UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA ESFÉRICA. DESDE UNA PERSPECTIVA DOCENTE.

AUTORES:
OSCAR BARRAZA FIGUEROA
ROLANDO REYES LABBÉ

Profesor Guía:
Joaquim Barbe

Propósito:
Tesis para obtener el título de Licenciado en Educación de Física y Matemática.

Santiago, Chile
2012

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA ESFÉRICA. DESDE UNA PERSPECTIVA DOCENTE.

OSCAR JOSEPH BARRAZA FIGUEROA

ROLANDO FELIPE REYES LABBÉ

Este trabajo de graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Sr Joaquim Barbe del departamento de matemáticas y ha sido aprobado por la comisión calificadora, Sr Enrique Reyes y Sra. Johanna Camacho.

DIRECTOR

PROFESOR GUIA

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

El presente Seminario de Grado presenta un estudio alrededor del mundo de las Geometrías Euclidiana y no Euclidiana, todo esto con el objeto de determinar la factibilidad de estudiar geometrías no euclidianas en enseñanza media.

Para ello se realiza una recopilación de carácter Histórico Epistemológico de algunos aspectos esenciales de la geometría plana, como son los 5 postulados de Euclides con aspectos de la geometría esférica. En particular entre otras problemáticas se aborda la necesidad de redefinir distintos objetos geométricos esenciales en la geometría esférica y establecer su relación con objetos de la geometría plana. Así mismo se establecen y contrastan ciertas relaciones, axiomas y teoremas de ambas geometrías, llegando a establecer un método para el calculo de la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico, deduciendo el teorema de Girard.

Como resultado de este seminario de grado, además de la recopilación histórica, se propone una secuencia de situaciones problemáticas cuyo estudio permitiría enseñar el modelo de la geometría Esférica a alumnos de enseñanza media.

ABSTRACT

This seminar addresses no-Euclidean geometry in an elementary approach, without resorting to sophisticated mathematical tools, so that high school students may understand and appreciate this material. In order to achieve this goal, a brief revision of some aspects of the history of geometry is made, and the classical theorem of Euclidean plane geometry “the sum of the interior angles of a triangle is equal to "π", is compared with the corresponding result in elliptic geometry, using as a model the surface of a sphere. Specifically, we state that “the sum of the inner angles of a spherical triangle is equal to “π"plus the quotient $Area$ (area of the triangle)/ R^2”. Finally, we present some activities which would allow an instructor to address this issue in high school.

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN.

I. 1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Durante toda nuestra etapa escolar estudiamos geometría, cuando somos niños empezamos a tomar contacto con un universo de formas y figuras: se nos hace recortar determinadas figuras “geométricas” como por ejemplo cuadrados, círculos, triángulos y rectángulos de papel. A medida que avanzamos en nuestra etapa escolar, lentamente vamos descubriendo las propiedades de esas figuras, construiremos y formalizaremos una serie de conceptos y hechos geométricos, como por ejemplo: “los lados opuestos de un rectángulo son paralelos”, “dos rectas son perpendiculares si se cortan formando ángulos de noventa grados”, “los ángulos interiores de un triángulo suman siempre 180°”, etc.

Todo el estudio se enmarca dentro de la geometría euclidiana. Sin embargo, existen otros tipos de geometrías donde estos teoremas pueden o no, ser ciertos. Estas geometrías no Euclidianas no son tratadas durante nuestra etapa escolar, a pesar de su importancia no solo histórica, sino que además aparecen naturalmente en nuestra vida cotidiana. El presente trabajo pretende explorar si es posible abordar el estudio de algunos modelos geométricos no Euclidianos en enseñanza media, sin necesidad de recurrir a una matemática muy elaborada, como es el caso de la geometría diferencial.

Para ello, en este trabajo investigamos algunos aspectos y problemáticas del mundo de las geometrías no euclidianas, seleccionaremos aquellas que nos parecen mas pertinentes para el estudio de enseñanza media y estudiamos sus diferencias y similitudes con la geometría Euclidia.

I.2.- OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS.

I.2.1. Objetivo General:

Realizar un estudio indagatorio de problemáticas de Geometría No Euclidiana pertinentes para ser estudiadas en la enseñanza media.

I.2.2. Objetivos Específico:

- Investigar y reseñar algunos aspectos, de carácter histórico epistemológico básicos de la geometría, poniendo énfasis en la aparición de las geometrías no Euclidianas.

- Caracterizar similitudes y diferencias entre diversos aspectos de la geometría Plana y la Geometría Esférica, y en particular entre las nociones de:

  - ✓ Recta v/s Geodésica.
  - ✓ La reformulación de los postulados de Euclides.
  - ✓ Triángulo Plano v/s Triangulo Esférico.
  - ✓ El teorema de Girard.

Construir una secuencia de cuestiones problemáticas, que permitirían orientar la elaboración de propuestas didácticas para la geometría esférica, con el propósito de iniciar a los estudiantes de Enseñanza Media en dicha temática.

I.3.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para lograr nuestros objetivos, primero realizaremos una investigación carácter histórico epistemológico, que nos permita identificar los conceptos fundamentales de la geometría Euclidiana y no Euclidiana, a modo de poder establecer una primera delimitación de las posibles problemáticas de Geometría no euclidiana susceptibles de ser estudiadas, sin necesidad de recurrir a matemáticas de enseñanza media y, por tanto, que sea factible su estudio en enseñanza media.

Revisaremos que dice el currículo nacional respecto a la geometría y algunos aportes provenientes de las investigaciones en Didáctica de la Matemáticas, y de la geometría propiamente tal, a modo de considerarlos como antecedentes al momento de concluir la plausibilidad de la enseñanza del modelo de la Geometría No Euclidiana.

Los resultados del estudio histórico-epistemológico y de la revisión curricular nos permitirán desarrollar un conjunto de problemáticas de la Geometría no Euclidiana susceptibles de ser estudiadas en Enseñanza Media.

Luego trataremos de seleccionar y caracterizar un conjunto de ellas de manera de elaborar una secuencia de situaciones problemáticas, que permitan, a los alumnos de enseñanza media, estudiar la Geometría No Euclidiana, esto basándonos en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

A modo de ejemplo de una de las problemáticas que abordaremos es el estudio de caracterizar la relación de cuantos suman los tres ángulos de un triangulo esférico y propondremos una demostración para el teorema de Girad que dice:

TEOREMA.- En un triángulo esférico trazado en una esfera de radio R, la suma de los ángulos internos excede a "π" en el cuociente (área de triángulo)/R^2. Es decir, si α, β y γ son los ángulos internos de un triángulo esférico:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\frac{\text{Area del tríangulo}}{R^2}$$

CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS

II.1-FUNDAMENTOS PEDAGÓGICOS.

En esta sección partiremos por aclarar cuál será nuestra base pedagógica que nos permitirá construir la secuencia de problemáticas que propondremos para trabajar el tema de la geometría esférica en la enseñanza media, para esto nos parece prudente reseñar algunos aspectos fundamentales del actual paradigma imperante en nuestro modelo educativo. Por esta razón ahora desarrollaremos lo que entendemos por constructivismo.

II.1.1- Constructivismo.

Se puede decir mucho acerca de este paradigma, teoría, concepción epistemológica, punto de vista de cómo se construyen los conocimientos, etc. Para nosotros y tal como plantea Coll *"la concepción constructivista no es en sentido estricto una teoría, sino más bien un marco explicativo que, partiendo de la consideración social y socializadora de la educación escolar, integra aportaciones diversas cuyo denominador común lo constituye un acuerdo en torno a los principios constructivistas"* (COLL, 1999). Entendemos también, que el constructivismo surge en oposición al conductismo. Las teorías constructivistas se fundan en las investigaciones de Piaget[1], Ausubel[2], Vygotsky[3] y Bruner[4], por mencionar sólo algunas fuentes intelectuales. A continuación, revisaremos las ideas más relevantes de estos autores.

Ausubel plantea que "*el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por "estructura cognitiva" al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización*". (AUSUBEL, 1983)

---

[1] Jean William Fritz Piaget (1896 - 1980) fue un epistemólogo, psicólogo y biólogo suizo.
[2] David Paul Ausubel (1918 - 2008), psicólogo y pedagogo estadounidense
[3] Lev Semenovich Vigotsky (1896-1934) psicólogo ruso.
[4] Jerome Bruner, (Nueva York, 1 de octubre de 1915), psicólogo estadounidense.

Piaget propone que "*las personas construyen su comprensión del mundo y pasan por cuatro estadios de desarrollo cognitivo, cada estadio está relacionado con la edad e implica una forma particular de pensar"* (*PIAGET, 1951) y estos son:*

1. *Estadio sensorio-motor: Se extiende hasta los primeros años de edad. Los niños construyen la comprensión del mundo coordinando experiencias sensoriales y acciones físicas.* (*PIAGET, 1951)*
2. *Estadio preoperatorio: Se extiende aproximadamente entre los 2 y 7 años de edad. Los niños empiezan a representarse el mundo con palabras imágenes y dibujos.* (*PIAGET, 1951)*
3. *Estadio de las operaciones concretas: Se extiende aproximadamente entre los 7 y los 11 años de edad. Los niños son capaces de realizar operaciones y el razonamiento lógico sustituye al pensamiento intuitivo, siempre y cuando se aplique a ejemplos concretos.* (*PIAGET, 1951)*
4. *Estadio de las operaciones formales: Aparece entre los 12 y 15 años de edad. Los niños van más allá de las experiencias concretas y piensa de una forma más abstracta y lógica.* (*PIAGET, 1951)*

Según Piaget "*para dar sentido al mundo, organizamos nuestras experiencias, separamos las ideas importantes de las menos importantes y conectamos ideas entre sí. También adaptamos nuestro pensamiento para incluir nuevas ideas por que la información adicional acrecienta nuestra comprensión".* (*PIAGET, 1951)*

Vygotsky al igual que Piaget, creía que los niños construyen activamente su conocimiento. La Teoría de Vygotsky, es una teoría cognitiva socio cultural que enfatiza la importancia del análisis evolutivo y el papel que desempeñan el lenguaje y las relaciones sociales. Destacaremos de sus ideas la de "*zona de desarrollo próximo que es la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente el problema y el nivel de desarrollo potencial determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz".* (VIGOTSKY, 1989).

Por otro lado David Ausubel desarrolla la idea de aprendizaje significativo, donde señala que, "*los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno(a). Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos, pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando*". (AUSUBEL, 1983).

Dentro de su análisis plantea que se pueden distinguir dos tipos de aprendizaje significativo: Aprendizaje receptivo y aprendizaje por descubrimiento. Ideas que posteriormente complementa Bruner.

Aprendizaje receptivo: En este el estudiante recibe los contenidos de las asignaturas escolares de forma acabada, los comprende y asimila de manera que es capaz de comprenderlos y reproducirlos cuando le es requerido.

Cabe destacar que "*El aprendizaje por recepción, si bien es fenomenológicamente más sencillo que el aprendizaje por descubrimiento, surge paradójicamente ya muy avanzado el desarrollo y especialmente en sus formas verbales más puras logradas, implica un nivel mayor de madurez cognoscitiva*" (AUSUBEL, 1983).

Aprendizaje por descubrimiento: El estudiante recibe los contenidos de forma activa y autónoma, descubre los conceptos y sus relaciones y los reordena para adaptarlos a su esquema cognitivo.

Hay que aclarar que, Ausubel considera que: "*el aprendizaje por descubrimiento no debe ser presentado como opuesto al aprendizaje por recepción (exposición), ya que éste puede ser igual de eficaz, si se cumplen las características de aprendizaje significativo. Así, el aprendizaje escolar puede darse por recepción o por descubrimiento, como estrategia de enseñanza, y puede lograr un aprendizaje significativo*" (AUSUBEL, 1983).

Ya aclarados, a grandes rasgos, los aspectos fundamentales del constructivismo, continuaremos con aclarar las ideas de enseñanza de las matemáticas, el papel de la didáctica, los distintos enfoques de enseñanza y los cambios de paradigma que ha sufrido la didáctica de las matemáticas en su evolución histórica. Partiremos por la didáctica de las Matemáticas.

II.1.2- Didáctica de las Matemáticas

Según el Diccionario el pequeño LAROUSSE define enseñanza: *"como un método de impartir los conocimientos adquiridos a través de los estudios realizados"* (LAROUSSE, 1993, p 406); el proceso de enseñanza logra la idea de obtener un pensamiento lógico reversible capaz de descomponer las partes de un todo inicial. La enseñanza es el proceso mediante el cual se comunican, se trasmiten, conocimientos especiales o generales sobre una materia. El proceso de enseñanza tiene por objeto la formación integral de la persona humana.

Didáctica significa, según Freudenthal *"la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia. Los didactas son organizadores, desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su propio aprendizaje individual o grupal."* (Freudenthal, 1991).

Brousseau define a la didáctica de las matemáticas: *"como la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento la complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte, la existencia de la didáctica como ciencia y reducen la complejidad de los problemas seleccionando*" (BROUSSEAU 1998); la didáctica de la matemática debe tender hacia lo que Piaget denominó transdisciplinariedad lo que situaría a las investigaciones e innovaciones en didáctica dentro de las interacciones entre las múltiples disciplinas, (Psicología, Pedagogía, Sociología entre otras sin olvidar a la propia Matemática como disciplina científica) que permiten avanzar en el conocimiento de los problemas planteados.

El objeto de estudio de la Didáctica de Matemáticas es la situación didáctica, definida por como:

"Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr

que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución." (BROUSSEAU, 1982)

Según Gascón "antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esta es, todavía, la idea dominante en la cultura corriente y representa una "concepción" pre científica de la enseñanza que sigue siendo muy influyente en la cultura escolar". (Gascón, 1997)

Para Chevallard "El verdadero objetivo de la didáctica es la construcción de una teoría de los procesos didácticos que nos proporcione dominio práctico sobre los fenómenos de la clase" (Chevallard, 1980)

Entonces, nosotros entenderemos a la didáctica de las matemáticas como una disciplina en tanto conjunto de saberes matemáticos organizados, cuyo objeto de estudio es la relación entre los saberes y su enseñanza.

II.1.3Teoría se situaciones didácticas (TSD)

La teoría de situaciones didáctica propuesta por Brousseau, clasifica a estas en cuatro tipos. De Acción, de formulación, de validación y de Institucionalización.

<u>Situaciones de acción</u>: Son aquellas en que el individuo puede interactuar con el medio realizando acciones y/o tomando decisiones las cuales acarrearan alguna consecuencia.

El conocimiento es producto de conseguir poder relacionar las consecuencias y las acciones a modo de poder anticiparse a ellas.

Y el aprendizaje es el proceso, que el individuo lleva acabo, de adaptación al medio con el cual se esta interactuando.

<u>Situaciones de formulación:</u> Son aquellas situaciones en que el medio exige al individuo reconocer, identificar y explicitar un determinado conocimiento.

Para esto se necesita la intervención de otro sujeto a quien se le deba trasmitir la información obtenida.

Situaciones de validación: Son situaciones de formulación pero ahora se produce una discusión o debate entre ambos individuos respecto a sus observaciones acerca de su interacción con el medio y sus estrategias para atacarlo.

Situaciones de Institucionalización: Son situaciones de síntesis en donde se extrae lo fundamental y trascendental y se los identifica como un determinado saber.

II.1.4.Didáctica de la geometría:

Según, las investigaciones de Piaget sobre el desarrollo de conceptos geométricos, Las primeras interacciones del niño pequeño con su entorno, previas al desarrollo del lenguaje, se basan casi totalmente en experiencias espaciales, muy en particular a través de los sentidos de la vista y el tacto. Más tarde se desarrolla el lenguaje y adquiere significado en el seno y en el contexto del entorno físico.

Piaget, como resultado de sus numerosos experimentos propuso una teoría del desarrollo de los conceptos espaciales en el niño. Distingue entre *percepción*, que define como el "*conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos*", y *representación* (o imagen mental), que "*comporta la evocación de objetos en ausencia de ellos*". Las capacidades de percepción del niño se desarrollan hasta la edad de dos años (estadio 'sensoriomotor'), mientras que la capacidad de reconstrucción de imágenes espaciales comienza hacia la edad de dos años, y en la mayoría de los casos es perfeccionada desde los siete años en adelante en el niño medio (el período de 'operaciones concretas'). Mientras que los tests de "percepción" pueden fundarse en la capacidad de discriminación entre diferentes objetos presentados visualmente, los tests de "representación" (imaginería mental) de que se vale Piaget se fundan en la capacidad para identificar formas al tacto y en la capacidad para reproducir formas mediante palillos o dibujos.

En cada uno de estos estadios de desarrollo, Piaget distingue, además, una progresiva diferenciación de propiedades geométricas, partiendo de aquellas propiedades que él llama *topológicas*, o sea, propiedades globales independientes de la forma o el tamaño, como son las siguientes:

- *cercanía* ("proximidad"); por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos juntos, aun cuando éstos puedan haber sido situados por debajo de la boca;
- *separación*; por ejemplo, no traslapar la cabeza y el cuerpo;

- *ordenación*; por ejemplo, dibujar la nariz entre los ojos y la boca;
- *cerramiento*, como dibujar los ojos dentro de la boca;
- *continuidad*, como hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza.

El segundo grupo de propiedades que según Piaget distinguen los niños son las que denomina propiedades *proyectivas*, que suponen la capacidad del niño para predecir qué aspecto presentará un objeto al ser visto desde diversos ángulos. Por ejemplo, los niños pequeños pueden querer dibujar una cara de perfil y seguir, sin embargo, poniendo dos ojos en ella; o pueden no ser capaces de darse cuenta de que al mirar un lápiz desde un extremo se verá un círculo. La “rectitud” es una propiedad proyectiva, dado que las líneas rectas siguen mostrando aspecto rectilíneo cualquiera que sea el punto de vista desde el que se las observe.

El tercer grupo de propiedades geométricas son las euclídeas, esto es, las relativas a tamaños, distancias y direcciones, que conducen por lo tanto a la medición de longitudes, ángulos, áreas, etc. Se pueden distinguir, por ejemplo, un trapecio y un rectángulo basándose en los ángulos y en las longitudes de los lados. (Desde el punto de vista proyectivo, ambas figuras son equivalentes, ya que el tablero de una mesa rectangular ofrece aspecto de trapecio visto desde ciertos ángulos). Los niños pueden en este estadio reproducir la posición exacta de un punto en una página, o una figura geométrica, y decidir qué líneas y ángulos han de medir para ello.

El modelo de los niveles de van Hiele

En la didáctica de la geometría ha tenido una fuerte influencia el trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Diele-Geldof para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El modelo teórico conocido como de “los niveles de van Hiele” comenzó a proponerse en 1959 y ha sido objeto de abundantes experimentaciones e investigaciones que han llevado a introducir diversas matizaciones, pero que aún continúa siendo útil para organizar el currículo de geometría en la educación primaria y secundaria.

En este modelo se proponen cinco niveles jerárquicos para describir la comprensión y el dominio de las nociones y habilidades espaciales. Cada uno de los cinco niveles describe procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas. A continuación describimos brevemente las características de los cinco niveles y los tipos de actividades que pueden desarrollarse en cada uno de ellos.

Nivel 0 (Visualización o Reconocimiento): En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades.

Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares.

Ejemplo: identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.

Nivel 1(Análisis): Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras.

Ejemplo: un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales.

Nivel 2 (Ordenación o clasificación): Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales.

Ejemplo: en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

Nivel 3 (Deducción Formal): En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.

Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática

Ejemplo: demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Nivel 4 (Rigor): Se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar.

Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido.

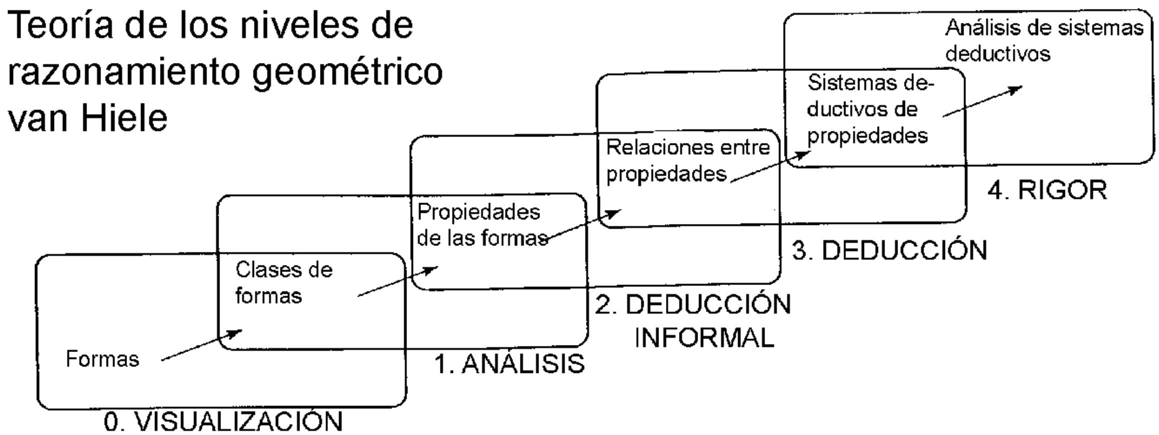


FIGURA 1. Teoría de los niveles de razonamiento geométrico Van Hiele

II.1.5- Geometría en el currículum Nacional

En el año 1998, se firma el decreto 220, en el que se establecen claramente los Objetivos Fundamentales [5](OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios [6](CMO) tanto para la Educación General Básica como para la Educación Media. A demás el año 2010 entra en vigencia de manera paulatina un nuevo ajuste curricular.

Los aprendizajes y el conocimiento matemático que conforman los OF y CMO del sector fueron organizados, de acuerdo con una progresión ordenada, en cuatro ejes

[5] Objetivos Fundamentales son las habilidades y capacidades que los estudiantes deben lograr al finalizar cada año escolar.

[6] Los Contenidos Mínimos Obligatorios corresponden al conjunto de saberes conceptuales y capacidades de desempeño práctico.

que articulan la experiencia formativa de alumnas y alumnos a lo largo de los años escolares, todo esto según el último ajuste curricular:

Números, algebra, geometría, datos azar

Geometría: *este eje se orienta, inicialmente, al desarrollo de la imaginación espacial, al conocimiento de objetos geométricos básicos y algunas de sus propiedades. En particular propone relacionar formas geométricas en dos y tres dimensiones, la construcción de figuras y de transformaciones de figuras. Se introduce la noción de medición en figuras planas. Progresivamente se introduce el concepto de demostración y se amplía la base epistemológica de la geometría, mediante las trasformaciones rígidas en el plano, los vectores y la geometría cartesiana. De este modo se dan diferentes enfoques para el tratamiento de problemas en los que interviene la forma, el tamaño y la posición. El eje se relaciona con el de números, a partir de la medición y la representación, en el plano cartesiano, de puntos y figuras; con el de álgebra y datos y azar, la relación se establece mediante el uso de fórmulas y luego la representación gráfica de funciones y de distribución de datos.*

El ministerio de educación además de poner a disposición planes y programas, para cada uno de los niveles, también elaboro un conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje, que describen la secuencia típica en que éste se desarrolla en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de cada estudiante, en los distintos sectores curriculares.
El Mapa de Progreso del Aprendizaje de geometría es el siguiente:

Mapa de Progreso de Geometría

Nivel 7
Resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. Selecciona entre varios procedimientos para resolver problemas en diferentes contextos geométricos, acorde a las características del problema. Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas

con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas.

Nivel 6

Relaciona la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen. Caracteriza puntos, rectas y planos en el espacio, describe cuerpos generados por traslaciones y rotaciones de figuras planas. Determina el módulo de un vector en dos o tres dimensiones y el área y volumen de cuerpos generados por traslaciones y rotaciones. Describe la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar. Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio. Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando métodos analíticos y gráficos.

Nivel 5

Caracteriza ángulos entre elementos lineales asociados a la circunferencia, comprende los conceptos de congruencia y semejanza, conoce los teoremas respectivos y los aplica como criterios para determinar congruencia y semejanza de figuras planas. Calcula la medida de ángulos en la circunferencia y de segmentos de figuras planas. Comprende el concepto de transformación en el plano cartesiano, y utiliza la representación vectorial para describir traslaciones y homotecias de figuras geométricas en el plano. Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano cartesiano. Demuestra teoremas relativos a relaciones entre trazos en triángulos y en la circunferencia y a trazos y ángulos en ella, y los aplica en la resolución de problemas.

Nivel 4

Reconoce la circunferencia y el círculo como lugares geométricos identificando sus elementos, y caracteriza elementos secundarios de triángulos. Comprende el teorema de Pitágoras y el concepto de volumen. Calcula longitudes de figuras bi y tridimensionales, el área del círculo y obtiene el volumen de distintos cuerpos geométricos. Construye ángulos, triángulos y sus elementos secundarios, y polígonos regulares. Comprende el concepto de transformación isométrica y aplica estas *transformaciones a figuras planas. Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones.*

Nivel 3

Caracteriza la relación entre ángulos que se forman en rectas coplanares que se cortan. Mide ángulos expresando sus resultados en unidades sexagesimales y determina áreas en triángulos y paralelogramos. Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos. Resuelve problemas que implican la elaboración de procedimientos para calcular ángulos en polígonos regulares y calcular áreas de triángulos, paralelogramos y formas que puedan descomponerse en estas figuras, y argumenta sobre la validez de sus procedimientos.

Nivel 2

Caracteriza cilindros, conos y pirámides en términos de las superficies y líneas que los delimitan e identifica las redes que permiten construirlos y las representaciones en el plano de sus vistas. Comprende los conceptos de perímetro y área, y emplea cuadrículas para estimar y medir áreas de superficies que se pueden descomponer en rectángulos. Formula y verifica conjeturas relativas a la posibilidad de construir cuerpos a partir de distintas redes. Resuelve problemas relacionados con el cálculo de áreas y perímetros de figuras que pueden ser descompuestas en rectángulos.

Nivel 1

Caracteriza figuras planas y prismas rectos en términos de sus elementos básicos y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, utilizándolos para describir y representar formas presentes en el entorno. Comprende el concepto de medición, estima y mide longitudes, usando unidades de medidas informales y estandarizadas, e interpreta información referida a longitudes en diferentes contextos. Formula y verifica conjeturas, y resuelve problemas relacionados con formas que se generan a partir de transformaciones y yuxtaposiciones de figuras planas y prismas rectos, y con la determinación de longitudes.

Si bien al revisar los CMO, del eje de geometría, no encontramos el tema de la geometría no Euclidiana, si encontramos CMO y OF relacionados con nuestro trabajo de seminario a lo largo de todos los niveles de enseñanza, como por ejemplo:

En Octavo año básico.

<u>OF</u>

"Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos, utilizar los conceptos de perímetro de una circunferencia, área del círculo y de la superficie del cilindro y cono, volumen de cilindros y conos rectos, en la resolución de problemas en contextos diversos".

<u>CMO</u>

"Resolución de problemas en situaciones significativas que involucran el cálculo de la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la superficie del cilindro, cono y pirámides y el volumen del cilindro y cono.

Caracterización de la circunferencia y el círculo como lugares geométricos y su representación mediante lenguaje conjuntista e identificación de sus elementos: arco, cuerda, secante y tangente.

Definición del número pi y su relación con el diámetro y la longitud de una circunferencia. Cálculo de la longitud de una circunferencia y estimación del área del círculo por medio de polígonos regulares inscritos en la circunferencia."

En Cuarto año medio

<u>OF</u>

Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio."

<u>CMO</u>

"Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.

Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector."

Por esto, creemos que es posible incorporar los contenidos geométricos que este seminario aborda, para ser tratados en la enseñanza media, sobre todo si estos son presentados en cuarto medio donde los contenidos se relacionan bastante.
Hechas todas estas aclaraciones, nos cabe decir que las actividades que propondremos para trabajar nuestro tema en la enseñanza media serán enfocadas tanto para desarrollar el aprendizaje significativo por recepción como también el aprendizaje significativo por descubrimiento. Los enfoques de nuestras actividades serán variados, sin tener que restringirnos solo a un estilo de enseñanza. Estas actividades pretenderán desarrollar competencias y habilidades asociadas a los niveles 5 y 6 del Mapa de Aprendizaje de geometría o nivel 3 (Deducción Formal) del modelo de los niveles de van Hiele

Una vez planteados los fundamentos pedagógicos de nuestra propuesta y revisados los postulados que rigen las distintas geometrías, podemos cerrar el capítulo de marco teórico de nuestro trabajo de seminario.

CAPÍTULO III: ESTUDIO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

En éste capítulo, primero, explicitaremos la base histórica matemática que permite la comprensión de la construcción del conocimiento geométrico hasta el surgimiento de las geometrías no Euclidianas.

Se revisaran los aspectos esenciales de la axiomática de la Geometría Plana y en particular de la obra "De Stoikheîa", centrándonos en la axiomática que propone Euclides y los 5 postulados.

Luego revisaremos aspectos históricos del nacimiento de la Geometría no Euclidiana, y de la generalización que propone Riemman de la geometría con la idea de "variedades rimmanianas" en función de las curvaturas de las superficies; caracterizando aquellos casos en que la curvatura es constante, y que dan origen a la geometría plana (curvatura 0), geometría hiperbólica (curvatura negativa) y geometría elíptica (curvatura positiva).

El centra la propuesta con una amplia caracterización de la geometría esférica, mediante distintos elementos propios de dicha geometría, como son el concepto de geodésica, circulo máximo, polígono regular y en particular del triangulo.

El capitulo concluye presentando el teorema de Girard para triángulos esféricos y explica paso a paso como demostrarlo, utilizando conocimientos de enseñanza media y sin necesidad de introducir aspectos de geometría diferencial.

III.1.- GEOMETRÍA EUCLIDEANA.

La geometría en el plano se puede entender como un lenguaje que contiene determinados objetos abstractos esenciales como el punto, la recta, concepto de plano, curva, distancia entre dos puntos, etc. y un conjunto de reglas para la construcción y el análisis de figuras abstractas tales como cuadrados, triángulos o rectángulos, que representan formas concretas que aparecen repetidamente en la vida cotidiana. El proceso consiste en ir aplicando las normas dadas a entes cada vez más complejos. Cada etapa debe estar muy bien sustentada en las ideas originales o reglas que se deducen en el proceso. La Geometría así entendida, se conoce como Geometría Axiomática, ya que parte de sus ideas básicas (axiomas), se aceptan sin discusión.

Así, entendemos por axioma una verdad aceptada como obvia y que no tiene discusión.

III.1.1- EUCLIDES.

La primera presentación completa de la Geometría desde una perspectiva axiomática, fue construida por Euclides en su obra "*Elementos*", un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros, escrito cerca del 300 a. C. en Alejandría.

Según *Proclo*[7], (Constantinopla, 412-Atenas, 485), Euclides vivió durante el reinado de *Ptolomeo I* [8]y puede ubicárselo temporalmente anterior a *Eratóstenes* [9](280-192 a.C.) y posterior a Platón (428-348 a.C.); por lo tanto, se puede decir que Euclides ha vivido alrededor del año 300 a.C. Algunos historiadores consideran que la existencia de Euclides es hipotética, atribuyendo su obra a una sociedad de matemáticos griegos que intentaron agrupar los conocimientos conocidos hasta ese momento en esta disciplina. Aunque a Euclides se le atribuyen varios tratados de geometría, el más importante es su “Stoikheîa” o “Elementos”. En los Elementos, Euclides consigue formalizar la geometría y darle carácter de ciencia deductiva, el cual hasta ese momento no poseía: se le veía como el agrupamiento de reglas empíricas para la medición y/o trazado de figuras planas. Es decir, lo que antes era producto de la práctica y la experimentación, ahora es una ciencia deductiva que se puede comprender usando sólo la razón y que existe aún sin considerar sus posibles aplicaciones.

Es en esa obra de trece volúmenes (donde se destacan más de ciento ochenta definiciones, cinco postulados y cierta cantidad de nociones comunes o axiomas) que Euclides establece lo que hoy se conoce como la “Geometría Euclidiana”.

---

[7] Filósofo neoplatónico. Estudió en Alejandría y sucedió a Domnino de Larisa como jefe de la Escuela de Atenas.
[8] Soberano de Egipto durante el apogeo de Euclides.
[9] Astrónomo, geógrafo, matemático y filósofo griego, estableció por primera vez la longitud de la circunferencia de la Tierra

Los Elementos de Euclides

Los Elementos de Euclides se utilizaron como texto indispensable para el estudio de la geometría durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión simplificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias de diversos países, no así en Chile. La primera edición impresa de las obras de Euclides que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín.

Al comienzo de cada uno de los libros que componen los Elementos, Euclides presenta unas definiciones y unas Nociones Comunes relativas a los temas desarrollados:

Composición De Stoikheîa	**Contenidos**
LIBRO I	• Rectas Paralelas. • Rectas Perpendiculares. • Propiedades de los lados y ángulos de los triángulos.
LIBRO II	• Álgebra geométrica.
LIBRO III	• propiedades del círculo y de la circunferencia.
LIBRO IV	• Polígonos Inscritos y Circunscritos.
LIBRO V	• Teoría de las proporciones de Eudoxo [10]
LIBRO VI	• Aplicación de las proporciones de Eudoxo a la semejanza de triángulos.
LIBRO VII	• Aritmética.
LIBRO VIIII	• Aritmética.
LIBRO IX	• Aritmética.
LIBRO X	• Aritmética.
LIBRO XI	• Perpendicularidad y Paralelismo de rectas y planos. • Ángulos diedros y poliedros, etc.
LIBRO XII	• Aplicación del método de Eudoxio a diversos problemas geométricos, como la equivalencia

[10] Eudoxo (Cnidos, actual Turquía, 400 a.C.-id., 350 a.C.) Astrónomo y matemático griego

	de pirámides y la semejanza de conos y cilindros.
LIBRO XIII	• Poliedros regulares.

La obra de Euclides no es totalmente original, pues muchos de sus libros están basados en conocimientos geométricos anteriores. Sin embargo, como ya comentamos anteriormente, la síntesis racional de todos los conocimientos empíricos, le da el carácter de una obra única.

A continuación revisamos los axiomas y postulados que Euclides usa como base para toda su geometría:

Axiomas de Euclides:

- Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
- Si cantidades iguales se suman a cantidades iguales, las sumas son iguales.
- Si cantidades iguales se restan de cantidades iguales, las diferencias son iguales.
- Dos figuras que coinciden son iguales entre sí.
- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

III.1.2.- POSTULADOS DE EUCLIDES.

Los postulados de Euclides son cinco. El que más nos interesa a nosotros es el quinto.

Primer postulado:

"Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una línea recta".

FIGURA 2. Primer postulado de Euclides.

Segundo postulado:

"Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente".

FIGURA 3. Segundo postulado de Euclides.

Tercer postulado:

"Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una circunferencia".

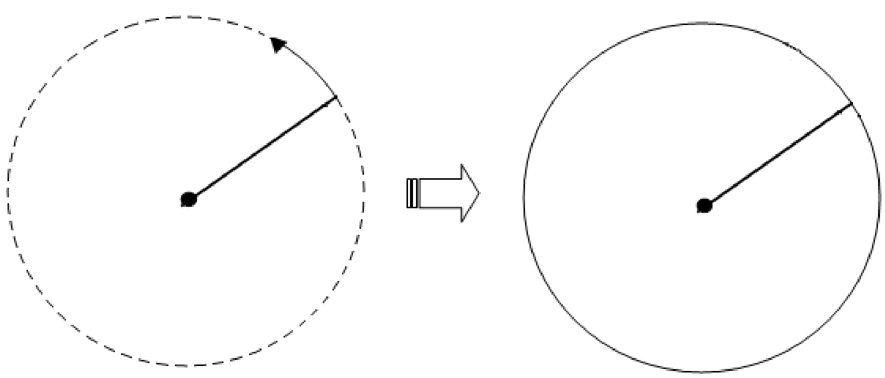


FIGURA 4. Tercer postulado de Euclides

Cuarto postulado:

“Todos los ángulos rectos son iguales”.

FIGURA 5. Cuarto postulado de Euclides

Quinto Postulado:

“Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado”

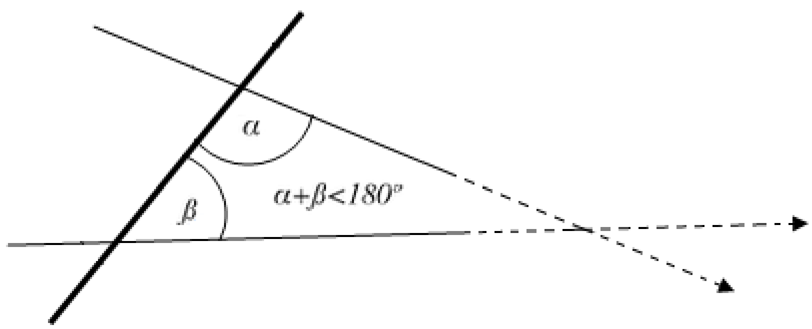


FIGURA 6. Quinto postulado de Euclides

Los primeros cuatro postulados tienen como característica que fueron aceptados como verdades auto-evidentes, pero el quinto postulado no tiene la consistencia de los otros. De hecho el primer uso que se hace en los Elementos de este postulado, es en la demostración de la proposición 29, la cual dice “Una recta que corta a dos rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales, los ángulos exteriores iguales a los interiores y opuestos, y la suma de los ángulos interiores por el mismo lado iguales a dos rectos."[11] Lo que llevó a los estudiosos a conjeturar en dos direcciones más o menos convergentes. Para unos, el mismo Euclides no estaba satisfecho con este postulado por lo que trató de postergar su utilización lo más posible. Para otros resultó natural preguntarse si este postulado es necesario del todo, y los llevó a pensar que tal vez podría ser derivado como un teorema de los otros postulados o al menos reemplazado por uno equivalente más aceptable; de hecho generaciones enteras de matemáticos[12] trataron infructuosamente de "demostrar" el quinto postulado.

Uno de los principales sustitutos del quinto postulado de Euclides apareció por primera vez en el Sumario de Proclo quien enunció un postulado equivalente. Este postulado se conoce como Axioma de Playfair, pues en 1795 el matemático escocés *John Playfair* propuso reemplazar el quinto postulado de Euclides por el axioma de Proclo:

Axioma de *Playfair* [13] (Equivalencia del quinto postulado)

"Dada una recta y un punto exterior a la misma solamente puede trazarse una única paralela".

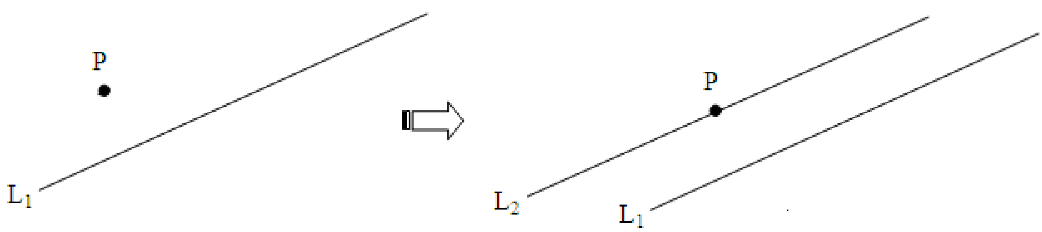


FIGURA 7. Axioma de Playfair

Ya revisadas las bases de la geometría Euclidiana, estamos en condiciones de hablar de las Geometrías No Euclidianas.

---

[11] http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/02-03/PG02-03-navarro.pdf (marzo, 2011)
[12] Proclo (411-485), Saccheri (1667-1733), Lambert (1728-1777), Lagrange, Fourier, Gauss y Lobachevsky fueron algunos de los matemáticos que estudiaron el quinto postulado.
[13] John Playfair (1748 -1819) fue un matemático y geólogo escocés.

III.2.- GEOMETRIA NO EUCLIDIANA.

En 1697 el italiano Giolamo Saccheri abrió un gran campo de posibilidades para la resolución del problema sobre el *quinto postulado*. La importancia de su trabajo radica en la suposición de que el quinto postulado de Euclides es falso. Su hipótesis nunca pudo ser demostrada.

La primera persona que realmente llegó a comprender este problema fue Gauss (1777-1855). Comenzó su trabajo con tan solo 15 años y en 1813 todavía no había conseguido grandes progresos, aunque seguía empeñado en reducir el quinto axioma de los restantes. Escribió: "*En la teoría de las paralelas ni siquiera ahora estamos mucho más lejos que Euclides. Ésta es una parte vergonzosa de las matemáticas...*".

En 1813 desarrolló una nueva geometría. La llamó geometría antieuclídea, más adelante geometría astral y finalmente la bautizó geometría no euclídea. En 1817 Gauss se había convencido que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro y estudió las consecuencias que se pudieran derivar de su negación, a saber, qué sucede si se puede trazar más de una línea paralela a una recta dada y que pasa por un punto exterior a ésta. Llegó a la conclusión que tal suposición era perfectamente aplicable al espacio físico.

Todavía es un misterio el hecho que Gauss no publicara sus descubrimientos, aunque en una de sus cartas llegó a decir que se debía a un miedo a ser malinterpretado. Quienes sí publicaron toda la construcción de esta nueva geometría fueron Nikolái Lobatchevsky (1793-1856), Janos Bolyai (1802-1860) y Bernhard Riemann (1826-1886).

Lobatchevsky y Bolyai dedicaron sus estudios a la negación del quinto postulado en base a la existencia de infinitas rectas paralelas a una recta dada. (Geometría Hiperbólica), en cambio Bernhard Riemann propone la no existencia de rectas paralelas a una recta dada (Geometría Elíptica).

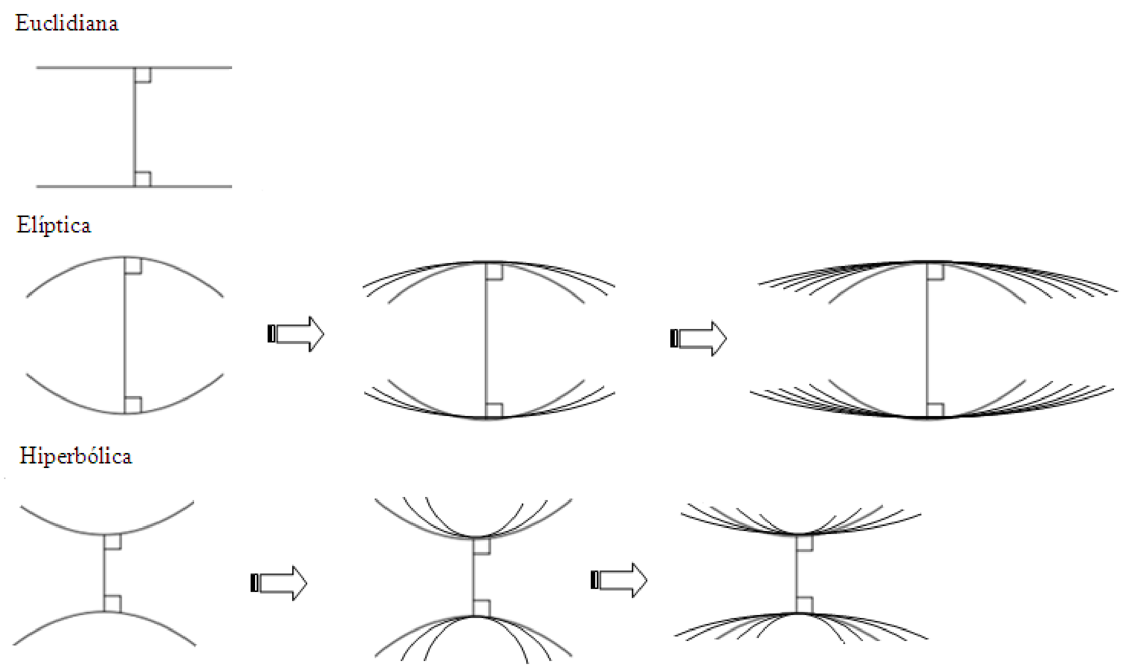


FIGURA 8. Representación quinto postulado según tipo de geometría

Por lo tanto definiremos una Geometría no Euclideana como una geometría que no tiene entre sus postulados el 5º postulado de Euclides.

III.2.1.- GEOMETRIA RIEMANNIANA.

En esta sección mencionamos brevemente, de manera intuitiva, un punto de vista aún más general que el de Gauss: los conceptos de "variedad riemanniana" y "curvatura" usados por B. Riemann.

Riemann introdujo la noción de una "variedad riemanniana", esto es, de un espacio que localmente se puede considerar como un pedazo del espacio tradicional que todos conocemos, pero que globalmente puede ser muy distinto al espacio que experimentamos todos los días. Por ejemplo, la superficie de una esfera es localmente equivalente a la superficie de un plano: si cortamos un trozo pequeño de una esfera lo podemos "aplanar", pero la esfera misma NO es igual a un plano: no podemos "aplanarla" sin cortarla. La esfera es un ejemplo de una variedad riemanniana. Ahora bien, en la teoría de Riemann es posible medir distancias, ángulos, áreas y también existe una noción de curvatura que es una característica distintiva de cada variedad riemanniana, y que en general es distinta en diferentes puntos de dicho espacio. Riemann demostró que la geometría euclidiana, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica pueden ser modeladas en variedades riemannianas caracterizadas por valores constantes de su curvatura:

- La **geometría euclideana** satisface los cinco postulados de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura cero.
- La **geometría hiperbólica** satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura negativa.
- La **geometría elíptica** satisface sólo los cuatro primeros postulados de Euclides y se modela en variedades riemannianas de curvatura positiva.

Con la iluminadora visión aportada por Riemann, los matemáticos se abocaron a construir espacios donde pudieran concretarse las geometrías no-Euclideanas, buscaron "modelos" de las mismas.

Uno de los primeros modelos considerados fue la superficie de una esfera en R^3. Dicha superficie posee curvatura constante positiva, permitiendo así concretar un modelo para la geometría plana elíptica y específicamente para la geometría Esférica

A continuación nos interesa desarrollar de manera clara los conceptos que involucran a la geometría en superficies esféricas, tales como por ejemplo punto, círculo máximo, "recta", etc. dado que esto es fundamental para la comprensión del teorema que demostraremos.

III.3.- LA GEOMETRíA ESFERíCA.

La geometría esférica es el modelo más simple de la geometría elíptica (curvatura constante para toda dirección), en la que para una "línea recta" dada, no existe una línea paralela que pase a través de un punto exterior a esta. Extenderemos entonces a la geometría esférica el estudio de las propiedades de rectas, puntos, segmentos, geodésicas y figuras geométricas construidas sobre la superficie de una esfera.

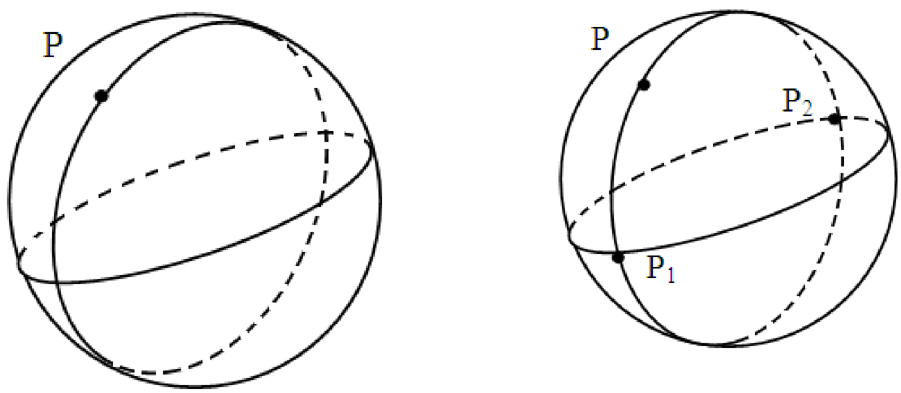


FIGURA 9. Representación de puntos en geometría esférica

En la esfera, los puntos están definidos en el sentido usual, equivalentes a la versión de punto en la geometría euclidiana. Los segmentos sobre la esferatienen una representación sobre la superficie de la esfera, como "la trayectoria más corta entre dos puntos sobre la superficie". Esta trayectoria se llama "geodésica" [14](más adelante precisaremos este concepto).

III.3.1.- ELEMENTOS DE GEOMETRIA ESFERICA.

Círculo Máximo.

Si tomamos una recta y una esfera en el espacioeuclideo tridimensional, varias cosas pueden ocurrir.

I. Que la recta no intersecte a la esfera.

[14] Ver III.4.2 Elementos de la geometría, Geodésica

II. Que la recta intersectea la esfera en un punto ; En tal caso decimos que la recta es tangente a ésta.
III. Que la recta intersecte a la esfera, precisamente en dos puntos.

En particular notemos que una recta no puede dividir a la esfera.

El caso que más interesante para nosotros es cuando la recta intersecta la esfera en dos puntos y atraviesa el centro de la esfera. En este caso los dos puntos de intersección se dicen antípodas. El mejor ejemplo de puntos antípodas son los polos geográficos Norte y Sur de la Tierra.

A continuación veremos qué ocurre si tomamos un plano y una esfera.

Nuevamente hay varias cosas que pueden suceder.

I. Que el plano no intersecte a la esfera.
II. Que el plano intersecte a la esfera en un punto; En este caso el plano es tangente a la esfera en el punto de intersección.
III. Que el plano intersecte a la esfera en más de un punto. En este caso se puede demostrar (ver apéndice) que la intersección de la esfera y el plano es un círculo.

En el caso I es fácil de ver que el tamaño del círculo formado en la intersección depende de será más grande cuando el plano atraviesa el centro de la esfera, como se ve en la figura a continuación. Tal círculo es designado como círculo máximo o mayor, de lo contrario se llamará circulo mínimo o menor.

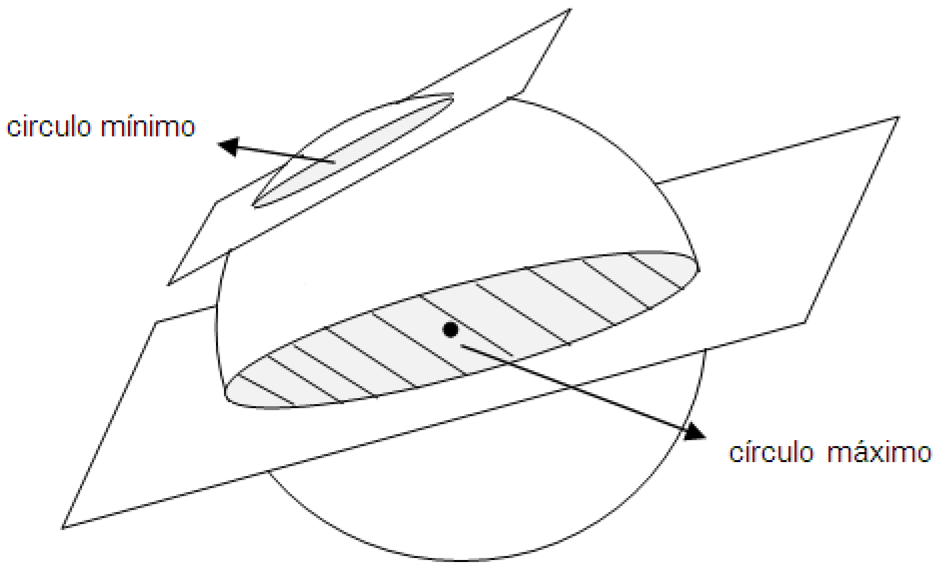


FIGURA 10. Círculos Máximos

Un ejemplo geográfico de un gran círculo es el ecuador. Los meridianos terrestres forman exactamente la mitad de gran círculo. Los paralelos de latitud son círculos menores, excepto por el ecuador.

Geodésicas.

Los círculos máximos son de gran importancia cuando nos damos cuenta que la distancia más corta entre dos puntos en la esfera está a lo largo del segmento del círculo máximo que los une. Usando el vocabulario de III.1, vemos que los círculos máximos son precisamente las geodésicas de la esfera. (Ver apéndice; Geodésicas y grandes círculos).

Supongamos que tenemos dos puntos cualesquiera A y B, no antípodas, sobre la superficie de una esfera y que dibujamos el círculo máximo que pasa por dichos puntos.

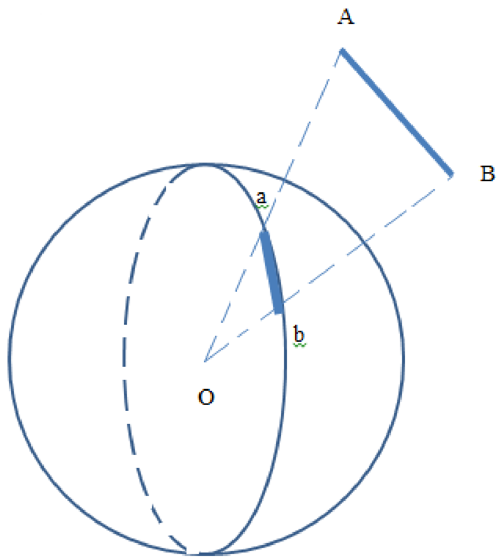


FIGURA 11. Geodésicas

El arco AB que une A con B sin pasar por un punto antípoda de A o de B, ubicado sobre el círculo máximo es de longitud mínima. Dicho arco es un ejemplo de curva geodésica.

Distancias e isometrías esféricas.

Si A y B son dos puntos en la esfera de radio R, entonces la distancia entre ellos es la distancia a lo largo del gran círculo que los conecta. Como el círculo está totalmente en un plano (porque se obtuvo como la intersección de un plano y la esfera), podemos calcular esta distancia usando la figura que está a continuación. Si el ángulo ACB es α y si α está medido en radianes, entonces la distancia entre A y B está dada por:

$d(\mathrm{A,B}) = R \cdot \alpha$, donde R es el radio de la esfera.

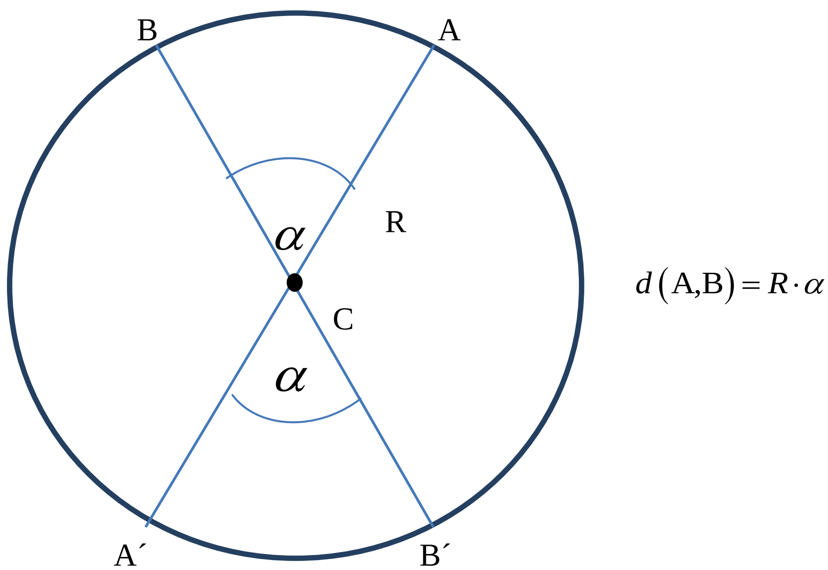


FIGURA 12. Longitud de un arco

Una isometría es una función de la esfera en si misma que preserva la distancia entre puntos de la esfera. Es fácil de ver que una rotación de la esfera alrededor de uno de sus diámetros es una isometría.

Otro ejemplo de una isometría es la función antipodal, que asigna a un determinado punto A en la esfera la intersección A’ de la línea AC a través del punto A y el centro de la esfera C, con la esfera (ver figura en la página anterior).

Demostración:

Tomemos dos puntos A y B en la esfera. Podemos suponer que están en un círculo, como en la figura de arriba. La distancia entre ellos es $R \cdot \alpha$. Ahora dibujamos los puntos antipodales A' y B'. El ángulo entre ellos es nuevamente alfa, y por lo tanto la distancia entre A' y B' es también $R \cdot \alpha$.

Triángulo esférico.

Un triángulo esférico, es una figura formada por la intersección de tres arcos de círculos máximos menores que °180.

Nota: Si bien la definición es clara y precisa, es importante destacar que al dibujar las tres geodésicas que lo conforman, la superficie de la esfera queda particionada en 8 triángulos.

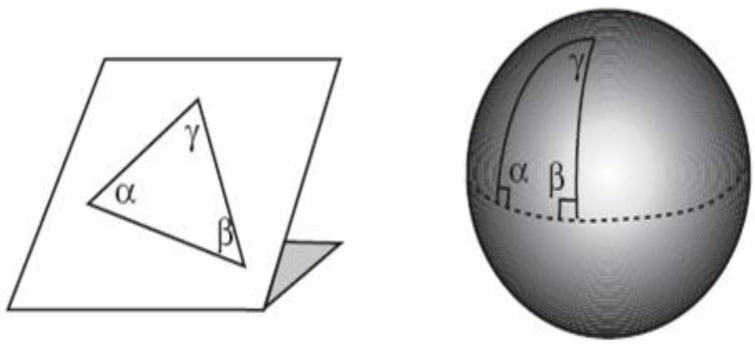


FIGURA 13. Triángulos según superficie[15]

Ángulos interiores de un triángulo esférico.

Es evidente que un triángulo esférico, tiene tres ángulos internos, como se muestra en la siguiente figura:

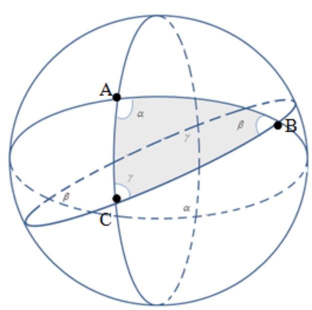


FIGURA 14. Triangulo esférico y ángulos interiores

[15] MINEDUC. Programa de Estudio, Tercer Año Medio, formación diferenciada, Sub Sector física.

Los ángulos esféricos se miden usando rectas tangentes a las geodésicas que se conforman y que pasan por los vértices del triangulo. Por ejemplo, el ángulo α en la Figura 15 es por definición el ángulo entre las líneas tangentes a los círculos máximos AB y AC en el punto A. Con un transportador y un poco de práctica es posible medir ángulos esféricos con precisión.

Luna de una Esfera.

En el plano, el polígono más simple es el triángulo. No hay polígonos con sólo dos lados. Esto no es cierto en la esfera. Cualquier par de círculos máximos se interceptan en dos puntos antípodas, y dividen la esfera en cuatro regiones, cada una tiene dos lados que son segmentos de círculos máximos. Llamaremos tal región una luna o luneta.

Hay 2 cosas que debemos destacar acerca de las lunas:

- Los vértices de una luna son puntos antipodales, porque, como ya lo hemos visto, se pueden unir por un segmento de recta que pasa por el centro de la esfera.
- Los dos ángulos de una luna son iguales, porque cada uno de sus ángulos es igual al ángulo entre los planos que determinan sus lados.

Área de la esfera y El área de una luna.

El área de la esfera de radio R es $4\pi R^2$. Un círculo máximo divide la esfera en 2 hemisferios congruentes. Cada uno de éstos con área $2\pi R^2$. Otro gran círculo, que se intersecta con el primero en ángulos rectos, divide a la esfera en 4 lunas congruentes, y el área de cada luna es $\frac{4\pi R^2}{4} = \pi R^2$.

Podemos continuar este proceso dividiendo las 4 lunas en dos lunas congruentes cada una, obteniendo ocho lunas congruentes donde cada una tiene un área de

$\frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}$, y así sucesivamente. Ahora notemos que una luna está siempre contenida en un hemisferio de la esfera. Entonces, si dividimos un hemisferio en q lunas iguales, la esfera se va a dividir en $2q$ lunas, el área de cada luna será $\frac{4\pi R^2}{2q} = \frac{2\pi R^2}{q}$ y el ángulo de cada luna será $\frac{2\pi}{2q} = \frac{\pi}{q}$. Ahora, si unimos p de estas lunas, vamos a encontrar una luna de ángulo $\frac{p \cdot \pi}{q}$, y de área $\frac{2p\pi R^2}{q}$. Concluimos que el área de una luna de ángulo lunar $\alpha = \frac{p\pi}{q}$ es:

$A_\alpha = 2R^2\alpha$ (A_α = Área luna de ángulo lunar alfa)

Este razonamiento prueba esta igualdad para todos los ángulos de la forma $\frac{p\pi}{q}$, pero es válida para cualquier ángulo α, porque podemos aproximar α usando múltiplos racionales de π. Conclusión:

El Área de la luna de ángulo lunar alfa es igual a $2R^2\alpha$.

III.4.- TEOREMA DE GIRARD

En esta sección construiremos la demostración del teorema de Girard.

Albert Girard:(Saint-Mihiel, 1590-La Haya, 1633) Matemático francés. Fue el introductor de numerosos símbolos matemáticos, demostró la existencia de raíces imaginarias y calculó el área de figuras poligonales trazadas sobre una superficie esférica. Y a partir de estos cálculos propuso el teorema que se trabaja en el presente trabajo de seminario.

En la siguiente figura tenemos dos lunas producidas por la intersección de dos círculos máximos en los puntos antipodales A y A', en una esfera de radio R. El ángulo esférico en el vértice A lo llamaremos α. La superficie achurada será el área de las lunas asociadas a dicho ángulo. Notemos que, como se ve en la figura, los tres círculos máximos forman dos triángulos congruentes, el triángulo ABC y el triángulo A'B'C'.

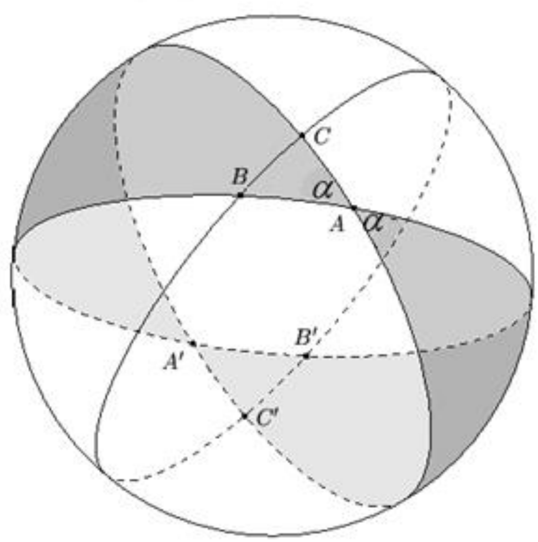


FIGURA 15. Ángulos y lunas

Del mismo modo en los vértices B y B'

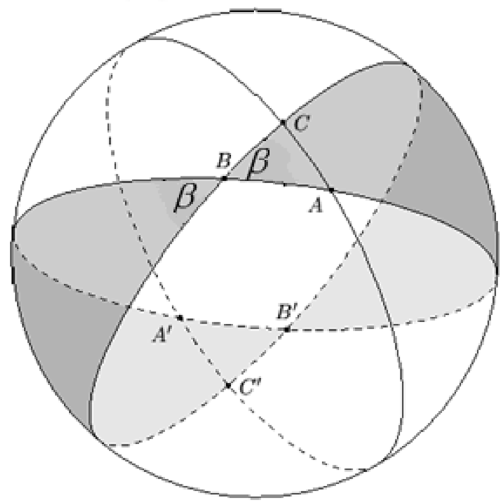


FIGURA 16. Ángulos y lunas 2

Y por último en los vértices C y C'

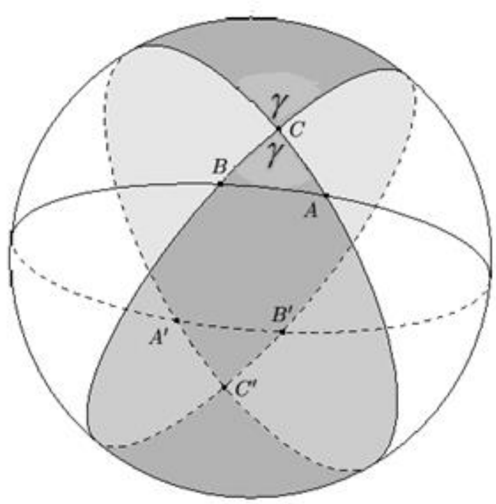


FIGURA 17. Ángulos y lunas 3

Al superponer las áreas asociadas a cada ángulo nos encontramos con un panorama muy particular.

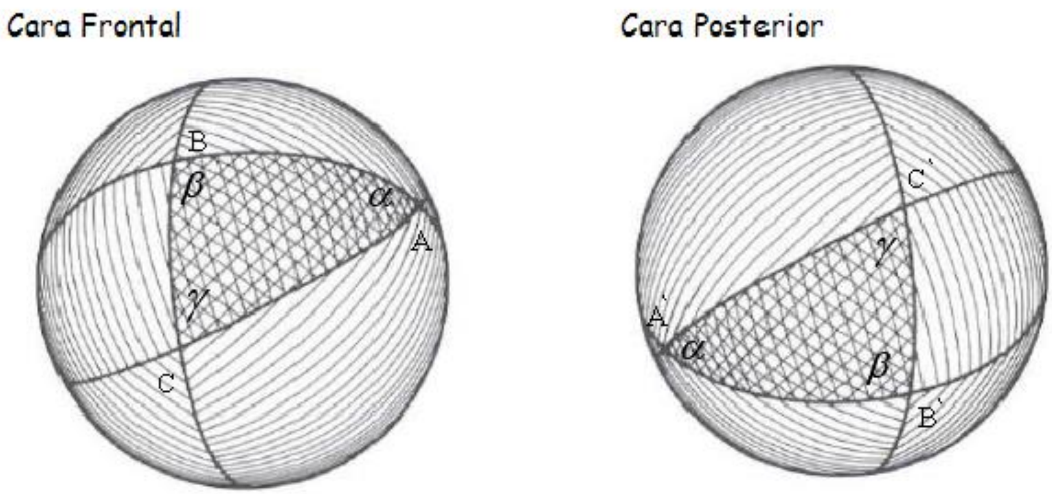


FIGURA 18. Achurado de lunas

Es evidente que el área cubierta por las seis lunas correspondientes a los ángulos interiores, excede al área completa de la esfera en cuatro áreas de nuestro triangulo.

Denotando por A_α, B_β y C_γ el área de las lunas correspondientes a los ángulos α, β y γ , se tiene:

$$2A_\alpha + 2A_\beta + 2A_\gamma = A_{ESFERA} + Exceso$$

$$(4 \cdot \alpha \cdot r^2) + (4 \cdot \beta \cdot r^2) + (4 \cdot \gamma \cdot r^2) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A\Delta$$

Dividiendo todo por $4R^2$, resulta:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A\Delta}{R^2}$$

Expresamos nuestro resultado en el siguiente teorema
Teorema de Girard:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es igual a π más el área del triángulo dividida por el cuadrado del radio de la esfera.

CAPÍTULO IV : PROBLEMATICAS

A continuación se presentará una secuencia de actividades problemáticas propuestas, las cuales pueden ser utilizadas como ejemplos para la construcción de actividades propias o pueden ser aplicadas en el aula, cuando el docente lo estime conveniente.

Objetivo de la propuesta.

Esta secuencia de problemáticas ofrece al estudiante la posibilidad de contrastar la geometría euclidiana con las geometrías no euclidianas, estudiando sus similitudes y diferencias, de esta manera los alumnos podrán ampliar su visión, respecto al mundo geométrico.

Específicamente, los estudiantes trabajaran elementos básicos de la geometría esférica, y de manera casi intuitiva se busca que sean capaces de demostrar cuál es la sumas de los ángulos interiores de un triangulo esférico.

Conceptos claves.

Geometría Euclidiana, geometría no euclidiana, superficie, curvatura, geodésica, Angulo esférico.

Prerrequisitos.

Geometría Básica.

Cuerpos Geométricos.

Proporciones.

Contenidos disciplinares.

Medición de ángulos.

Aplicación de proporciones.

Aplicación del Área de una esfera.

Habilidades.

Asociar conceptos y teoremas de geometría plana a geometría esférica.

Realizar proporciones con ángulos esféricos.

Medición de ángulos esféricos.

Actitudes.

Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas geométricos-matemáticos.

• Aplicar un método para realizar las tareas propuestas.

• Desarrollar tenacidad frente a obstáculos o dudas que se les presenten en situaciones propuestas sobre geometrías no euclidianas.

Aprendizajes esperado v/s indicadores de evaluación.

APRENDIZAJES ESPERADOS	**SUGERENCIAS DE INDICADORES DE EVALUACION**
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:**
1. Asociar conceptos y teoremas de geometría plana a geometría esférica.	-Identifican ángulos y elementos de la circunferencia en la esfera. -Dibujan ángulos y rectas sobre la superficie de una esfera.

2. Identificar la necesidad de reformular conceptos, teoremas y elementos de geometría plana para poder estudiar la geometría esférica.	- Aceptan un nuevo modelo, una nueva visión y un nuevo paradigma de la geometría conocida hasta entonces. - Aceptan la negación al quinto postulado de Euclides,
3. Formular y verificar semejanzas y diferencias entre tipos de geometría	- Demuestran del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triangulo plano, en un triángulo esférico.

Relación de la unidad con respecto a los OFT.

Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al demostrar la irregularidad entre los tipos de geometrías.

•Mostrar un método para realizar las tareas propuestas.

•Terminar los trabajos iniciados.

•Desarrollar tenacidad frente a obstáculos o dudas que se les presenten en la demostración del teorema matemático.

IV.1.-SECUENCIAS PROBLEMATICAS

Para llevar a cabo nuestro objetivo de seminario de tesis, nos disponemos a generar una secuencia progresiva y articulada de problemáticas, que le permitan al alumno construir y comprender un modelo de geometría diferente al euclideo, todo esto enfocado a alumnos de la enseñanza media.

A través de dichas problemáticas abordaremos determinados aspectos esenciales de la geometría esférica y cuestionaremos aspectos de la geometría euclidiana que no se cumplen sobre la esfera.

Todas las problemáticas están planteadas de manera que se puedan trabajar tanto en grupo como individualmente, eso si siempre se pensó en que los estudiantes pudieran trabajar y visualizar elementos concretos y que a la vez tengan la posibilidad de discutir y contrastar sus observaciones y conclusiones al respecto, de manera de ir construyendo paso a paso, el saber matemático que se esta trabajando.

Estructura de las problemáticas

- **Primera problemática**: ***Plano v/s Esfera***
- ***Segunda problemática*: *Midiendo distancias en la esfera***
- ***Tercera problemática: Construyendo una regla para medir distancias sobre una determinada esfera.***
- **Cuarta *problemática*: Coordenadas Geográficas**
- **Quinta *problemática*: Calculando distancias con coordenadas geográficas.**
- ***Sexta problemática: Formación de polígonos en una esfera***
- **Séptima problemática: Área de un polígono**
- **Síntesis**
- **Octava problemática: Redefiniendo los Postulados de Euclides**
- ***Novena problemática: Triángulos esféricos***
- ***Decima problemática: ¿Como calcular el Área de un Triángulo esférico?***
- **Onceava *problemática*: *El Área de un Triángulo esférico y el teorema de Girard***

DIBUJANDO SOBRE UNA ESFERA

PRIMERA PROBLEMÁTICA

Nombre*: Plano v/s Esfera.*

Materiales:

1. Regla
2. Escuadra.
3. Papel o cartulina.
4. Tijeras
5. Esfera de plumavid de 5 cm , o mas , de radio. (una por grupo es ideal)

Introducción de la problemática:

La situación se inicia mostrándoles a los estudiantes, un elemento que usaremos durante casi todas las problemáticas que se presentaran, una esfera de plumavid. En esta ocasión la superficie de la esfera estará dividida en 8 partes iguales y tendrá una de esas partes su superficie achurada, según muestra la figura:

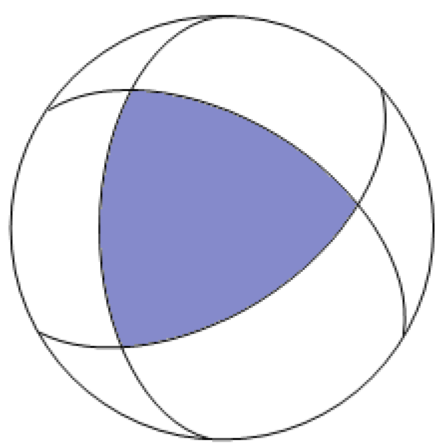


FIGURA 19. Triángulo sobre esfera

Luego a los alumnos se les plantea el siguiente desafío y/o actividad:

Deben construir un triángulo, que les permita tapar la superficie achurada en la esfera. Gana aquel equipo que es capaz de construir el triangulo mínimo que tapa el área achurada.

Desarrollo:

Para enfrentar esta actividad, se sugiere plantear el desarrollo de esta en grupos de 3 o 4 alumnos, donde cada integrante del grupo puede construir su propio triangulo. Se le puede permitir que midan el radio de la esfera o se les puede entregar esta medida.

Una vez construidos los triángulos, dibujados y recortados, los estudiantes pueden probar si alguno de los modelos construidos logra solucionar la problemática.

Luego que, todos hayan intentado cubrir la superficie achurada, se puede invitar a los grupos a discutir sobre los resultados del desafío. ¿Por qué una superficie plana no puede cubrir adecuadamente una superficie esférica?

Es esperable que los alumnos construyan figuras de triángulos o variaciones de este pero con lados curvos, pero ninguno logra cubrir bien el área achurada. Esto permitiría orienta la discusión sobre los conceptos de: triangulo, superficie, recta y curva. Y al parecer para trabajar sobre la esfera, se esta haciendo necesario redefinir estos conceptos, eso sí, manteniendo algunas de las bases de estos, como por ejemplo el concepto de recta como camino más corto entre dos puntos.

Síntesis:

Esta situación busca introducir a los estudiantes en el trabajo sobre superficies esféricas y que con ello puedan contrastar sus observaciones con la realidad de las superficies planas. También se espera que nazca una nueva problemática, ¿Por qué ningún triangulo logra rellenar ese espacio? La superficie achurada, ¿es o no un triángulo? ¿Cómo son sus lados? Etc.

En suma

1º Ninguna figura plana logra cubrir el área achurada.

2ºSe espera que los alumnos construyan triángulos planos y figuras similares pero formadas por curvas.

3ºConseguir que los estudiantes contrasten superficies planas con superficies esféricas.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática, como se trata de una actividad inicial, se presentan una situación netamente de acción, dado que los alumnos se enfrentan a un desafío sin contar con más elementos que los presentados, y por ende el alumno debe comenzar a crear una estrategia basada en el ensayo y error que le permita superar el desafío planteado

<u>SEGUNDA PROBLEMÁTICA:</u>

Nombre*: Midiendo distancias en la esfera.*

<u>Materiales:</u>

1. Esfera de plumavid
2. Huincha de medir (de costura)
3. Regla.
4. Trozo de hilo.

<u>Introducción de la problemática:</u>

En esta segunda problemática, se desafía a los estudiantes a encontrar el camino más corto entre dos puntos dados situados en la superficie de la esfera. Se les plantea las preguntas sobre ¿Cuál si el camino es único, y como será este camino? Si, dados dos puntos cualesquiera, estos ¿podrían ser considerados coliniales? ¿O no?

<u>Desarrollo:</u>

Se les pide a los alumnos que dibujen dos o mas puntos sobre la superficie esférica de una pelota de plumavid, entonces de les indican que usando distintos elementos para la medición, determinen y tracen el camino mas corto para llegar desde un punto a otro.

Para ello la idea es que los alumnos prueben con diferentes elementos como una regla plana, un trozo de hilo, una huincha de costura, etc. La idea es que una vez realizada la actividad pueden contrastar sus resultados con los de sus compañeros y así sacar conclusiones generales respecto a las distancias y caminos construidos, acá será necesario distinguir entre las distancia por la superficie y la distancia a través de la esfera.

Síntesis:

Esta problemática busca que los alumnos aclaren el concepto de la distancia más corta entre dos puntos en una esfera y la contrasten con la definición de recta de la geometría Euclidiana. O sea, se espera que los estudiantes concluyan que la distancia más corta entre dos puntos sobre la esfera no es la línea recta, porque esta pasaría por dentro de está, sino que una curva que estando sobre la superficie esférica, sea la más recta posible (o sea que la única curvatura que tenga sea la propia de la superficie esférica.

En suma:

1ºLos estudiantes miden con diferentes elementos y técnicas, la distancia entre dos puntos cualquieras situados sobre la superficie de la esfera.

2ºSe espera que concluyan que el camino mas corto para ir de un punto a otro es una línea que sobre la esfera mantiene una dirección constante, o sea que la única curva que tiene es la propia curvatura de la esfera.

Caracterización en base a TSD

Durante esta problemática los alumnos se ven expuestos inicialmente a situaciones de acción, donde ellos tendrán que encontrar la manera de hallar el camino más corto entre dos puntos sobre la esfera, luego en los momentos en que los alumnos tengan que comunicar y contrastar sus resultados con sus compañeros se presentas situaciones que pueden ser tanto de formulación como de validación.

TERCERA PROBLEMÁTICA

Nombre*: Construyendo una regla para medir distancias sobre una determinada esfera.*

Materiales:

1. Cartón piedra.
2. Compás.
3. Esfera de plumavid.
4. Transportador.

Introducción de la problemática:

Ya hemos trabajado sobre la superficie de la esfera de plumavid, manejando figuras y midiendo distancias, esta vez los estudiantes deberán construir una regla que nos sirva para medir distancias en superficies esféricas.

Desarrollo:

En esta situación se les plantea a los alumnos la problemática de con los materiales con los que cuenta construya un instrumento equivalente a lo que sería una regla, para que nos permita medir, sistemáticamente, la distancia entre los dos puntos cualquiera situados sobre la superficie de la esfera.

Síntesis:

Se espera que construyan una regla similar a la de la siguiente figura:

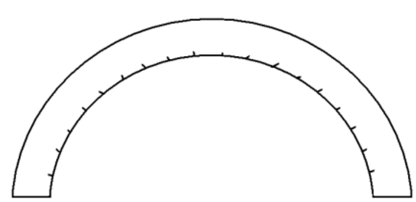


FIGURA 20. Regla esférica

Se busca que los alumnos se den cuenta de cuál debe ser la curvatura que debiese tener la regla y que una determinada regla sirve solo para un determinado tamaño de esfera. Se puede introducir el concepto de geodésica e inducir una discusión de recta en el plano versus Geodesia en la esfera.

La línea más corta entre dos puntos es una curva de diámetros máximo, o sea de radio igual al de la esfera.

Dados dos puntos no antipodales pasa una sola geodésica.

Dados dos puntos antipodales pasan “infinitas” geodésicas.

1º Construyen un elemento concreto que les permita determinar la distancia sobre la superficie de la esfera.

2ºAnalizan las variable que influyen en la forma final del elemento construido.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática, se presentaran situaciones que pueden ser vistas con de acción, pero también como de formulación, dado que, se espera que lo grupos de estudiantes, con los conocimientos que ya han construido en las actividades anteriores discutan cual sería la estrategia adecuada para solucionas el dilema en cuestión.

CUARTA PROBLEMÁTICA

Nombre: Coordenadas Geográficas

Introducción de la problemática:

Esta problemática introduce planteando a los estudiantes, que discutan sobre las siguientes preguntas:

¿Cómo creen que se ubica un punto sobre la Tierra?

¿Qué son los GPS y que parámetros utilizan?

Desarrollo:

Luego, se les entrega el siguiente texto:

Latitud y longitud.

De la misma manera que para determinar la posición de un punto cualquiera sobre un plano se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas, para localizar con exactitud cualquier punto de la superficie terrestre nos servimos de un sistema de coordenadas geométricas expresadas mediante una pareja de números denominados latitud y longitud que expresan mediciones angulares sobre la superficie de una esfera.

La Tierra tiene forma de esfera y como tal, lo mismo que los ángulos o los círculos, se puede medir también en grados; así, representada sobre globos o mapas, la Tierra dividida en paralelos y meridianos. Los meridianos son los círculos máximos de la esfera terrestre que pasan por los Polos geográficos N y S y paralelo al círculo formado por la intersección de la esfera terrestre con un plano imaginario perpendicular al eje que une los dos polos geográficos.

Cualquier lugar de la tierra puede ser situado exactamente por la intersección de un meridiano y un paralelo, es decir por dos números (coordenadas) que representan la latitud y la longitud de ese lugar, indicando cada número la cantidad de grados Norte o Sur desde el ecuador (latitud) y Este u Oeste desde el meridiano 0º (longitud). Así pues, latitud y longitud son expresiones angulares, indicadas en grados, minutos y segundos; cada grado (indicado por el símbolo °) se divide en 60 minutos (indicados por el símbolo ' comilla simple) y cada minuto en 60 segundos (simbolizados por '' comilla doble). Por ejemplo Santiago de Chile, está situada en los 33º 27` de latitud sur, 70º 42` de longitud oeste; la ciudad de Punta Arenas ubicada en el extremo austral del país, tiene como coordenadas geográficas 53º 8` de latitud sur, 70º 53` de longitud oeste, *La regla seguida para especificar estas coordenadas, es indicar primero la latitud y luego la longitud; es por comodidad pues no puede haber confusión debido a que las latitudes solo pueden ser Norte o Sur (N o S) y las longitudes Este u Oeste (E u W).*

Latitud.

La latitud proporciona la localización de un lugar, en dirección Norte o Sur desde el ecuador y se expresa en medidas angulares que varían desde los 0º del Ecuador hasta los 90ºN del polo Norte o los 90ºS del polo Sur. Como podemos ver en la fig.21, si trazamos una recta que vaya desde el punto P hasta el centro de la esfera O, el ángulo a que forma esa recta con el plano ecuatorial expresa la latitud de dicho punto.

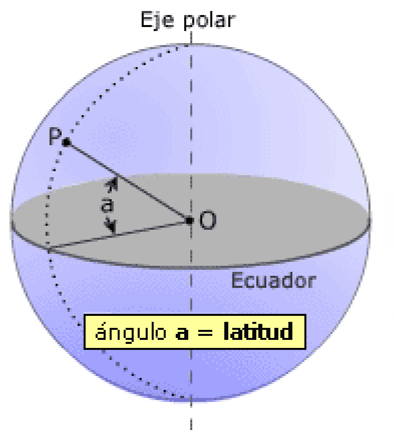


Figura 21.Latitud de un punto

El ecuador es el origen de latitud (paralelo 0º), o sea que la distancia angular Norte-Sur de cualquier punto se entiende medida desde el plano ecuatorial. El ecuador esta a 0º de latitud y los polos a 90ºN (polo Norte) y 90ºS (polo Sur). El valor máximo de la latitud es por tanto de 90º, y cualquier punto en la línea del ecuador tendrá una latitud 0º.

Los grados de latitud están espaciados regularmente 111 Km.cada grado aproximadamente. El ligero achatamiento de la Tierra en los polos causa que un grado de latitud varíe de 110.57 Km. en el ecuador hasta 111.70 Km. en los polos.

Antiguamente, la latitud se obtenía mediante un sextante o cualquier otro instrumento capaz de medir el ángulo entre el horizonte y cualquier cuerpo celestial, por ejemplo la estrella Polar. Se podía determinar la latitud mediante tablas que daban la posición del Sol y otros cuerpos celestes según fecha y hora (almanaque). Como todos los puntos de cualquier paralelo equidistan del ecuador, la latitud es la misma a lo largo de todo el.

Resumiendo: Latitud es la distancia angular desde el ecuador a un punto dado de la superficie terrestre. Puntos situados al norte del ecuador tienen latitud Norte (N), los situados al Sur tienen latitud Sur (S).

Longitud.

Aunque el Ecuador fue una elección obvia como referencia de latitudes, dado que es el mayor círculo perpendicular al eje Norte/Sur, no sucedía lo mismo con los meridianos pues todos son círculos máximos. La latitud era posible calcularla desde tiempos inmemoriales en la forma que se ha indicado, quizá por eso los grandes viajes de navegación hasta Colón se hicieron casi siempre en dirección Este-Oeste Manteniendo el rumbo al mantener la latitud, o sea, viajando a través del mismo paralelo.

Hasta bien avanzado el siglo XIX cada nación tenía su meridiano origen de longitudes con el resultado que muchos mapas anteriores carecen de unas referencias estandarizadas. El problema fue resuelto en 1884 cuando una comisión internacional designó como meridiano 0º aquel que pasa por el London's Greenwich Observatory (de ahí su denominación) en reconocimiento a su labor investigadora.

La longitud proporciona la localización de un lugar, en dirección Este u Oeste desde el meridiano de referencia 0º, también conocido como meridiano de Greenwich, expresándose en medidas angulares comprendidas desde los 0º hasta 180ºE y 180ºW.

Se puede ver en la fig.22, que el ángulo b mide la distancia angular del meridiano del lugar P con el meridiano 0º (meridiano de Greenwich). Es lo mismo medir este ángulo sobre el círculo del ecuador que sobre el círculo del paralelo que pasa por el punto P, el valor angular de b es igual en ambos casos. En el ejemplo de esta figura, la longitud es Oeste (W) puesto que el meridiano del punto P está al Oeste del meridiano de Greenwich.

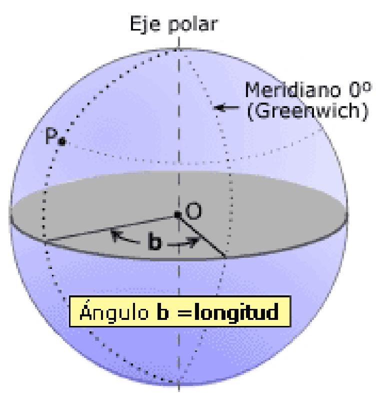


Figura 22.Longuitud de un punto

Mientras que un grado de latitud entre dos puntos de un mismo meridiano corresponde a una distancia casi idéntica (entre 110.57 y 111.70 Km.), no sucede lo mismo con un grado de longitud dado que los paralelos son círculos cuyo radio disminuye al acercarse al polo. En el ecuador, dado que dicho paralelo es también un circulo máximo y por lo tanto una geodésica, un grado de longitud equivale a 111,32 Km. que es el resultado de dividir la circunferencia ecuatorial entre 360º.

Resumiendo: Longitud es la distancia angular desde el meridiano 0º (Greenwich) a un punto dado de la superficie terrestre. Los lugares situados al Oeste del meridiano

0º (Greenwich) tienen longitud Oeste (W) mientras que los situados al Este de aquel meridiano tienen longitud Este (E).”[16]

Se proponen las siguientes preguntas para que lo alumnos discutan:

1. ¿Qué es la latitud y la longitud?
2. ¿En que se miden?
3. ¿Para que sirven?
4. ¿Los meridianos son círculos máximos?
5. ¿Todos los paralelos son círculos máximos? ¿Hay alguno que lo sea?

Síntesis:

Sobre la esfera en que vivimos, nuestro planeta, se han trazado líneas imaginarias que dan cuenta de la posición de un punto sobre la superficie terrestre, con dos magnitudes llamadas latitud y longitud, se puede invitar a los estudiantes a investigar sobre: ¿Cómo se puede determinar la distancia entre dos puntos de la tierra conociendo estas magnitudes?

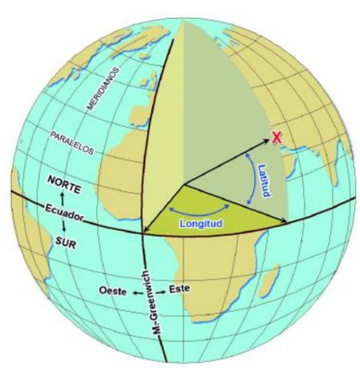


Figura 23.Latitud y longitud de un punto[17]

[16] http://www.manualvuelo.com/NAV/NAV72.html

[17] http://www.atlasdemurcia.com/contenido/Capitulo%20I/0103_Dir/0103_Picture3.jpg

Se pueden plantear un ejemplo que nos permita analizar mejor esta situación, es recomendable variar solo una de las magnitudes a la vez latitud o longitud, (Chile es un buen ejemplo, puesto que por su geográfica varia en latitud pero muy poco en longitud) de esta forma el cálculo de esta distancia se simplifica al producto del radio de la tierra por el ángulo que resulta de la resta de las dos latitudes, eso si, hay que tener la precaución de si la elevación es Norte o Sur y Este u Oeste.

En suma.

1ºComprenden y diferencian los conceptos de latitud y longitud.

2ºEntienden la manera como se determina la posición de un punto sobre la superficie terrestre.

3ºAsocian la geometría esférica a un cuerpo real y trascendental, nuestro planeta.

<u>Caracterización en base a TSD</u>

En esta problemática los alumnos vivirán situaciones de formulación como receptores, al ser instados a leer y responder preguntas. Al momento de plantear los ejemplos específicos se está en presencia de situaciones que pueden ser vistas como de institucionalización.

QUINTA PROBLEMÁTICA.

Nombre: Calculando distancias con coordenadas geográficas.

Introducción de la problemática:

En las actividades pasadas se busco que lo estudiantes conocieran y comprendieran las coordenadas utilizadas para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre, ahora dados dos puntos sobre la superficie de la tierra, y conocidas sus coordenadas, los alumnos deberán calcular la distancia que los separa.

Desarrollo.

Antes de comenzar esta actividad, es importante tener presente el documento entregado en la problemática anterior, pues necesitamos de estos conceptos para poder generar un razonamiento y una aplicación para el cálculo de la distancia entre dos puntos geográficos cualesquiera de la superficie de una esfera.

Para lograr nuestro objetivo analizaremos tres casos posibles.

Caso 1

Cuando ambos puntos tienen la misma longitud. O sea se encuentra sobre el mismo meridiano.

En este caso la distancia entre dichos puntos estará dada por:

$$d_{ab} = \left| lat_a \pm lat_b \right| \times R_t$$

Donde el valor del ángulo de la latitud debe estar medido en radianes y R_t es el radio de la tierra (6370km aprox.). Si ambos puntos están en el mismo hemisferio los ángulos deben restarse y si se encuentran en diferentes hemisferios se deben sumar.

O también:

$$d_{ab} = |lat_a \pm lat_b| \times 111km$$

Pero esta vez el valor del ángulo de la latitud debe estar medido en grados.

Ejemplo 1:

Dados los puntos, sobre la superficie terrestre, A y B cuyas coordenadas geográficas son:

Pa: 45° latitud sur, 40°longuitud Oeste

Pa: 20°latitud sur, 40°longuitud Oeste

Calcular la distancia entre Pa y Pb.

$$\begin{aligned} d_{ab} &= |lat_a - lat_b| \times 111km \\ d_{ab} &= |45° - 20°| \times 111km \\ d_{ab} &= |25°| \times 111km \\ d_{ab} &= 2775km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{ab} &= |lat_a - lat_b| \times R_t \\ d_{ab} &= \left|\frac{\pi}{4} rad - \frac{\pi}{9} rad\right| \times 6370km \\ d_{ab} &= \left|\frac{5\pi}{36} rad\right| \times 6370km \\ d_{ab} &= 2779km \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Dados los puntos, sobre la superficie terrestre, cuyas coordenadas geográficas son:

P1: 30° latitud Sur, 35°longuitud Este

P2: 60°latitud Norte, 35°longuitud Este

Calcular la distancia entre P1 y P2

$$d_{ab} = |lat_a + lat_b| \times 111km$$
$$d_{ab} = |30° + 60°| \times 111km$$
$$d_{ab} = |90°| \times 111km$$
$$d_{ab} = 9990km$$

$$d_{ab} = |lat_a + lat_b| \times R_t$$
$$d_{ab} = \left| \frac{\pi}{6} rad + \frac{\pi}{30} rad \right| \times 6370km$$
$$d_{ab} = \left| \frac{\pi}{2} rad \right| \times 6370km$$
$$d_{ab} = 10005km$$

Caso 2

Cuando ambos puntos tienen la misma latitud. O sea se encuentran sobre el mismo paralelo.

En este caso la distancia entre dichos puntos estará dada por:

$$d_{ab} = |long_a \pm long_b| \times R_{paralelo}$$

Donde el radio del paralelo se puede calcular como:

$$R_{paralelo} = R_t \cos(\alpha)$$

Con α= al ángulo de latitud.

Entonces la expresión nos queda:

$$d_{ab} = |long_a \pm long_b| \times R_t \cos(\alpha)$$

Ejemplo 1:

Dados los puntos, sobre la superficie terrestre, cuyas coordenadas geográficas son:

Pa: 60° latitud sur, 45°longuitud Este

Pb: 60°latitud sur, 15°longuitud Este

Calcular la distancia entre Pa y Pb.

$$d_{ab} = \left| long_a \pm long_b \right| \times R_t \cos(\alpha)$$
$$d_{ab} = \left| 45° - 15° \right| \times R_t \cos(60°)$$
$$d_{ab} = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right| \times R_t \cos(\frac{\pi}{3})$$
$$d_{ab} = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right| \times R_t \cos(\frac{\pi}{3})$$
$$d_{ab} = \left| \frac{\pi}{6} \right| \times 6370_t \cos(\frac{\pi}{3})$$
$$d_{ab} = 1667km$$

Ejemplo 2:

Pa: 30° latitud sur, 40°longuitud Este

Pb: 30°latitud sur, 75°longuitud Oeste

Calcular la distancia entre Pa y Pb

$$d_{ab} = \left| long_a \pm long_b \right| \times R_t \cos(\alpha)$$
$$d_{ab} = \left| 40° + 75° \right| \times R_t \cos(30°)$$
$$d_{ab} = \left| \frac{2\pi}{9} + \frac{5\pi}{12} \right| \times R_t \cos(\frac{\pi}{6})$$
$$d_{ab} = \left| \frac{23\pi}{36} \right| \times R_t \cos(\frac{\pi}{6})$$
$$d_{ab} = \left| \frac{23\pi}{36} \right| \times 6370_t \cos(\frac{\pi}{3})$$
$$d_{ab} = 11072km$$

Caso 3

Cuando ambos puntos tienen distinta latitud y longitud. En este caso los alumnos deben recurrir al teorema del coseno de la trigonometría esférica (fórmulas de Bessell). Por su grado de dificultad, solo se indicará como aplicar la formula y con la ayuda de una calculadora, encontraran los resultados. (El caso 3, solo será incluido, si el docente así lo encuentra pertinente)

Ejemplo:

Calcular la distancia geográfica entre dos puntos A y B cuyas coordenadas geográficas son

A(long; latd) = A(55º 45´ 13´´ E; 55º 48´ 10´´ N)

B(long; latd) = B(48º 50´ 2´´ E; 20º 30´ 40´´ N).

O sea:

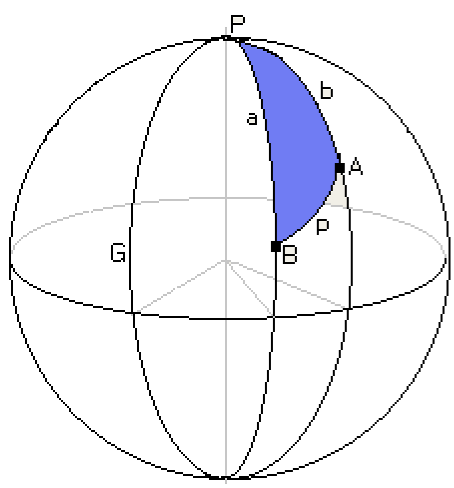


Figura 24.Distancia entre dos puntos[18]

[18] Figura modificada de http://www.arrakis.es/~mcj/notas013.htm

Si consideramos el triángulo esférico PBA, tendremos:

a = PB = 90º - 48º 50´ 2´´ = 41º 9´ 58´´

b = PA = 90º - 55º 45´ 13´´ = 34º 14´ 47´´

P = 55º 48´ 10´´ - 20º 30´ 40´´ = 35º 17´ 30´´

Aplicando el teorema del coseno de la trigonometría esférica (fórmulas de Bessell) resulta

cos(p) = cos(a) cos(b) + sen(a) sen(b) cos(P)

cos(p) = 0,925 de donde p = 22,386º = 22º 23´ 9.6´´

Haciendo una regla de tres, sabiendo que 360° corresponden aproximadamente a 40.000 Km de un circulo máximo (Asumiendo que la tierra es una esfera perfecta)) resulta que ambos puntos están separados por 2487,333 km.

Síntesis:

1° Comprendiendo muy bien los conceptos de latitud y longitud, vistos en la actividad anterior, los alumnos serán capaces de encontrar el resultado de manera sencilla y rápida, a través de una simple diferencia de ángulos.

2° En el caso 3, si bien la dificultad del procedimiento a seguir, para encontrar las distancia entre los dos puntos es un tanto complicada, no es de esperar que los alumnos se compliquen, o generen algún tipo de confusión, en nuestro objetivo general.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática y dado que los estudiantes ya cuentas con ideas claras sobre cómo podrían enfrentar el desafío planteado se puede clasificar esta situación como de formulación. Y como también se les pude que investigan sobre algunos elementos podríamos estar en presencia de situaciones de institucionalización.

SEXTA PROBLEMATICA

Nombre*: Formación de polígonos en una esfera*

Materiales:

1. Esfera de plumavid
2. Regla construida en actividad anterior

Introducción de la problemática:

En geometría clásica, un polígono es una figura geométrica cerrada, formada por segmentos rectos consecutivos y no alineados, llamados lados, los cuales están unidos por puntos llamados vértices. Como ya sabemos, el polígono más simple y con menos lados en esta geometría es el triángulo. En esta actividad se les plantea a los estudiantes el desafío de construir una figura cerrada sobre la esfera que tenga la menor cantidad posible de lados. ¿Cuántos lados son?, de ser así:

- ¿Cuanto vale su perímetro?
- ¿Cómo caracterizar dicho polígono?

La respuesta

Desarrollo.

1° Con los conocimientos ya trabajados sobre el tema, una esfera de plumavid y la regla construida en la actividad anterior, los alumnos se disponen a trazar geodésicas sobre la superficie de la esfera, con lo cual deberán reconocer la existencia análoga de un polígono de dos lados, llamado luna o luneta. Es recomendable para el estudio posterior que lo alumnos dividan la esfera en partes enteras, es decir construir una luna en la esfera que abarque el cuarto de la superficie total de la esfera o la octava parte, el propósito de esta asociación hacia la superficie total de la esfera es que luego comprendan mejor la demostración del teorema de Girard que mostramos mas adelante.

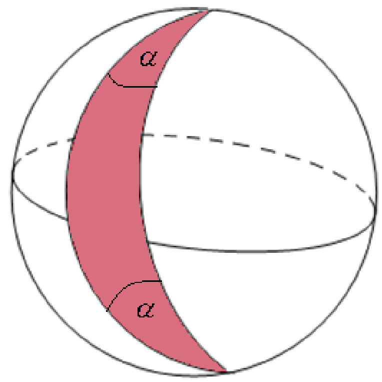


Figura 25.Luneta

La idea es que los estudiantes puedan caracterizar esta nueva figura, en base a elementos básicos de geometría euclidiana, como lo son el perímetro, la clasificación, la regularidad, sus ángulos, etc.

<u>Caracterización geométrica de una luneta</u>

a) La luneta es el área formada por la intersección de dos geodésicas semicírculos máximos.

b) Tiene dos vértices (puntos antipodales), dos lados (arcos de círculos máximos) y dos ángulos iguales (α), como muestra la figura anterior.

c) La luneta queda caracterizada completamente por el ángulo α que forman las geodésicas en su intersección.

- El ángulo α debe puede tomar valores entre 0° y 360°, pero distinto de 180°, puesto en este caso no existen vértices que delimiten un polígono.
- La sumatoria de los ángulos interiores es 2α y puede tomar valores entre $0°$ y $720°$.
- Si $\alpha = 90°$, la luneta se llamará “luneta rectángulo” y cubrirá un cuarto del área esférica.

- Si $\alpha = 180°$, la luneta corresponderá a la semi-área de la esfera.
- Si $\alpha = 360°$, la luneta corresponderá al área total de la esfera.

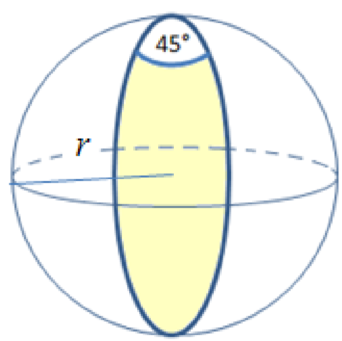
d) Los lados de la luneta son paralelos en los puntos medios de éstas mismas.

2° Cálculo del perímetro

a) Se les pedirá a los alumnos que definan lo que es el perímetro, puesto que en general la idea de perímetro corresponde a la suma de los lados de un polígono y no a la longitud del contorno de una figura cerrada. Es de suma importancia dejar bien definido el concepto, debido a que los estudiantes están tratando con arcos de circunferencias que representan los lados de la luneta.

b) Calcularan el perímetro de las siguientes lunetas, entendiendo que estas longitudes corresponden al semiperimetro de una circunferencia, del mismo radio de la esfera. (Es evidente la correspondencia).

Haciendo referencia a la actividad 4. Los alumnos también calcularan el perímetro terrestre (aprox. 40.000 km.) .



$r = 5\ cm$

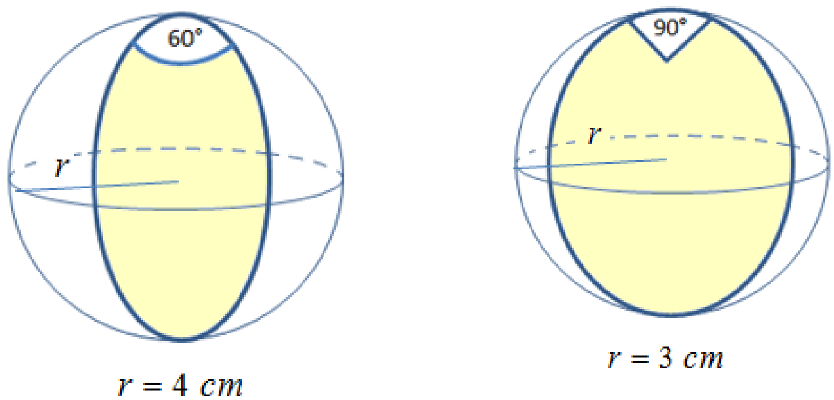


Figura 26.Perimetros de lunetas

<u>Síntesis:</u>

En esta situación se busca los estudiantes analicen la figura de la luna centrándose en que en algunos puntos de esta, las rectas geodésicas que la forman, son perpendiculares y en otros pueden ser paralelas. Además se debe inducir la observación de que los ángulos que forman estas dos geodésicas no son constantes. De esta forma se espera que, emerjan cuestionamientos al Quinto postula de Euclides sobre las paralelas, y los alumnos puedan empezar a visualizar una geometría en la que este postulado no tiene valides.

Respecto al perímetro, los estudiantes comprenden la transversalidad de este concepto, o sea que la definición es aplicable en esta superficie, pero con regularidades en este polígono.

1º El polígono mas simple en una esfera es una luneta, y se forma a partir de la intersección de dos círculos máximos, que en este caso representan a los lados.

2º Los lados de la luneta son paralelos en los puntos medios de éstas mismas.

3º El 5to postulado de Euclides no es aplicable a este tipo de superficie, por lo tanto se esta en presencia de una geometría distinta.

4° Los lados de la luneta son semicircunferencias

5° Todas las lunetas de una esfera, siempre tendrán el mismo perímetro.

6° El perímetro de toda luneta se calcula como $2\pi r$

7° El perímetro de toda luneta es siempre la longitud de un círculo máximo.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática están presentes situaciones de acción, al verse enfrentados a dibujar sobre la esfera, de formulación al usar los elementos de las actividades anteriores y discutir sobre cuál sería la forma correcta de trazar el polígono en cuestión y de validación al tener que asociar los elementos de este a conceptos extraídos de la geometría plana.

Se espera que construyan un teorema.

Teorema: El perímetro de toda luneta es siempre la longitud de círculo máximo.

<u>SEPTIMA PROBLEMÁTICA.</u>

Nombre: Área de una luneta.

<u>Introducción de la problemática:</u>

Para seguir estructurando esta nueva geometría, debemos tomar los elementos secuenciales que forman la geometría clásica, como en la actividad anterior formamos un nuevo tipo de polígono en la geometría esférica, surge la problemática de estudiar un concepto fundamental de los polígonos, o sea, el conceptos de área. Es por eso que en esta actividad, los alumnos deberán calcular dicho concepto en la luneta, para ello, tendrán que utilizar los aprendizajes y contenidos adquiridos de la geometría euclidiana.

<u>Desarrollo de la actividad</u>

Calculo del área

Tomando las lunetas de la actividad anterior, los alumnos se disponen a calcular las áreas respectivas; Es de esperar que realicen una proporción con una regla de tres simple, en base al siguiente razonamiento:

Sabemos de antemano que el área de una esfera es $4\pi r^2$.

Supongamos que el ángulo de la luneta sea de 2π, ¿Qué área de la esfera abarca? …Es obvio que el área completa de la esfera, o sea, $4\pi r^2$.

Y entonces ¿qué área de la esfera abarca un ángulo de 45°, 60° y de 90°?

Entonces:

Ejemplo

$$Si \quad 2\pi \rightarrow 4\pi r^2$$

$$\frac{\pi}{4}(45°) \rightarrow x?$$

$$x=\frac{\pi}{4}\frac{4\pi r^2}{2\pi}=\frac{\pi r^2}{2} \quad \text{con } r=5\ cm \quad \text{y} \quad \pi=3.14$$

$$x=\frac{3.14\ \cdot\ (5\ cm)^2}{2}=39.25\ cm^2$$

Generalización

En esta parte los estudiantes deberán entregar una fórmula para el cálculo del perímetro y para el cálculo del área de cualquier luneta, en cualquier esfera. En otras palabras se les pide el caso general de ambos conceptos.

Síntesis

1° El área de una luneta depende del ángulo que forman los lados de la luneta (α) y el radio de la esfera (r).

$$A(\alpha)=\frac{4\pi r^2}{2\pi}\alpha=2r^2\alpha$$

2° Los resultados obtenidos en esta actividad, nos permitirá abordar el triángulo esférico, cuyo polígono es el más simple de la geometría euclidiana.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática se vivirán situación, de acción y formulación al tener que calcular las áreas en cuestión y a situaciones de validación cuando los estudiantes tengan que generar y defender la generalización de la estrategia usada.

ACTIVIDAD DE SINTESIS GENERAL.

Introducción de la actividad.

A estas alturas ya hemos revisados gran parte de los elementos fundamentales de la geometría esférica, por esto, se pide realizar una actividad de síntesis en base a un cuadro comparativo entre la geometría Plana y la Esférica; De esta forma se puede formalizar y generar una retroalimentación de los contenidos y aprendizajes significativos del individuo.

Desarrollo de la actividad.

Los Alumnos deberán construir un papelografo, que muestre una comparativa de las definiciones de elementos análogos en ambas geometrías.

Cuadro comparativo referencial.

	GEOMETRÍA PLANA	GEOMETRÍA ESFÉRICA
Superficie	Plano	Esfera
Noción de Punto	Punto: Objeto geométrico que no tiene dimensión y que se utiliza para indicar una ubicación.	Punto: Objeto geométrico que no tiene dimensión y que se utiliza para indicar una ubicación.
Distancia mas corta entre dos puntos.	Segmento de Línea Recta que une dos puntos. Para trazar y medir usamos la regla.	Geodésica que une a dos puntos sobre un Circulo máximo Para trazar y medir usamos esta especie de arco, que tienen el mismo radio de la esfera.
Puntos colineales:	Puntos que pertenecen a una misma recta.	Puntos que pertenecen a una misma geodésica.
Angulo	Es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto Es una característica global, o sea, se mantiene constante en	Es la porción de superficie esférica limitada por dos segmentos de círculo máximo con origen en un mismo punto. Es una característica local, propia de

	todo punto Se mide con un trasportados u otro elemento que nos entregue la elevación de una recta respecto a la otra.	un solo punto, y varia con respecto a su distancia del punto en común. Se mide trazando las tangentes, que pasan por el punto en cuestión y extrapolando estas al plano, luego se mide la elevación de la misma manera que en el caso plano.
Polígono	Figura geométrica cerrada, formada por segmentos rectos consecutivos y no alineados, llamados lados. Los puntos de intersección, se denominan Vértices	Figura geométrica cerrada, formada por segmentos Geodesicos consecutivos y no alineados, llamados lados. Los puntos de intersección, se denominan Vértices
Polígono Básico	Triangulo Perímetro: Sumas del largo de sus lados Área: la mitad del producto de la base por la altura	Luneta: Sus vértices deben ser punto antipodales. Perímetro: Igual al perímetro de la circunferencia $2\pi R$, es el mismo para todas las lunetas. Área: Depende del tamaño de la luneta, o sea es proporcional al ángulo formado, en el vértice, entre los dos lados de la luneta.

<u>Síntesis de la actividad</u>

1) El cuadro comparativo no solo crea un repaso o una revisión de los elementos vistos en las problemáticas pasadas, sino que genera un ordenamiento y construcción gradual de la evolución de la geometría esférica.

Análisis en base a TSD

En esta actividad estamos en presencia se situaciones netamente de validación, donde los estudiantes tendrán que una síntesis de lo ya trabajado y construir una especie de papelografo donde tengan que comunicar sus resultados. También al momento de revisar estos papelografo el docente podría generar situaciones de institucionalización.

OCTAVA PROBLEMÁTICA.

Nombre: Redefiniendo los Postulados de Euclides.

Introducción a la problemática:

Tomando en cuenta la actividad de Síntesis, es importante analizar que ocurre con todos estos nuevos conceptos, al momento de plasmarlos en los 5 postulados de Euclides; Pues permitirá generar una nueva habilidad del razonamiento y tratado del espacio tridimensional, en base a los elementos de la geometría plana.

Cabe destacar que la analogía no tiene un carácter formal, solo busca generar un ordenamiento y visión de la geometría esférica.

Desarrollo de la actividad

En primer lugar, a los alumnos se les entregará, los 5 postulados de Euclides, los cuales estructuran racionalmente la geometría plana

En segundo lugar, se les pedirá a los alumnos que redefinan estos postulados en base a los elementos y conceptos de la geometría esférica.

A continuación se muestra una tabla de referencia.

	GEOMETRÍA PLANA	GEOMETRÍA ESFÉRICA
Postulados	1º *“Por dos puntos diferentes sólo se puede trazar una línea recta”.* *2º “Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente”.* *3º “Con un centro y un radio dado sólo se puede trazar una circunferencia”.*	1° “Dados dos puntos, no antipodales, solo podemos trazar una única geodésica”. 2° “Todo segmento geodésico prolongado infinitamente da como resultado un circulo máximo”. 3° Con un centro y un radio se puede trazar una única circunferencia.

	4º “Todos los ángulos rectos son iguales”. *5º“Si una recta corta a otras dos formando a un lado ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de ese lado”* *O* *“Dada una recta y un punto exterior a la misma solamente puede trazarse una única paralela”.*	Ejemplo paralelos. 4° *Todos los ángulos rectos (formados por geodésica) son iguales, solo en el vértice.* *Cuestionamiento del quinto postulado:* ¿Se cumple este Postulado? Si tomamos tres geodésicas, por ejemplo, el ecuador y dos meridianos, estos dos meridianos que atraviesan el ecuador formando ángulos interiores cuya suma es de 180°, por ende según el quinto postulado de Euclides estas no deberían interceptarse, pero si lo hacen en los polos. Por lo tanto, no se cumpliría este postulado. ¿Dado una geodésica y un punto, podemos trazar una geodésica que sea paralela a otra en ese punto? Podemos trazar una curva que sea paralela pero esta no es una geodésica. Es un paralelo.

Síntesis de la actividad

1) La analogía no presenta dificultades de reformulación en los primeros cuatro postulados.

2) Por la dificultad que presenta reformulación del quinto postulado, queda en evidencia la particularidad de éste en la geometría plana y no en la esférica; Lo que demuestra una contradicción en la estructura euclidiana.

3) Los postulados redefinidos, generan un ordenamiento de ideas y conceptos de la geometría esférica.

Caracterización en base a TSD

En esta problemática se puede interpretar que surgen situaciones de acción, formulación y validación. Dado que los alumnos que deben enfrentarse a construir un símil con la geometría plana, discutir entre ellos para definir los postulados en cuestión y a comunicar dichos resultados.

NOVENA PROBLEMÁTICA.

Nombre: Estudio de Triángulos esféricos.

Materiales:

1. Esfera de plumavid.
2. Regla construida en actividad anterior.
3. Compás (para medir ángulos).

Introducción de la problemática:

Como estamos en presencia de una geometría distinta a la que conocemos cotidianamente, resultado de la actividad anterior, debemos seguir estudiando características de los polígonos entre las distintas superficies.

Nos daremos el trabajo de construir un triangulo en nuestra superficie esférica , debido a que es el polígono mas simple y mas estudiado en geometría plana, para que de esta forma podamos seguir estableciendo cuales de las definiciones, axiomas y/o teoremas asociados a los triángulos planos, se cumplen en los triángulos esféricos y cuales no.

En esta problemática primero se les pide a los alumnos que con tres puntos situados sobre la esfera dibujen un triangulo, destacando que los lados de este triangulo deben ser Geodésicas.

Luego de haber construido triángulos esféricos con puntos cualquieras se les pide que construyan triángulos donde mantengan constante dos ángulos y comiencen a variar el tercero, la idea es que comiencen con un ángulo pequeño y lo vallan incrementando, para cada triangulo se les pide a los alumnos que intenten predecir el valor del tercer ángulo. La idea es que al final cuando ya tengan la predicción para todos los triángulos construidos, solo ahora, pueden medir el ángulo desconocido y verificar si su predicción fue correcta o no. Para ello, los alumnos deberán idear alguna forma de medir estos ángulos, la manera correcta de hacerlo es extrapolar, al plano, las tangentes que cortan los vértices y los lados del triangulo, y una vez dibujado el ángulo en una superficie plana medir con el trasportador el respectivo ángulo.

Desarrollo

Luego de la construcción y análisis de un triángulo esférico, los alumnos deberán clasificar triángulos esféricos análogos a los triángulos planos clasificados bajo la estructura métrica como angular, o sea intentaran construir triángulos esféricos equiláteros, isósceles, escalenos, rectángulos, acutángulos y obtusángulos. Recordar que la clasificación de los triángulos en la geometría esférica es de carácter informal, puesto que el objetivo es ver la transición de los elementos, conceptos, teoremas, etc. Desde una geometría a otra.

Clasificación métrica

Cuando se quiere llevar una analogía clasificatoria de la geometría plana hacia la geometría esférica, la parte métrica no presenta un gran problema al momento de hacerlo, puesto que la caracterización plana se ajusta de manera simple, salvo por el cambio de lados por arcos de círculos máximos.

		Triangulo plano	Triangulo esférico
Clasificación Métrica	Equilátero	Sus tres lados tienen la misma medida, y sus tres ángulos miden 60°	Sus tres arcos (geodésicas) tienen la misma medida. Sus tres ángulos son iguales, pero suman mas de 180°
	isósceles	A lo menos dos de sus lados son iguales y si tiene	A lo menos dos de sus arcos son iguales y si tiene

		uno distinto, éste se llama base. Sus ángulos basales son congruentes.	uno distinto, se llama base. Sus ángulos basales son congruentes.
	escaleno	Sus tres lados son de diferente medida, al igual que sus tres ángulos.	Sus tres arcos son de diferente medida, al igual que sus tres ángulos.

Clasificación Angular

Antes de clasificar nuestros triángulos esféricos mediante sus ángulos, tenemos que tener en cuenta dos cosas muy importantes:

1° La suma de los ángulos interiores de un triangulo esférico, es mayor que 180° y menor que 540°. ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$).

2° Los triángulos esféricos también deber respetar la desigualdad triangular (ver apéndice), destacando que los lados corresponden a arcos de círculos máximos (geodésicas) en una esfera de radio r, o sea:

- $r\alpha + r\beta > r\gamma$
- $r\alpha + r\gamma > r\beta$
- $r\beta + r\gamma > r\alpha$

De no cumplirse siempre esto, es imposible que el triangulo sea dibujado.

Tomando en cuenta estas dos primicias, los alumnos tendrán parámetros mucho más específicos, al momento de clasificar.

Para comenzar es importante recordar la clasificación angular de los triángulos planos, pues nos guiara en esta nueva clasificación.

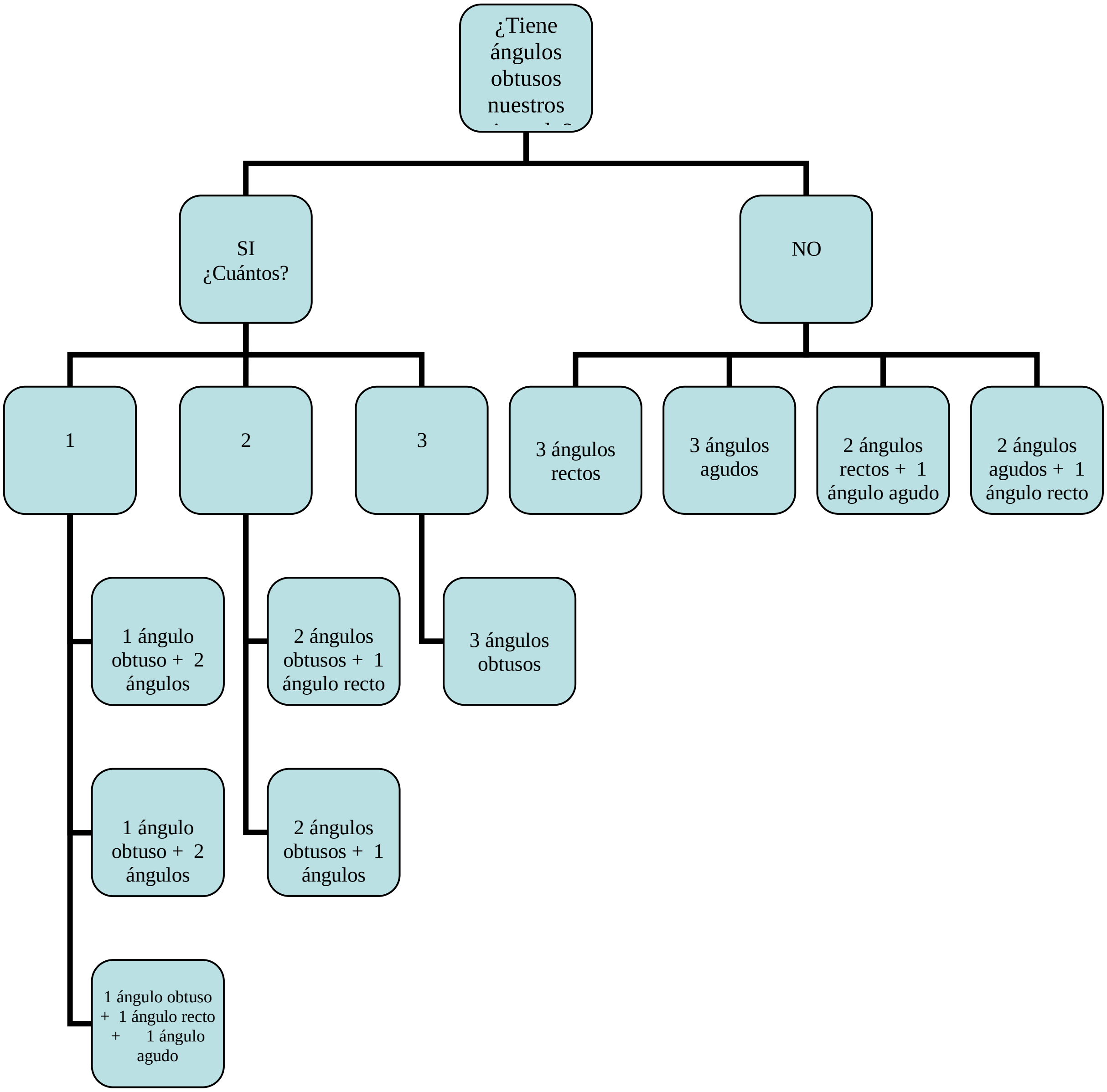
El triángulo acutángulo es aquel que tiene todos sus ángulos agudos

El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto

El triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso

A diferencia de la clasificación métrica, no es posible extrapolar la clasificación plana hacia la angular, debido a que los parámetros no encajan con la primera primicia.

Para comenzar la caracterización, los alumnos deberán basarse en el siguiente cuadro sinóptico:



Ya esclarecidos las combinaciones que pueden o no ocurrir en base a las primicias, los alumnos se disponen a clasificar:

a) <u>Triangulo esférico trirectángulo</u>: Es aquel triangulo esférico que tiene sus tres ángulos rectos. ($\alpha + \beta + \gamma = 270°$).

b) Triangulo esférico agudo: Es aquel triangulo esférico que tiene sus tres ángulos agudos. Los cuales deberán sumar mas de 180° y menos que 270°. ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 270°$).

c) Triangulo esférico triobtusángulo: Es aquel triangulo esférico que tiene sus tres ángulos obtusos. Los cuales deberán sumar mas de 270° y menos de 540° ($270 < \alpha + \beta + \gamma < 540°$).

d) Triangulo esférico biobtuso-agudo: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos obtusos y un ángulo agudo. Los cuales deberán sumar mas de 180° y menos de 450° ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 450°$).

e) Triangulo esférico biobtuso-recto: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos obtusos y un ángulo recto. Los cuales deberán sumar mas de 270° y menos de 450° ($270° < \alpha + \beta + \gamma < 450°$).

f) Triangulo esférico birrectángulo-obtuso: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos rectos y un ángulo obtuso. Los cuales deberán sumar mas de 270° y menos de 360° ($270° < \alpha + \beta + \gamma < 360°$).

g) Triangulo esférico birrectángulo -agudo: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos rectos y un ángulo agudo. Los cuales deberán sumar mas de 180° y menos de 270° ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 270°$).

h) Triangulo esférico biagudo-obtuso: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos agudos y un ángulo obtuso. Los cuales deberán sumar mas de 180° y menos de 360° ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 360°$).

i) Triangulo esférico biagudo-recto: Es aquel triangulo esférico que tiene dos ángulos agudos y un ángulo recto. Los cuales deberán sumar mas de 180° y menos de 270° ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 270°$).

h) Triangulo esférico irregular: Es aquel triangulo esférico que tiene un ángulo agudo, un ángulo recto y un ángulo obtuso ($180° < \alpha + \beta + \gamma < 360°$).

NOTA: Es importante recordar que esta clasificación es en base a las dos primicias anteriores, es decir, si no cumplen con la desigualdad triangular el triangulo esférico no existe.

Síntesis:

Con esto se espera que los estudiantes se percaten que el teorema de la Geometría plana donde la suma de los ángulos interiores de un triángulos es siempre 180° no se cumple cuando se trata de un triangulo esférico, además es necesario destacar que, al parecer, mientras más grande sea la superficie que cubre el triangulo mayor será el exceso, ósea cuanto excede respecto de los 180°. La idea de esta problemática es que surja el cuestionamiento al teorema clásico de la geometría y los alumnos entiendan que a pesar de que este teorema solo es válido para geometrías planas y no se cumple en el caso esférico.

También se les puede solicitar que construyan otros polígonos de más lados.

Además esta situación nos permite definir, clasificar y caracterizar el triangulo esférico, entregando las herramientas suficientes para que el alumno comprenda, entienda, analice y explique con sus propios conocimientos una nueva forma de geometría en la enseñanza media.

En suma

1ºDibujan triángulos esféricos.

2ºManipulan y analizan las variables más importantes de estos, lados y ángulos.

3ºConstatan el no cumplimiento del teorema clásico que da cuenta de la sumas de los ángulos interiores de un triangulo esférico.

4ºObservan un exceso en relación al teorema clásico ya enunciado.

5°Clasifican y caracterizan nuevos tipos de triángulos, en base a la experiencia de la geometría plana.

6°Aprecian la formalidad de la clasificación y comprenden la importancia de la organización de los conocimientos para entregar bases empíricas para el desarrollo de las geometrías.

Análisis en base a TSD

En esta problemática se generaran situaciones de todos los tipos. De acción al tener que enfrentarse a dibujar triángulos sobre la esfera; de formulación, al tener que tomar en cuenta elementos como la definición de geodésica para construir los triángulos y cuando tengan que generar predicciones para el valor del ángulo desconocido; de validación cuando tengan que verificar sus predicciones; y de validación cuando tengan que asociar a estos conceptos de la geometría plana como por ejemplo triángulos equiláteros.

Validan “Los elementos” de Euclides; Pues al formalizar una nueva clasificación de triángulos, están formalizando un conocimiento y un aprendizaje obtenido mediante el análisis de situaciones, tal cual lo hiso Euclides.

DECIMA PROBLEMÁTICA.

Nombre: ¿Como calcular el Área de un Triángulo esférico?

Introducción de la problemática:

En la actividad pasada, nuevamente se generó una contradicción entre la geometría plana y la geometría esférica, basada en uno de los teoremas más destacados y conocidos de un triángulo plano "La suma de los ángulos interiores de un triángulo, suman 180° ". Como ya vimos que un triángulo esférico excede los 180°, es importante encaminar una demostración de este hecho, y es por eso que en esta problemática calcularemos el área de un triángulo esférico en base al cálculo de área de un triángulo plano y a proporciones de áreas, lo que obviamente traerá una nueva contradicción y un alcance de la demostración general.

Para hacer que el alumno entienda y comprenda que la suma de los ángulos excede a 180° en un triángulo esférico, utilizaremos un caso particular de triangulo, el cual estará formado por dos semimeridianos y un arco ecuatorial como muestra la figura a continuación:

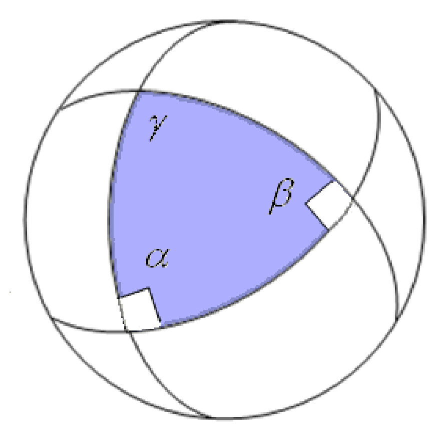


Figura 27.Triángulo bi-rectángulo

Es importante destacar que consideraremos los ángulos alfa y beta como ángulos rectos y el ángulo gama es un ángulo variable, lo que permitirá que los alumnos den ciertos valores a éste.

<u>Desarrollo:</u>

Con esta problemática se les pedirá a los alumnos que calculen el área de este triangulo en base a las competencias adquiridas por la geometría euclidiana, o sea, el semi-producto de la base por la altura, y por otro lado, usando las competencias adquiridas por los cuerpos geométricos, o sea, proporción de la semi-área de la esfera en función del valor de nuestro ángulo variable. Esto les permitirá encontrar una contradicción de resultados, los cuales pondrán de manifiesto la incompatibilidad entre los planos euclidianos y esféricos.

Momento de calcular

a) Área del triángulo a partir de la fórmula: $\dfrac{base \cdot altura}{2}$

Los alumnos deberán deducir a partir de su experiencia previa, el reconocimiento de la base y la altura en este tipo de triangulo, para eso deberán calcular el producto del respectivo ángulo y el radio para obtener el arco de circunferencia, que en este caso corresponden a los respectivos lados y alturas de nuestro triangulo (arcos de circulo máximo).

Por lo tanto:

Base del triangulo: $Arco(\gamma) = \gamma r$

Altura del triangulo: $Arco(\alpha) = Arco(\beta) = \dfrac{\pi}{2} r$

Remplazando estos valores en la formula, el área de nuestro triangulo será:

$$\Rightarrow Area(\gamma)=\frac{(\gamma r)\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot r}{2}$$

$$\Rightarrow Area(\gamma)=\frac{\frac{\gamma\pi r^2}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Area(\gamma)=\frac{\pi}{4}r^2\gamma$$

Para validar esta nueva formula variaremos el ángulo γ en 90°, 180° y 360°.

$$\Rightarrow Area(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}r^2\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2r^2}{8}$$

$$\Rightarrow Area(\pi)=\frac{\pi}{4}r^2\pi=\frac{\pi^2r^2}{4}$$

$$\Rightarrow Area(2\pi)=\frac{\pi}{4}r^2 2\pi=\frac{\pi^2r^2}{2}$$

¿Estará bien calculado?... ¿Con un ángulo γ que porción de la esfera cubre?

b) Área del triángulo a partir de una proporción en base al ángulo variable.

Utilizaremos el ángulo $\gamma=2\pi$ del ejercicio anterior para contrastar los resultados.

¿Qué área de la esfera abarca este ángulo? …Es obvio que el área es la mitad de la esfera; O sea $\frac{4\pi r^2}{2}=2\pi r^2$. Por lo tanto ya tenemos una diferencia de resultados.

Y entonces ¿qué área de la esfera abarca un ángulo γ cualquiera?

$$\begin{aligned} Si \quad & 2\pi \to 2\pi r^2 \\ & \gamma \ \to x? \end{aligned}$$

$$x = \gamma \frac{2\pi r^2}{2\pi} = \gamma r^2$$

Lo que significa que para un ángulo gamma cualquiera, el área en función del ángulo, será:

$$Area(\Delta) = \gamma \cdot r^2$$

Con este razonamiento:

¿Cuánto suman los ángulos interiores del triangulo?

$$\alpha + \beta + \gamma = 90° + 90° + \gamma = 180° + \gamma$$

¿Y en función del área?

$$A(\gamma) = \gamma \cdot r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{A(\gamma)}{r^2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180° + \frac{A(\gamma)}{r^2}$$

<u>Síntesis:</u>

1° La fórmula, $\frac{base \ \cdot \ altura}{2}$, no sirve para un triángulo esférico.

2° Podrán afirmar que la suma de los ángulos de nuestro triangulo, es mayor a 180° y por ende podrán enterarse que el exceso dependerá del área de nuestro triangulo.

3° En base a la clasificación de triángulos esféricos podemos inferir y deducir lo siguiente:

- El área un triangulo esférico tri-acutángulo cubre menos de $\frac{1}{8}$ de la superficie de la esfera.
- El área un triangulo esférico tri-rectángulo cubre $\frac{1}{8}$ de la superficie de la esfera.
- El área un triangulo esférico tri-obtusángulo cubre más de $\frac{1}{8}$ la superficie de la esfera.
- A medida que aumenta el área de un triangulo esférico, aumenta también el valor de sus ángulos interiores. A diferencia de lo que ocurre en un triangulo plano.

4° La formula del área del triangulo en función del ángulo γ es: $2\pi r^2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A\Delta}{R^2}$$

Por lo cual se podrá dar paso a una demostración en forma general en base a una actividad enfocada netamente en áreas.

<u>Caracterización en base a TSD.</u>

En esta problemática se presentaran situaciones de acción cuando los alumnos tengan que enfrentarse a calcular directamente las áreas, de formulación cuando tomando encuentra elementos de la curvatura tengan que elaborar la segunda estrategia para calcular las citadas areas y de validación cuando contrastes los resultado. También se puede aprovechar la actividad para aclarar cuál es la estrategia correcta y de hacerlo se estará en presencia de situaciones de institucionalización.

ONCEAVA PROBLEMÁTICA

Nombre: El Área de un Triángulo esférico y el teorema de Girard.

Introducción de la problemática:

En la problemática anterior, si bien calculamos el área de un triángulo esférico para encaminar una demostración del exceso, tenemos que asumir que solo fue en un caso particular, es por eso que haremos el mismo análisis para un triángulo esférico cualquiera, y así encontrar una demostración general del exceso.

De esta forma estaremos en condiciones de reconocer y asimilar las características y diferencias entre las distintas geometrías.

Partiremos construyendo un triángulo esférico cualquiera como muestra la figura a continuación:

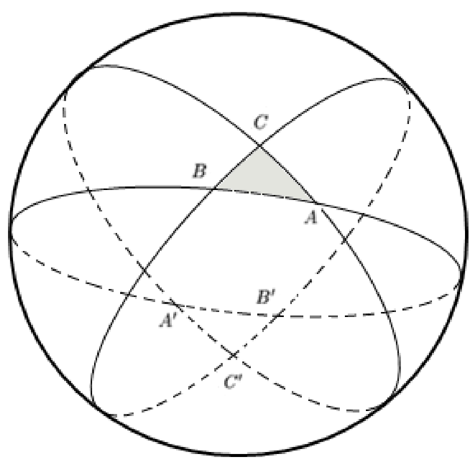


Figura 28. Triangulo esférico

Desarrollo:

En la siguiente figura tenemos dos lunas producidas por la intersección de dos círculos máximos en los puntos antipodales A y A', en una esfera de radio R. El ángulo esférico en el vértice A lo llamaremos α. La superficie achurada será el área de las lunas asociadas a dicho ángulo. Notemos que, como se ve en la figura, los tres círculos máximos forman dos triángulos congruentes, el triángulo ABC y el triángulo A'B'C'.

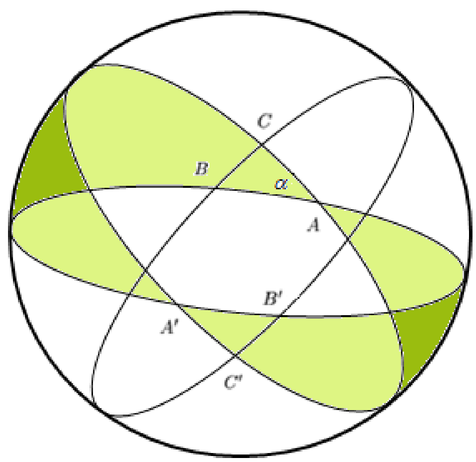


FIGURA 29. Ángulos y lunas

Del mismo modo en los vértices B y B'

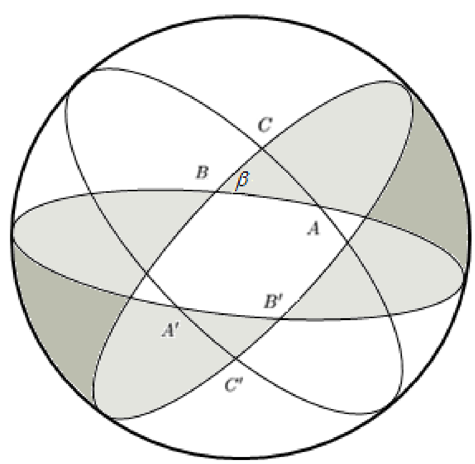


FIGURA 30. Ángulos y lunas 2

Y por último en los vértices C y C'

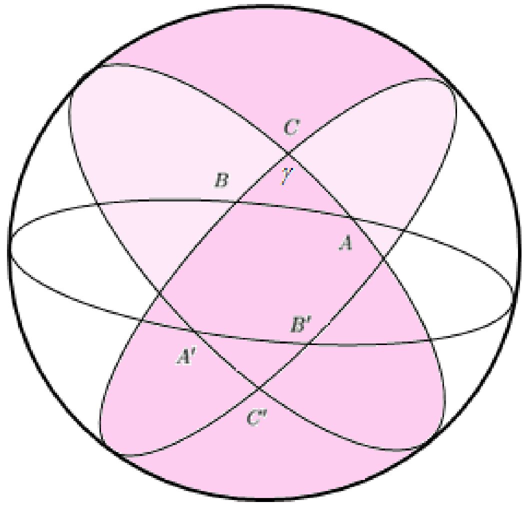


FIGURA 31. Ángulos y lunas 3

Al superponer las áreas asociadas a cada ángulo nos encontramos con un panorama muy particular

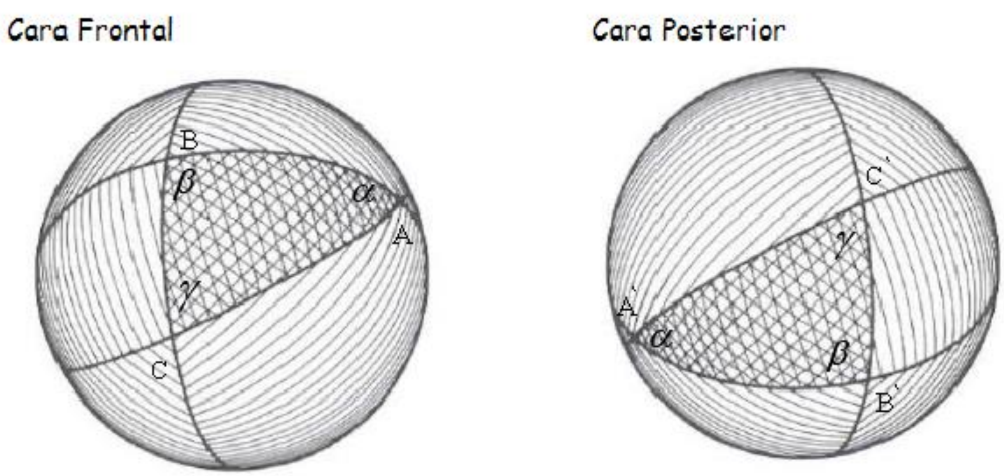


FIGURA 32. Achurado de lunas

Es evidente que el área cubierta por las seis lunas correspondientes a los ángulos interiores, excede al área completa de la esfera en cuatro áreas de nuestro triangulo. Denotando por A_α, B_β y C_γ el área de las lunas correspondientes a los ángulos α, β y γ, se tiene:

$$2A_\alpha + 2A_\beta + 2A_\gamma = A_{ESFERA} + Exceso$$

$$(4 \cdot \alpha \cdot r^2) + (4 \cdot \beta \cdot r^2) + (4 \cdot \gamma \cdot r^2) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A\Delta$$

Dividiendo todo por 4, resulta:

$$\alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 = \pi R^2 + A\Delta$$

Restando en ambos lados de la igualdad por πR^2, obtendremos la fórmula para calcular el área de cualquier triangulo esférico, o sea:

$$A\Delta = \alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 - \pi R^2$$

Si nuevamente re-organizamos la igualdad

$$(4 \cdot \alpha \cdot r^2) + (4 \cdot \beta \cdot r^2) + (4 \cdot \gamma \cdot r^2) = 4 \cdot \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A\Delta$$

Y dividiendo todo por $4R^2$, nos encontramos con la misma conclusión de la actividad anterior

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A\Delta}{R^2}$$

Esta expresión, se conoce como el ***teorema de Girard***

La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es igual a π *más el área del triángulo dividida por el cuadrado del radio de la esfera.*

Albert Girard:(Saint-Mihiel, 1590-La Haya, 1633) Matemático francés. Fue el introductor de numerosos símbolos matemáticos, demostró la existencia de raíces imaginarias y calculó el área de figuras poligonales trazadas sobre una superficie esférica. Y a partir de estos cálculos propuso el teorema que se trabaja.

Ahora si bien la expresión encontrada da cuenta que el exceso de la suma de los ángulos de triangulo esférico depende del área de dicho triangulo, si desarrollamos un poco dicho exceso y lo expresamos en función no del área del triangulo sino que respecto de la porción de la superficie de la esfera que ocupa, entonces la expresión queda de la siguiente forma:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+4\pi\cdot Fraccion\ de\ Superficie\ cubierta$$

Esta expresión nos permite visualizar que el exceso es directamente proporcional a la porción de superficie de la esfera cubierta por el triangulo esférico.

Si graficamos esta situación y la asociamos a los límites de la suma de los ángulos de un triangulo esférico desarrollado en problemáticas anteriores nos queda el siguiente grafico:

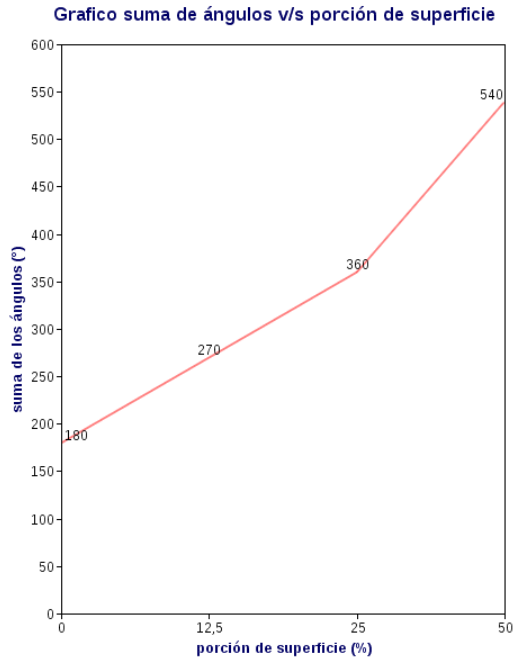


FIGURA 32. Grafico suma de ángulos v/s porción de superficie

SINTESIS DE LA ACTIVIDAD

1° Reconocer y asimilar las diferencias entre una geometría y otra

2° Dar cuenta de un teorema establecido formalmente en la geometría esférica y tener las habilidades para poder demostrarlo.

3° Reconocer la importancia de Albert Girard en el formalismo de la geometría esférica.

<u>Caracterización en base a TSD.</u>

En esta problemática se presentaran situaciones de acción al momento de de enfrentarse al trazado y achurado de la figura en cuestión, y a situaciones de formulación al ir construyendo la ecuación que nos permitirá determinar el valor de dicha área achurada. También para finalizar el docente puede realizar una reseña sobre el origen del teorema de Girard, de hacerlo se generara una situación de institucionalización.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES.

De acuerdo al problema desarrollado y los objetivos planteados, tanto generales como específicos, presentados en este seminario de titulo se concluye lo siguiente.

El presente trabajo aborda los fundamentos que dan origen a las geometrías no euclidianas evitando el uso de matemáticas de nivel superior (geometría diferencial), con esto cumplimos nuestro objetivo de poder desarrollar este contenido acorde al nivel que deberían tener los alumnos de enseñanza media.

El estudio Histórico epistemológico fue un aporte a la comprensión de los aspectos fundantes de la geometría y de su evolución histórica, entregando datos interesantes y relevantes de la manera que se ha ido construyendo la visión actual de la geometría, pero sobre todo nos sirvió como base para elección de las problemáticas a estudiar.

Se logro construir una secuencia articulada de problemáticas que permiten la elaboración de una futura de una propuesta didáctica un la idea de llevar el tema a la enseñanza media. Por ende, la secuencia de problemáticas elaborada nos permite trasportar nuestro tema de geometría Esférica al aula de la enseñanza media.

Además, tomando en cuenta la forma en que se plantean las problemáticas, donde se evita al máximo la entrega directa de los contenidos, es más se insta a re articular los conceptos previos provenientes de la geometría plana para asociarlo a este nuevo modelo, se logra que los alumnos puedan manipular elementos concretos, y también socialicen y discutan al momento de enfrentar las situaciones de aprendizaje. Encontramos que por esto la secuencia de problemáticas va acorde al modelo constructivista.

Respecto al teorema trabajado la más directa conclusión es que efectivamente el exceso corresponde al área del triángulo esférico dividido por R^2, tal como lo plantea Girard. De su demostración se logro construir un método de demostración bastante didáctica y de fácil transporte al aula permitiendo someter a los alumnos a una situación concreta que le permitan manipular con sus propias manos el cuerpo geométrico ligado a la demostración (esfera) y así, reinventar el teorema trabajado.

El contenido de este seminario de titulo genera aportes importantes en ámbitos relacionados con el desarrollo del pensamiento matemático, específicamente con la geometría. Entregándoles a los profesores una base solida de conocimientos relevantes acerca de la geometría, es nuestra apreciación personal como profesores el que el presente trabajo vino a remediar carencias de conocimientos que teníamos acerca del tema.

Tras considerar los distintos tipos de situaciones de la TDS, nos permitió asociar a cada problemática planteada una, o más, tipos de situaciones. Además la variedad de problemáticas muestran un desarrollo de actividades acorde al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, avanzando desde actividades de visualización hasta el rigor de análisis de sistemas deductivos.

También debemos mencionar en nuestra calidad de profesores implementamos parte de las actividades propuestas en el presente seminario, despertando, a nuestro juicio, el interés de los alumnos por el tema planteado.

BIBLIOGRAFÍA.

- Antoni Vila Mitjan (1994). *Elementos de Trigonometría esférica*, EDICIONES UPC
- Ausubel (1978). *Educational psychology*: a cognitive view.
- Bruner (1961). *The act of Discovery*: Harvard Educational Review. Chile, Santiago.
- Coxeter (1971). *Fundamentos de la geometría*, Limusa.
- Frank Ayres,(1991). *Cálculo diferencial e Integral,* SCHAUM.
- Gallardo Jesús (2004). *El análisis didáctico como metodología de la investigación en didáctica matemática.* Málaga
- Godino francisco Ruíz (2002). *Geometría y su didáctica para maestros.* Barcelona
- *Garcia CruzJuan (2000). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general,* Barcelona
- Kepler (2001). *Trigonometría esférica*, Ikastegia
- MINEDUC (2001). *Programa de Estudio, Cuarto Año Medio, Sector Matemáticas*. ISBN 956-7933-86-3. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- MINEDUC (2009). Unidad de Currículum. Mapas de Progreso del Aprendizaje: geometría, Sector Matemáticas. ISBN: 978-956-292-224-1. Chile, Santiago.
- Penrose Roger (2006).El camino a la realidad : una guía completa de las leyes del universo. Barcelona
- Piaget (1952). *The origins of intelligence in children*, New York.
- Piaget (1978). *Investigaciones sobre la contradicción*.
- Pierce (1978). *Los tres tipos de Razonamiento*.
- Polking John. C. (1996) The Geometry of the Sphere. Rice University

- Rico Luis (1999). *Didáctica de las matemáticas e investigación*, modesto sierra.
- Santalo Luis A (1961). *Geometrías No Euclidianas*, EUDEBA
- Vigotsky (1979). *El desarrollo de procesos psicológicos superiores*, Barcelona.
- José Mencía (2002) Nociones de trigonometría esférica, Universidad del país Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

BIBLIOGRAFIA EN LINEA

- La curvatura de Riemann a través de la historia
  http://albertofest.matcuer.unam.mx/Misc44/Naveira_A_M.pdf (Agosto, 2010)

- Biografía Nikolai Ivanovich Lobachevsky
  http://www.lobachevsky.com/biografia.htm (Septiembre, 2010)

- Biografía Janós Bolyai
  http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Bolyai3.asp(Septiembre, 2010)

- Críticas al Quinto Postulado y sus consecuencias.
  http://132.248.17.238/geometria/t_3_001/t_3_001_1m_m.html (Agosto, 2010)

- La Geometría no euclidiana y la Geometría de n dimensiones
  http://elblogdejuanjo.wordpress.com/2007/06/11/la-geometria-no-euclidiana-y-la-geometria-de-n-dimensiones/ (Agosto, 2010).

- Las geometrías no euclidianas
  http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/41/htm/sec_20.html (Agosto, 2010)

- Introducción a la Geometría no Euclidiana
  http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/unidad4/unidad41.htm (Agosto, 2010)

- Geometría Euclidiana y Geometrías no Euclidianas
  http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Geometria%20Euclidiana%20y%20Geometrias%20no%20Euclidianas.pdf (Agosto, 2010)

- Invitación a las geometrías no Euclidianas.

http://www.ejournal.unam.mx/cns/no83/CNS000008313.pdf (Septiembre, 2010)

- Relaciones de incidencia en la esfera
  http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos2.html (Junio, 2010)

- Área de la esfera
  http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos3.html (Junio, 2010)

- Área de un triangulo esférico-Teorema de Girard
  http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/gos4.html (Junio, 2010)

- Círculo máximo
  http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/sphere.html#basic (Junio, 2010)

- Criterios de Congruencia
  www.educarchile.cl/criteriosdecongruencia (Junio, 2010)

- Versión Moderna "Elementos de Euclides"
  "http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm#Libro%20I (Julio, 2010)

- Calculo de distancias geográficas
  http://www.arrakis.es/~mcj/notas013.htm (Diciembre 2011)

APENDICE I

LA INTERSECCIÓN DE UN PLANO Y UNA ESFERA ES UN CIRCULO.

Demostración:

1. Trazamos una línea perpendicular desde el centro de la esfera O , hasta un punto O' del plano.

2. Uniendo O' con dos puntos de la intersección, A y B. Los segmentos $\overline{O'A}$ y $\overline{O'B}$ están en el plano, y por lo tanto el segmento $\overline{OO'}$ es perpendicular a $\overline{O'A}$ y $\overline{O'B}$.

En resumen:

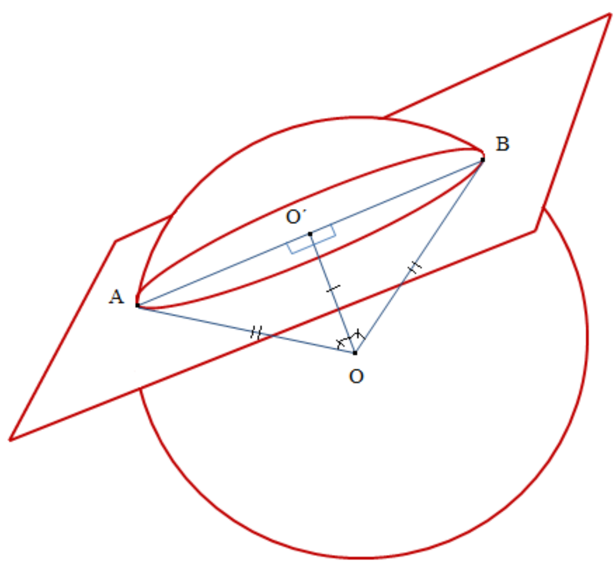


Fig. Plano cortando a una esfera.

3. Ahora considera los triángulos $\Delta\, AOO'$ y $\Delta\, BOO'$

Tenemos:

a) $\overline{OO'}$ Lado común.

b) $\overline{OA} = \overline{OB}$, Radios de la esfera.

c) $\angle AOO' = \angle BOO'$, La perpendicular de un triángulo isósceles , es también bisectriz del ángulo $\angle AOB$

4. Aplicando el criterio de congruencia LAL:

$\Rightarrow \Delta\, AOO'$ Es congruente con el $\Delta\, BOO'$

$\Rightarrow\ \overline{AO'} = \overline{BO'}$

5. Como todos A y B son puntos de intersección arbitrarios, se sigue que todos los puntos de la intersección están a la misma distancia de O'

6. Por lo tanto esta intersección es un círculo con centro O'

APENDICE II

RELACIONES DE INCIDENCIA SOBRE UNA ESFERA.

Suponga que tenemos 2 puntos distintos A y B sobre una esfera. Junto con C, que es el centro de la esfera, tenemos 3 puntos en el espacio y hay dos posibilidades. Primero supone que A y B no son puntos antipodales. Entonces A, B y C no están en la misma línea en el espacio y consecuentemente determinan un plano único. Este plano pasa por C, el centro de la esfera, y por lo tanto, la intersección de un plano con la esfera es un gran círculo que contiene a A y B. Así A y B determinan un único gran círculo.
Si A y B son puntos antipodales, entonces A, B y C están en la misma línea. Cualquier plano que contiene esta línea determina un gran círculo que debe contener a A y B. Así hay muchísimos círculos grandes que contienen a A y B si ellos son antipodales.
Para resumir, las relaciones de incidencia para la esfera son:

- Si A y B son 2 puntos que no son antipodales, entonces hay un único círculo que contiene ambos puntos. Si A y B son antipodales, entonces hay muchísimos círculos grandes que contienen los puntos.

- Supongamos que tenemos 2 círculos grandes. Cada uno de ellos es la intersección de la esfera con un plano a través del centro. Estos planos deben intersectar en una línea en el espacio, la cual por supuesto intersecta a la esfera in 2 puntos antipodales.

Por lo tanto: “2 círculos grandes distintivos se encuentran exactamente en 2 puntos antipodales”.

.

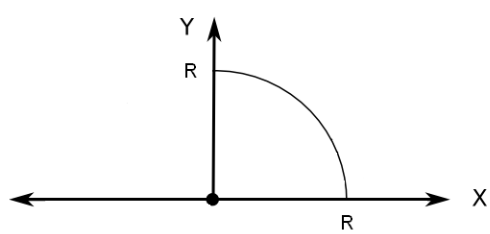
APENDICE III

CÁLCULO DEL AREA DE UNA ESFERA.

Para esto usaremos el método de cálculo de áreas a través de sólidos de revolución el cual dice: Un sólido de revolución es una región del espacio generada por la rotación de una región plana en torno a una recta (eje de rotación).

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad 1$$

En el caso de la esfera usaremos un segmento de circunferencia (un cuarto) y lo haremos rotar en torno al eje y de manera que genera media esfera.



Recordemos que la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La cual podemos expresar de la siguiente manera:

$$y^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Es decir, y es función de x. Más precisamente.

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Derivando con respecto de x,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2)x$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Reemplazando en 1:

$$A = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx$$

Como esto nos da la mitad del área de la esfera entonces multiplicamos todo por 2.

$$A = 2\left[2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx \right]$$

$$A = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$$

$$A = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx$$

$$A = 4\pi \int_0^R \sqrt{\frac{R^2 \left(R^2 - x^2 \right)}{R^2 - x^2}} dx$$

$$A = 4\pi \int_0^R R dx$$

$$A = 4\pi R \int_0^R dx$$

$$A = 4\pi R^2$$

APENDICE IV

GEODÉSICAS Y GRANDES CIRCULOS.

Las geodésicas son soluciones diferenciables de la ecuación variacional de Euler que se deriva de la fórmula integral que da la longitud de una curva.

Todo camino más corto es una geodésica, pero en general una geodésica no es el camino más corto globalmente. Por ejemplo, para ir de un punto a otro sobre una geodésica debe escogerse, de entre los dos arcos definidos por ellos, aquel que no pasa por las antípodas de los puntos.

Lema: la ecuación de un gran círculo en la esfera está dada por:

$\cot\varphi = a\ \sin(\theta + c),$

A excepción de los grandes círculos verticales ("círculos de longitud")

Prueba. Un gran círculo no vertical es la intersección de la esfera con un plano $z = a_1 x + a_2 y$. En coordenadas esféricas.

$$\cos\varphi = a_1 \sin\varphi\cos\theta + a_2 \sin\varphi\sin\theta.$$
$$\cot\varphi = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta.$$

El vector (a_1, a_2) en coordenadas polares,

$$(a_1, a_2) = a(\cos c, \sin c),$$

Luego,

$$\cot\varphi = a(\sin c\cos\theta + \cos c\sin\theta) = a\ \sin(\theta + c). \qquad (1)$$

Teorema: Geodésicas sobre una esfera son partes de grandes círculos.

Prueba. Un arco no vertical de geodésica; es decir, no pasando por los polos, puede ser escrito como $u = f(\theta)$, con u definida como $\cot\varphi$. Del cálculo sabemos que la longitud, en coordenadas esféricas, viene dada por

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi \; d\theta^2 \qquad (2)$$

Donde $u = \cot\varphi$,

$$du = -\csc^2\varphi \; d\varphi = -\left(1+u^2\right)d\varphi,$$

$$d\varphi^2 = \left(\frac{du}{1+u^2}\right)^2 = \left(\frac{u'}{1+u^2}\right)^2 d\theta^2,$$

$$\sin^2\varphi \; d\theta^2 = \frac{d\theta^2}{\csc^2\varphi} = \frac{d\theta^2}{1+u^2},$$

Es decir, por (1)

$$d\varphi^2 = \left(\left(\frac{u'}{1+u^2}\right)^2 + \frac{1}{1+u^2}\right)d\theta^2$$

$$ds = \left(1+u^2\right)^{-1}\left(u'^2 + 1 + u^2\right)^{1/2} d\theta.$$

En consecuencia, la longitud L está dada por la integral:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(1+u^2\right)^{-1}\left(u'^2 + 1 + u^2\right)^{1/2} d\theta.$$

El cálculo variacional nos enseña que el integrando F satisface la ecuación

$$F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} = C, \qquad \text{O}$$

$$\left(1+u^2\right)^{-1}\left(u'^2+1+u^2\right)^{1/2} - u'\left(1+u^2\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}\left(u'^2+1+u^2\right)^{-1/2}\cdot 2u' = C$$

Multiplicando ambos lados por $\left(1+u^2\right)\left(u'^2+1+u^2\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}
&u'^2+1+u^2-u'^2 = C\left(1+u^2\right)\left(u'^2+1+u^2\right)^{1/2},\\
&1 = C\left(u'^2+1+u^2\right)^{1/2}\\
&u' = \pm\sqrt{a^2-u^2}\\
&\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \pm d\theta,\\
&\sin^{-1}\frac{u}{a} = \pm(\theta+c),\\
&u = a\ \sin(\theta+c),
\end{aligned}$$

En que la constante "a" incluye el signo. Por lo tanto, cada geodésica no vertical es un arco de un gran círculo. Los pasos son reversibles, por lo que cada círculo es una geodésica.

En el caso que la geodésica pase por los polos, es decir, sea vertical, una rotación puede hacerla coincidir con el ecuador. Entonces, es arco de un gran círculo.

APENDICE V

DESIGUALDAD TRIANGULAR ESFERICA

TEOREMA: La longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

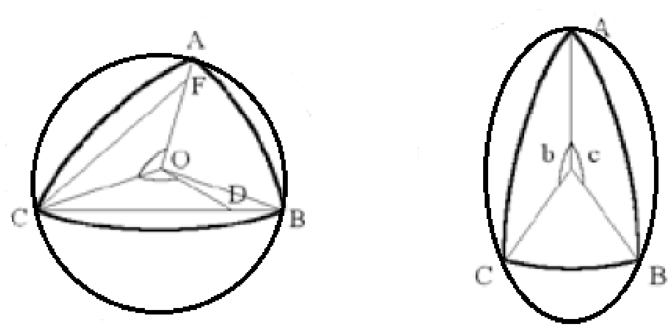


Figura 1: Desigualdad Triangular

DEMOSTRACION:

La primera desigualdad de este enunciado es la *desigualdad triangular* en la geometría de la esfera. Se puede concluir de la desigualdad triangular de la geometría Euclidia, del siguiente modo. Si *a* > *b* y *a* > *c*, sea *D* el punto del segmento que une *B* y *C* de manera que $\angle COD = \angle COF$, y sea *F* el punto del segmento que une *O* y *A* tal que la distancia $\overline{OF}$ de *O* a *F* sea igual a la de *O* a *D* (figura 1). Consecuentemente $\overline{CD} = \overline{CF}$. Restando esta igualdad de la desigualdad $\overline{BC} < \overline{BF} + \overline{CF}$, se obtiene $\overline{BD} < \overline{BF}$. En los triángulos de vértices *O*, *B* y *D*, y de vértices *O*, *B* y *F*, que tienen dos lados de la misma longitud, el teorema del coseno implica que $\angle BOD < \angle BOF$. De esta ultima desigualdad y de $\angle COD = \angle COF$, se sigue

$$\angle BOC < \angle COF + \angle BOF = \angle AOC + \angle AOB$$