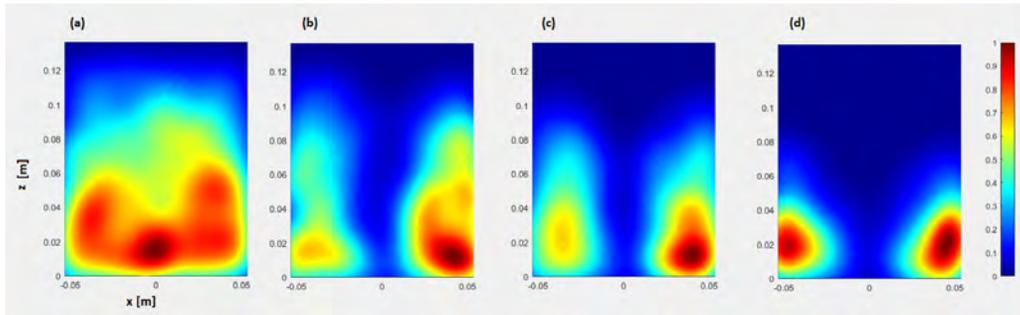
Figura 4.24. Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).



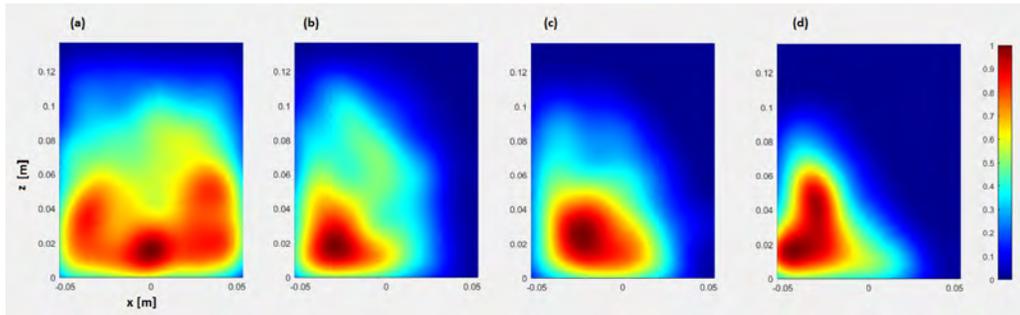
(a). Sistema monodisperso con roce, extracción central



(b). Sistema monodisperso con roce, extracción excéntrica

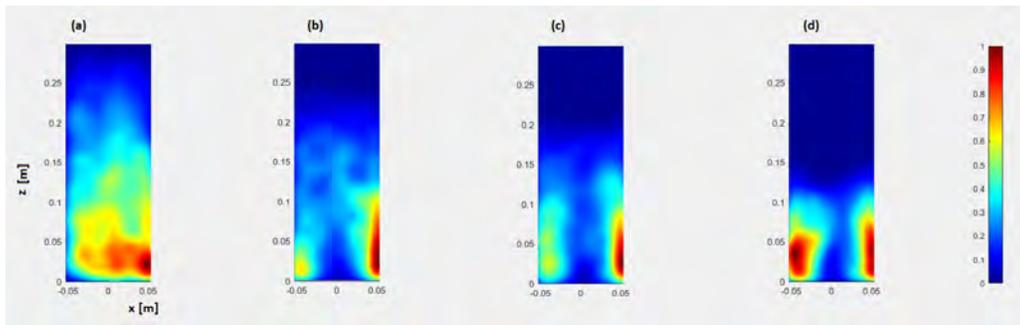


(c). Sistema monodisperso sin roce, extracción central

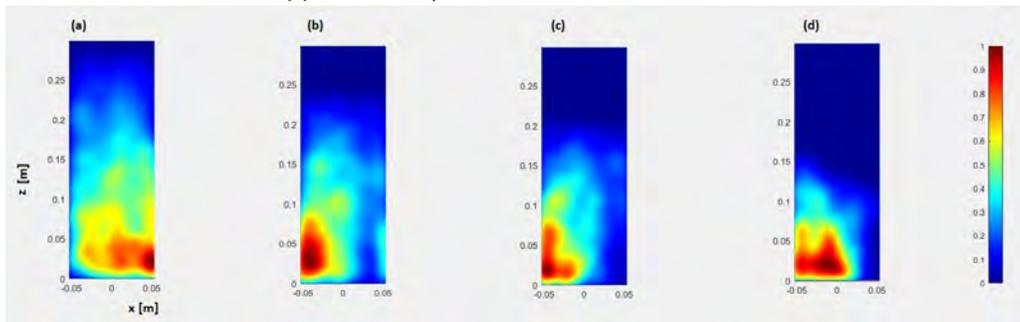


(d). Sistema monodisperso sin roce, extracción excéntrica

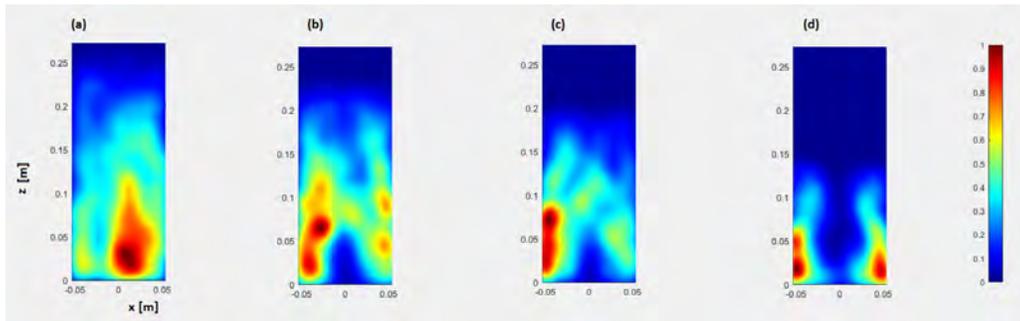
**Figura 4.25.** Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ ).



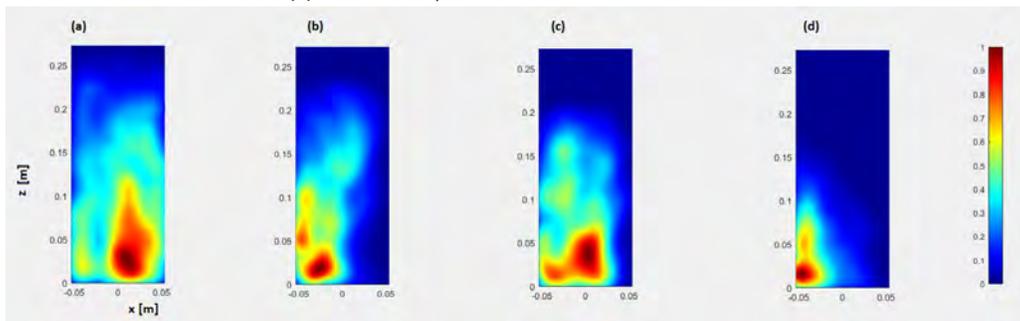
(a). Sistema disperso con roce, extracción central



(b). Sistema disperso con roce, extracción excéntrica

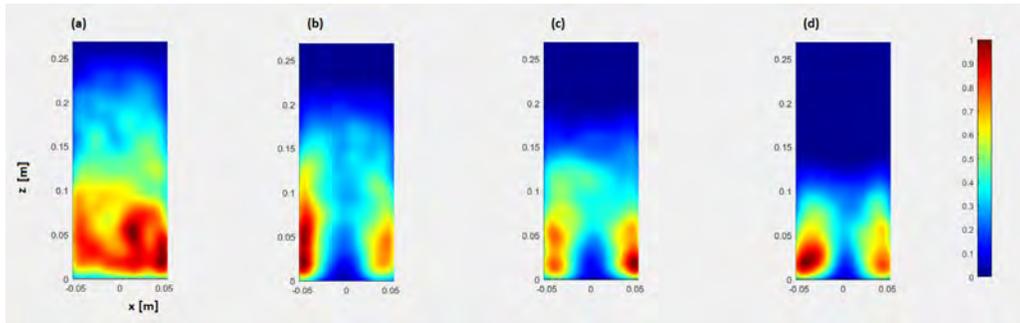


(c). Sistema disperso sin roce, extracción central

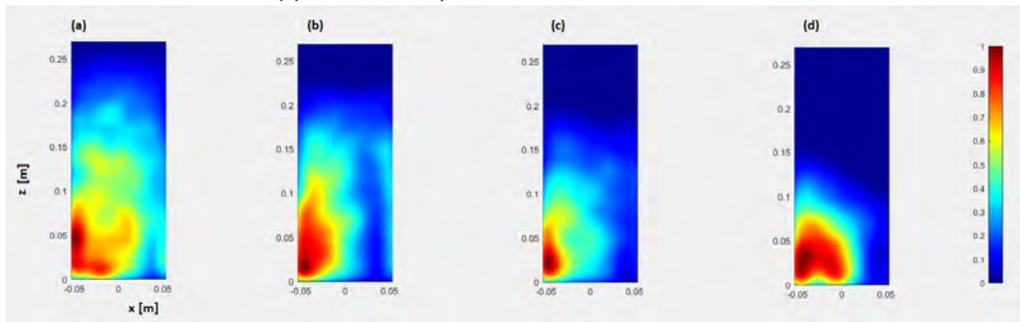


(d). Sistema disperso sin roce, extracción excéntrica

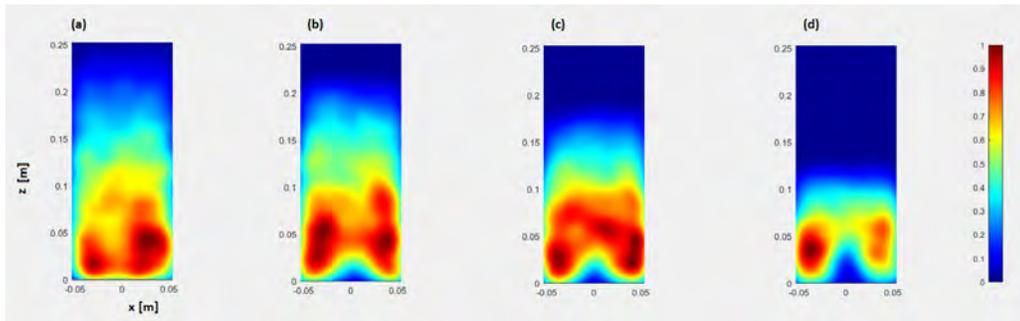
Figura 4.26. Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema disperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



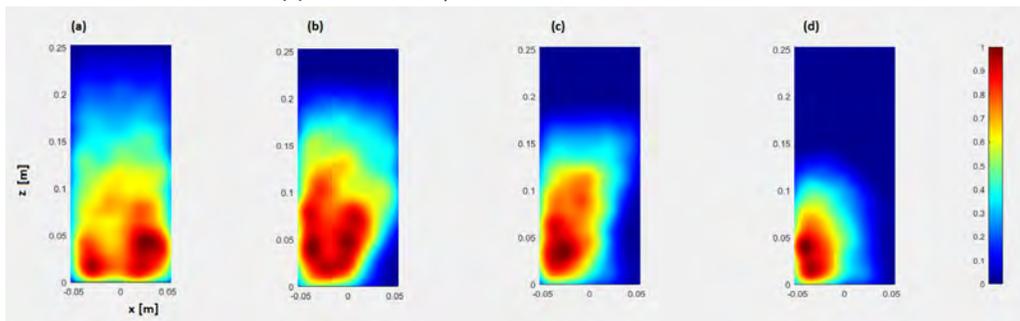
(a). Sistema bidisperso con roche, extracción central



(b). Sistema bidisperso con roche, extracción excéntrica

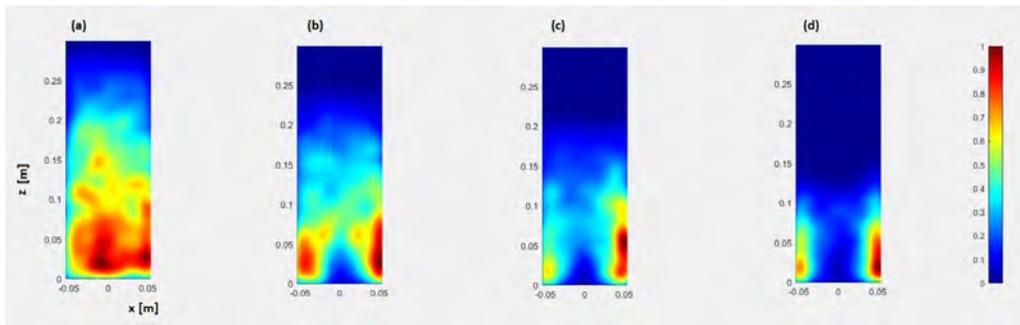


(c). Sistema bidisperso sin roche, extracción central

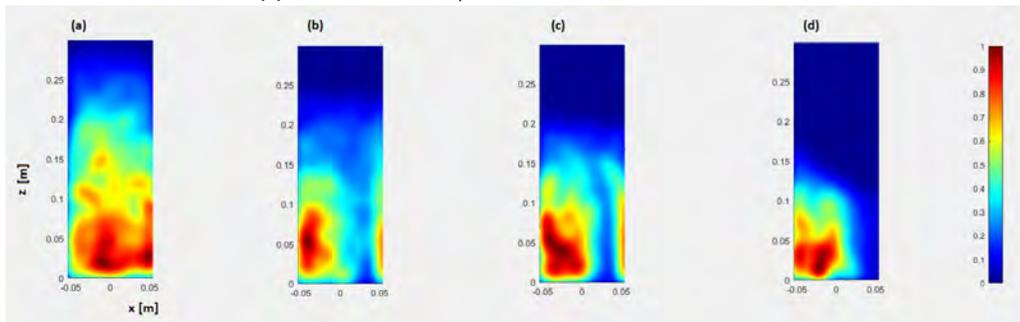


(d). Sistema bidisperso sin roche, extracción excéntrica

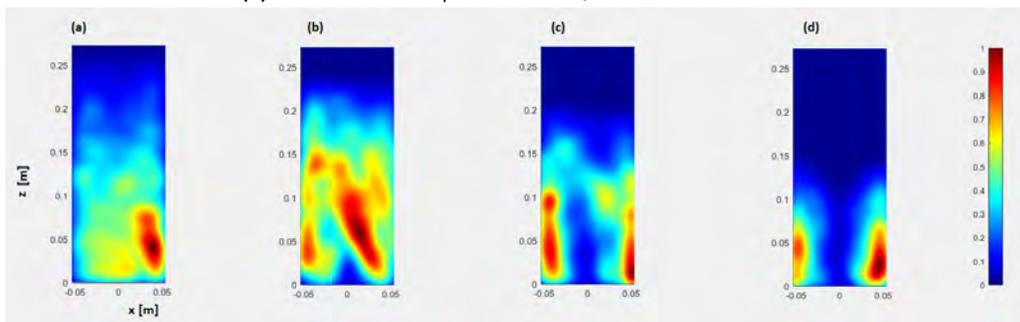
Figura 4.27. Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



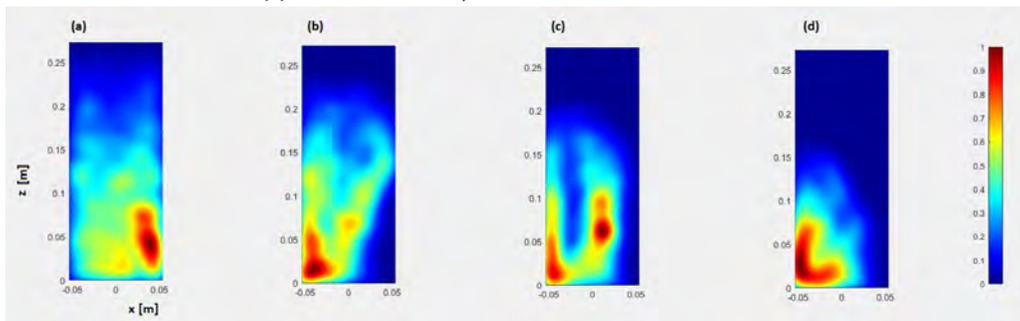
(a). Sistema monodisperso con roce, extracción central



(b). Sistema monodisperso con roce, extracción excéntrica

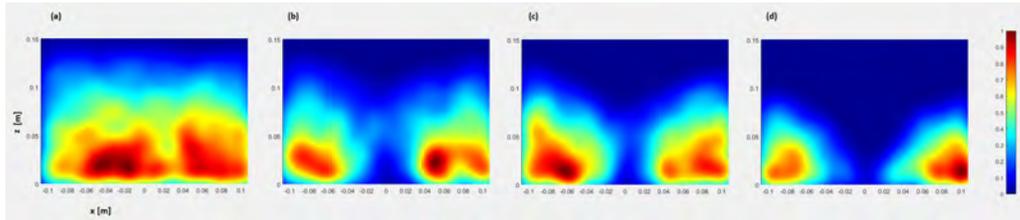


(c). Sistema monodisperso sin roce, extracción central

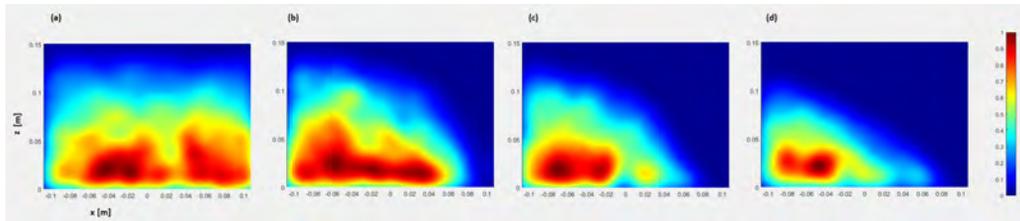


(d). Sistema monodisperso sin roce, extracción excéntrica

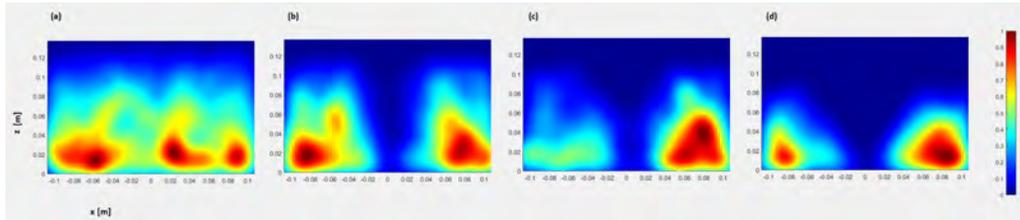
Figura 4.28. Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo alto ( $\Gamma = 2.8$ ).



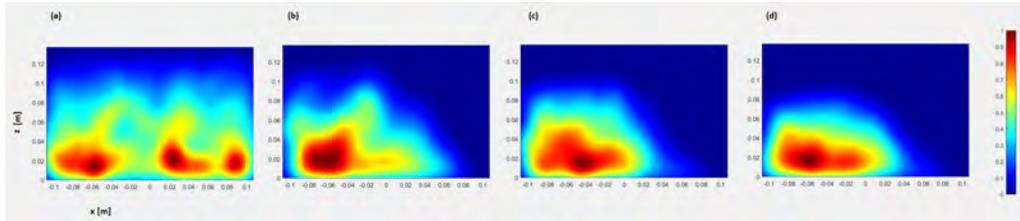
(a). Sistema disperso con roce, extracción central



(b). Sistema disperso con roce, extracción excéntrica

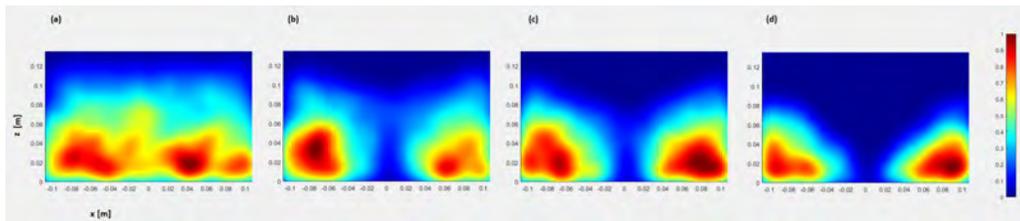


(c). Sistema disperso sin roce, extracción central

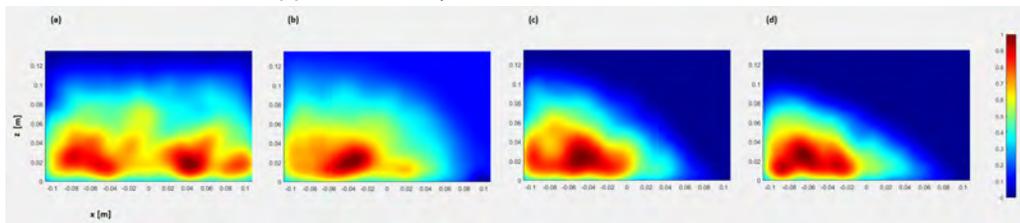


(d). Sistema disperso sin roce, extracción excéntrica

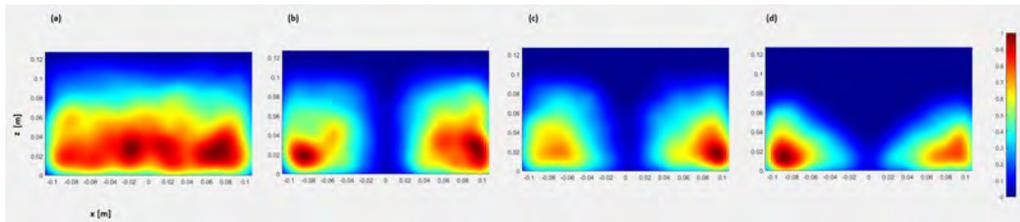
**Figura 4.29.** Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema disperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).



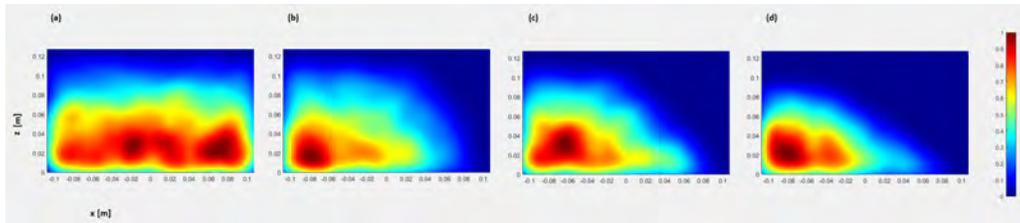
(a). Sistema bidisperso con roce, extracción central



(b). Sistema bidisperso con roce, extracción excéntrica



(c). Sistema bidisperso sin roce, extracción central



(d). Sistema bidisperso sin roce, extracción excéntrica

**Figura 4.30.** Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema bidisperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).

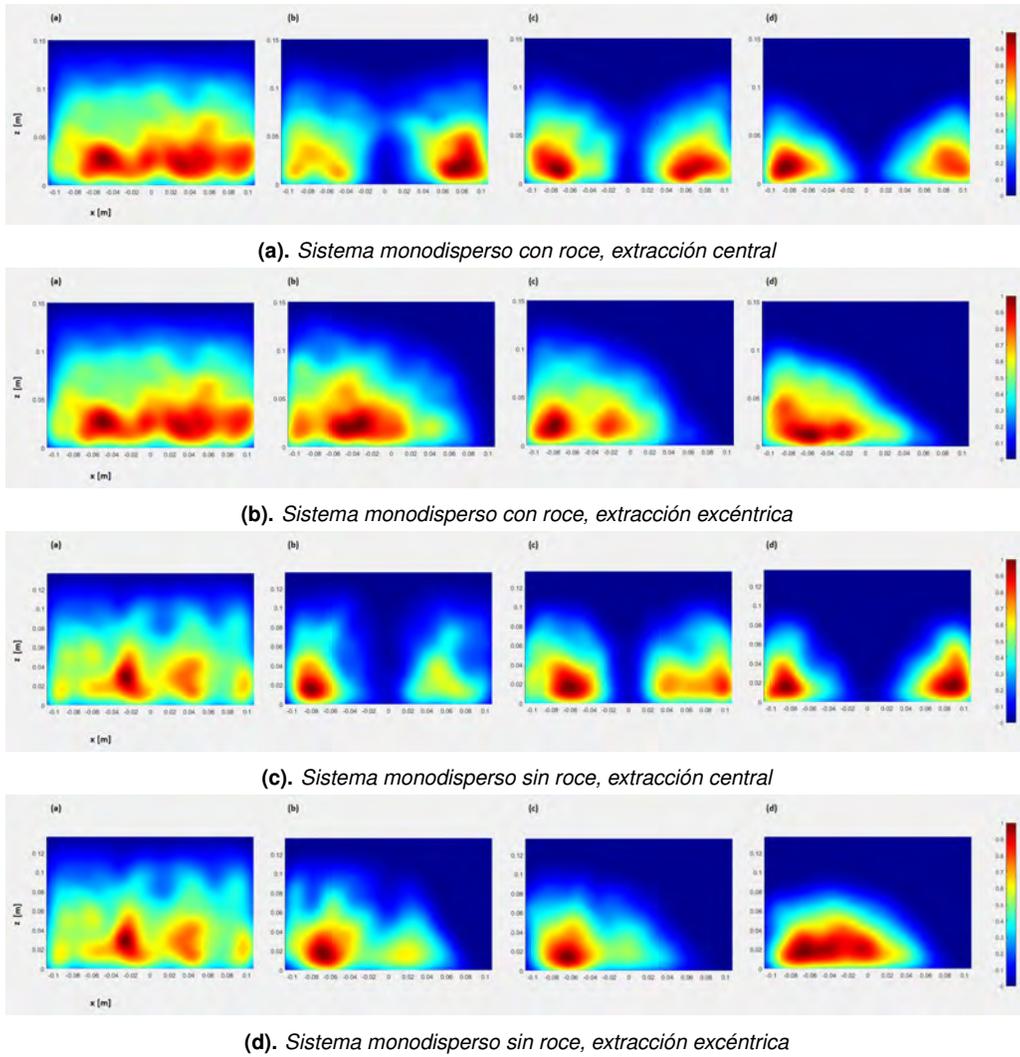


Figura 4.31. Mapa de intensidades de la distribución de esfuerzos dentro del silo en 4 instantes de la extracción en sistema monodisperso, silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ ).

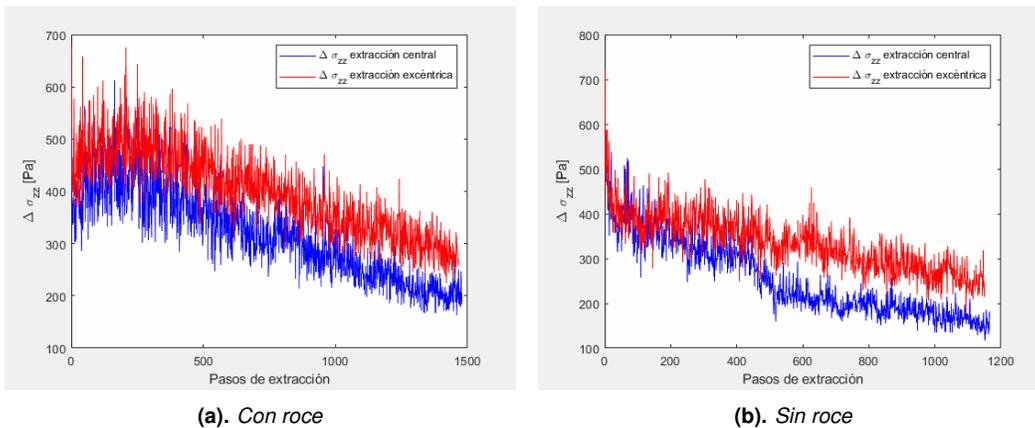
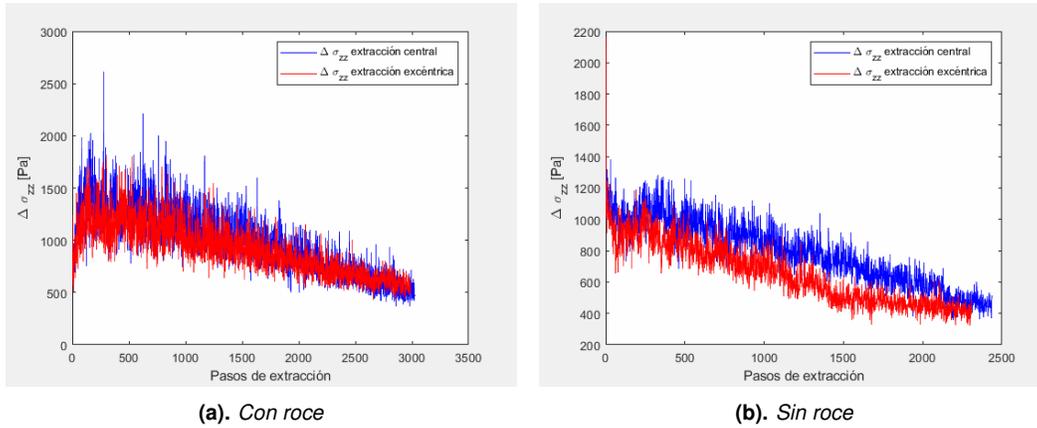


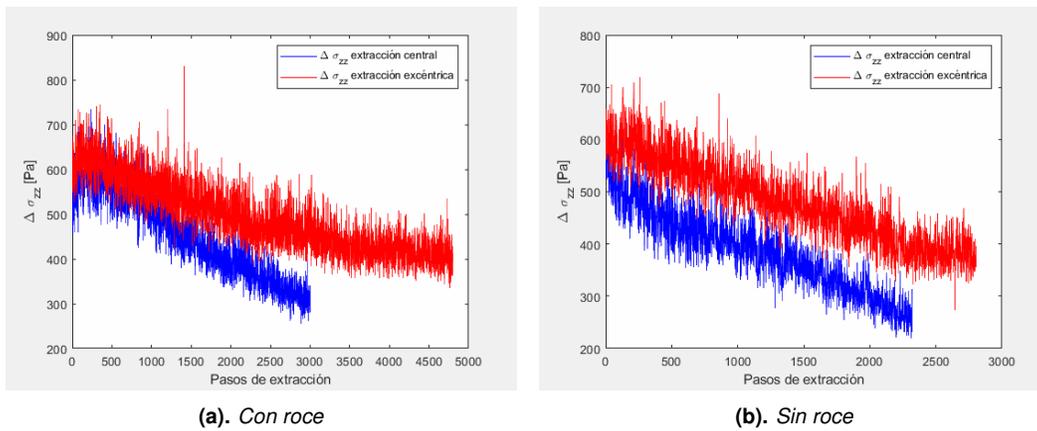
Figura 4.32. Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ )



(a). Con roce

(b). Sin roce

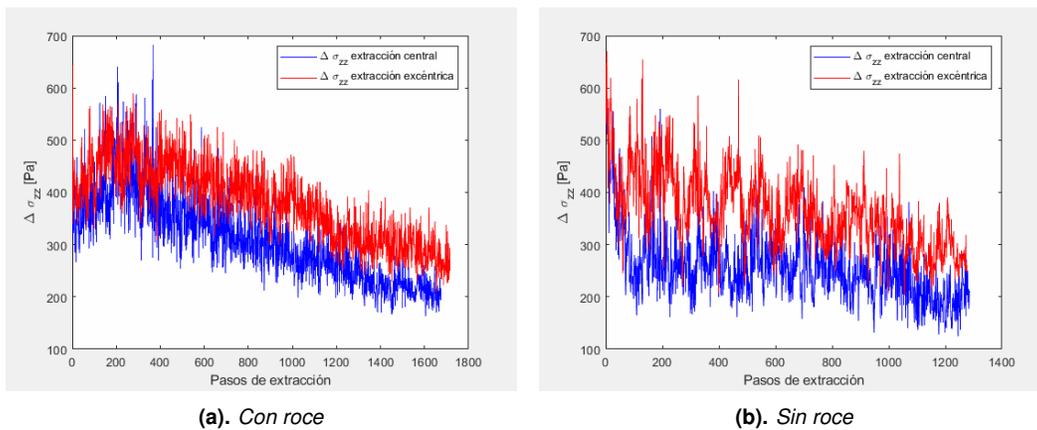
**Figura 4.33.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ )



(a). Con roce

(b). Sin roce

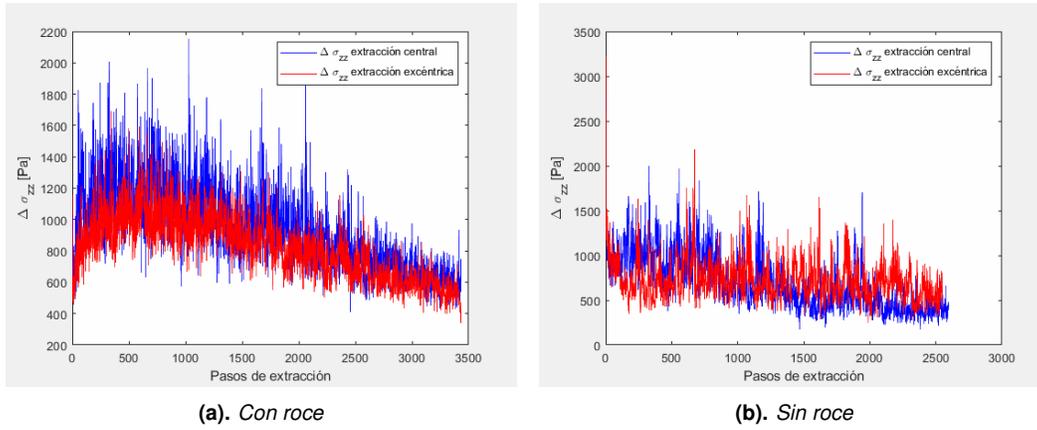
**Figura 4.34.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas bidispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ )



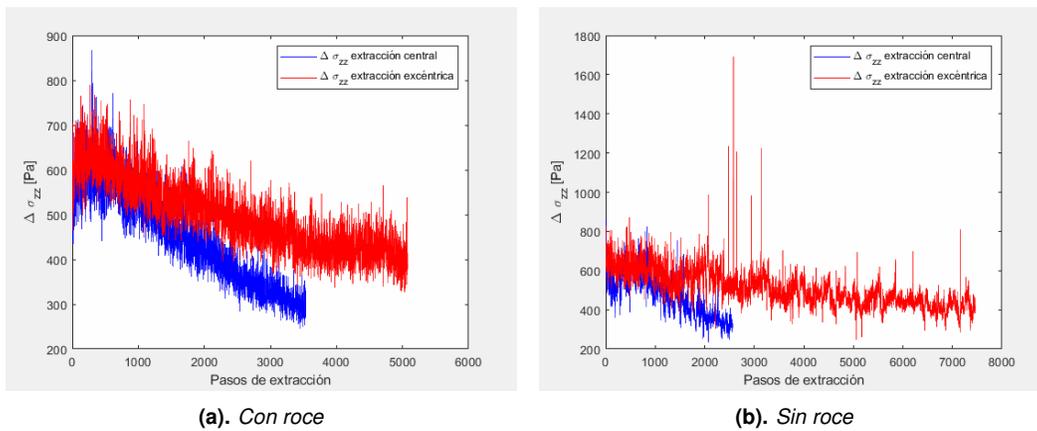
(a). Con roce

(b). Sin roce

**Figura 4.35.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo pequeño ( $\Gamma = 1.4$ )



**Figura 4.36.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo alto ( $\Gamma = 2.8$ )



**Figura 4.37.** Evolución del gradiente de esfuerzos durante la extracción para los sistemas monodispersos en silo ancho ( $\Gamma = 0.7$ )