

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**



**NUEVAS TÉCNICAS DE ILUMINACIÓN PARA LA MANIPULACIÓN DE  
MICROPARTÍCULAS MEDIANTE PINZAS ÓPTICAS**

**VIVIANA ANDREA CLAVERÍA PIZARRO**

**Profesor Guía: Albert Ferrando Cogollos  
Catedrático de la Universitat de València**

**Proyecto de Tesis para optar al grado de  
Ingeniero Físico**

**Santiago – Chile**

**2013**

## **Dedicatoria**

Dedico este trabajo de Tesis a toda mi Familia. A ellos, quienes me han cultivado desde pequeña y me han hecho la mujer que soy.

Dedico también esta realización a mi hija, quien sin estar aún en este mundo, se ha convertido en mi fuente de inspiración, esfuerzo y dedicación.

Finalmente, dedico este trabajo a la naturaleza, que por sí sola, me impulsa a avanzar por esta misteriosa existencia.

## **Agradecimientos**

Agradezco profundamente el apoyo del Profesor Albert Ferrando. Gracias a su compromiso y motivación, este trabajo de Titulación ha sido posible.

También el apoyo, cariño, amor, consejos, abrazos y palabras de mis Padres durante todo mi proceso formativo.

Agradezco, también, a mi hermanitas que con su ingenuidad, transparencia y travesuras, alegran mi insaciable andar.

Finalmente, agradezco todo el amor recibido de Gonzalo, quien con sus gestos y palabras de aliento, me ha motivado a finalizar etapas y seguir avanzando.

# Contents

<b>1</b>	<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
2.1	Un poco de historia . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>8</b>
3.1	Conceptos preliminares . . . . .	8
3.2	Propagación de Fresnel . . . . .	10
3.3	Efecto de un elemento difractivo delgado en la propagación . . . .	12
3.4	Elemento difractivo delgado con simetría rotacional discreta . . . .	15
3.5	Propagación de un vórtice óptico después de un quiebre de simetría	19
3.6	Ecuación de las trayectorias de las singularidades de fase . . . . .	20
3.7	Ecuación de movimiento para las singularidades de fase en el espacio libre después del rompimiento de la simetría rotacional . . . .	28
3.8	Dinámica de las singularidades de fase en el espacio libre luego del rompimiento de la simetría rotacional . . . . .	34
3.8.1	Fuerza armónica . . . . .	34
3.8.2	Torque . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Conclusión</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

# 1 Resumen

En este trabajo de Tesis, se presenta analíticamente el control de las singularidades de fase del campo electromagnético, denominados vórtices ópticos, a través de la presencia de un objeto difractivo de simetría rotacional discreta  $C_N$  con  $N = 4$  situado entre dos medios dieléctricos homogéneos con índice de refracción definido.

## 2 Introducción

El modelado de dispositivos basados en estructuras espaciales que poseen simetría discreta, tienen un gran potencial en aplicaciones donde el control de fase de la luz es relevante. Un ejemplo de dichas aplicaciones, es el control de fase de la luz en dispositivos de manipulación de objetos micrométricos llamados Pinzas Ópticas. Las Pinzas Ópticas, son una tecnología ampliamente utilizada en biomedicina, en particular en biotecnología, para la medición de pequeñas fuerzas, alteración y micromanipulación de estructuras bacterianas, células vivas, organelos, partículas metálicas, etc. Si ahondamos un poco más en el tema, nos percatamos que entre las tecnologías más relevantes en el desarrollo de pinzas ópticas, destacan aquellas basadas en el control del momento angular orbital de la luz en las que el control de fase óptica es vital. Luego, el control del momento angular orbital de la luz, es clave para estos mecanismos de micromanipulación. Este Proyecto de Tesis consiste, primero, en plantear un nuevo mecanismo de control de las singularidades de fase del campo electromagnético denominados vórtices ópticos (cuya estructura es la portadora del momento angular orbital en la luz), basado en la utilización de elementos difractivos con simetría rotacional discreta. En segundo lugar, se utilizará dicho *know how* para el modelado y simulación de estructuras multi-vórtice sintonizables mediante los mencionados elementos difractivos discretos con el objeto de establecer un esquema de control de iluminación de sistemas de manipulación de micropartículas mediante pinzas ópticas que pueda resultar alternativo o complementario de los existentes.

### 2.1 Un poco de historia

*En una destacada carrera en los Laboratorios Bell, Arthur Ashkin descubrió cómo utilizar rayos láser para manipular objetos pequeños.*

La primera observación de una Guía Óptica fue hecha en el año 1967 por el científico estadounidense Arthur Ashkin. Ashkin descubre que sólo utilizando rayos láser es posible empujar pequeñas esferas micrométricas suspendidas en agua hacia el interior de éste favoreciendo su confinamiento. En efecto, al dirigir un rayo láser propagándose horizontalmente sobre la muestra líquida, las microsferas se alinean en dirección al eje axial del rayo. Para partículas cuyo índice de refracción es mayor que el medio en el que se encuentran sumergidas, el gradiente de intensidad del láser las dirige al centro del eje axial, mientras que la presión de radiación (escátering) conduce a las partículas en la dirección de propagación del rayo. Luego de este descubrimiento, Ashkin adhiere un segundo rayo láser sobre las partículas en la misma dirección, pero en sentido opuesto. El resultado fue que ambos rayos sostuvieron las pequeñas esferas en un lugar fijo dando paso a la creación de la primera Trampa Óptica<sup>1</sup>. Este tipo de Trampa ha sido relevante en Biofotónica dentro de experimentos que involucran fluidos y en particular en el estudio de Estiramiento Celular <sup>23</sup> y Análisis de Raman <sup>4</sup> Este tipo de técnica permite manipular un volumen espacial relativamente grande, dando paso a la manipulación de células de gran tamaño y también permite la manipulación de una gran variedad de material biológico por su baja densidad de potencia.

El siguiente desafío de Ashkin fue el confinamiento de átomos. Sin embargo, existían dificultades para mantener átomos lo suficientemente fríos y sostenerlos por largo tiempo. En el año 1975, los científicos Theodor Hänsch y Arthur

---

<sup>1</sup>A. Ashkin, "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure," *Phys. Rev. Lett.* 244, 156–159 1970.

<sup>2</sup>J. Guck, R. Ananthakrishnan, H. Mahmood, T. J. Moon, C. C. Cunningham, and J. Käs, "The optical stretcher: a novel laser tool to micromanipulate cells," *Biophys. J.* 812, 767–784 2001.

<sup>3</sup>P. B. Bareil, Y. Sheng, and A. Chiou, "Local scattering stress distribution on surface of a spherical cell in optical stretcher," *Opt. Express* 1425, 12503–12509 2006.

<sup>4</sup>P. R. T. Jess, V. Garcés-Chávez, D. Smith, M. Mazilu, L. Paterson, A. Riches, C. S. Herrington, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Dual beam fibre trap for Raman microscopy of single cells," *Opt. Express* 1412, 5779–5791 2006.

Schawlow dieron la clave para lograr el desafío que Ashkin se había propuesto: los átomos podrían ser enfriados utilizando el efecto Doppler.

Con estas nuevas ideas, Ashkin y Steven Chu, junto a otros colaboradores, comenzaron a experimentar en el año 1984 logrando, finalmente, atrapar un grupo de 500 átomos enfriados a 300 microkelvin por un período de varios segundos. Ashkin y Chu continúan con sus experimentos utilizando un sólo rayo láser focalizado a través de un lente para confinar partículas y atrapar átomos (lo que popularmente se conoce como “Pinza Óptica”)<sup>5</sup>. El grupo publicó sus resultados en la *Physical Review Letter* en el año 1986, siendo el primer confinamiento de átomos en 3D estables alrededor del mundo.

Gracias a estos trabajos, Steven Chu *et. al.* obtiene en el año 1997 el premio Nóbel de Física por su trabajo en el enfriamiento y atrapado de átomos usando luz láser. Mientras tanto, Ashkin focalizó su trabajo en el uso de pinzas ópticas para estudiar varios organismos vivos, incluyendo el Virus Mosaico del tabaco, bacterias, células rojas de la sangre y algas.

La técnica de pinzas ópticas desarrollada por Ashkin ha permitido realizar una gran cantidad de estudios en biofísica gracias a mediciones más precisas y la manipulación de pequeños sistemas biológicos. Actualmente existe una gran variedad de aplicaciones en partículas mesoscópicas y células con el uso de Pinzas Ópticas. Sin embargo, nuestro interés recae en las aplicaciones que se encuentran dentro del campo de la Biotecnología para Biomedicina, dando especial énfasis a las aplicaciones ya existentes y proponiendo, finalmente, una sustancial mejora en las técnicas de laboratorio ya utilizadas.

---

<sup>5</sup>A. Ashkin, J.-M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles,” *Opt. Lett.* 115, 288–290 1986.

## 3 Desarrollo

### 3.1 Conceptos preliminares

Las soluciones escalares complejas de las ecuaciones de onda pueden presentar dislocaciones. La propiedad matemática esencial de estas funciones escalares complejas en el punto o línea en la que la dislocación se localiza, es aquella en la que la fase aumenta o decrece en un múltiplo de  $2\pi$  a través de una curva cerrada alrededor de éstos. En estos puntos o líneas, también conocidos como *singularidades de fase*, la amplitud de la función desaparece y la fase es indeterminada. Las singularidades de fase juegan un importante rol en amplias ramas de la ciencia como la física del estado sólido, el condensado de Bose-Einstein (BECs), superfluidos, superconductividad, cosmología, dinámica molecular, óptica no lineal, etc. En el último caso, el estudio de tales singularidades se enmarca frecuentemente en una rama separada llamada óptica no lineal singular.

Un *vórtice óptico* es una solución escalar compleja de una ecuación de onda definida en un dominio de dos dimensiones caracterizado por la presencia de una singularidad de fase. Si el vórtice tiene simetría circular, entonces sólo cuenta con una singularidad localizada en el eje de simetría. Por otro lado, se han predicho teóricamente la existencia de vórtices ópticos con simetría discreta, o vórtices discretos (DVs), en medios periódicos como soluciones solitónicas de una ecuación de onda no lineal como la ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE). Entre tales medios periódicos se incluyen las redes ópticamente inducidas, fibras de cristales fotónicos o las redes de Bessel. Dichas soluciones también han sido observadas experimentalmente en los medios antes mencionados. Otras soluciones con simetría discreta rotacional y estructura de fase complicada han sido introducidos en potenciales periódicos modulados, ambos en el desarrollo

de BECs y óptica no lineal. Algunas de estas soluciones se caracterizan por la presencia de más de una singularidad de fase. Finalmente, otras soluciones cuasi-estacionarias mostrando simetría discreta en un medio homogéneo conocido como “nubes” de solitones, se han introducido y algunos de ellos muestran estructura de fase no trivial. Soluciones estacionarias de este tipo también han sido obtenidas en un medio inhomogéneo como una red fotónica.

Sea  $\psi(\mathbf{x})$  una solución escalar compleja de la ecuación de onda definida en un dominio bi-dimensional,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . El *número de sinuosidad*  $\gamma$  de  $\psi$  a través de una curva cerrada  $\Gamma$  está dada por el contorno integral  $\gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$ , donde  $\phi$  es la fase del campo complejo  $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ . Sea  $\mathbf{x}_0$  la posición de la singularidad de fase de  $\psi$ . La *carga topológica* de la singularidad de fase localizada en  $\mathbf{x}_0$  es el *número de sinuosidad* del campo complejo  $\psi$  por la curva cerrada más pequeña que contiene  $\mathbf{x}_0$ . Esto es, si  $\Gamma_\epsilon$  es una familia de curvas cerradas que contienen  $\mathbf{x}_0$  parametrizadas por  $\epsilon$  tal que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon = \mathbf{x}_0$ , entonces  $v \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_\epsilon} \nabla\phi \cdot d\mathbf{l}$ . Adicionalmente se puede definir otra cantidad, el *momentum angular* total, como  $\langle \psi | \mathcal{L}_z | \psi^* \rangle / \langle \psi | \psi^* \rangle$ , donde  $\mathcal{L}_z = \left( \vec{r} \times \vec{\nabla} \right)_z$ .

Vórtices discretos con simetría circular pueden ser escritos como  $\psi(r, \theta) = g(r)e^{il\theta}$ , donde  $(r, \theta)$  son coordenadas polares. Estos vórtices presentan un momento angular bien definido ya que  $R_\alpha \psi = e^{il\alpha} \psi$ , donde  $R_\alpha = e^{i\mathcal{L}_z \alpha}$  es una rotación continua de ángulo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{L}_z = i \frac{\partial}{\partial \theta}$  es el generador del grupo de rotación  $O(2)$ . Entonces, los vórtices son autofunciones del operador momentum angular que satisfacen  $\mathcal{L}_z \psi = l\psi$ . Notar que el número de sinuosidad y la carga topológica de una singularidad son cantidades relacionadas con la fase, mientras que el momentum angular es una cantidad relacionada con la simetría. Estos vórtices simétricos circularmente presentan una sola singularidad en el origen y cumplen que  $l = v = \gamma$ , donde  $\gamma$  es calculado en una curva cerrada que rodea la singularidad de fase. También satisface  $g(r) \sim ar^{|l|} + O(r^{|l|+2})$  cuando

$r \rightarrow 0$ .

Para un vórtice, el número de sinusidad  $\gamma$  y la cara topológica  $v$ , esto es, los conceptos relacionados con la fase, están bien definidos, pero el momento angular no. Sea como sea, otro concepto relacionado con la simetría, el pseudomomento  $m$ , ha sido definido para medios con simetría discreta. También ha sido demostrado que esta cantidad se conserva durante la propagación. Por construcción, el pseudomomento  $m$  define completamente la representación del grupo  $C_N$  al cual  $\psi$  pertenece. también ha sido demostrado que  $m = v = \gamma$  para DV con una singularidad de fase<sup>6</sup>.

### 3.2 Propagación de Fresnel

Considerando la ecuación de Helmholtz para la propagación escalar del campo eléctrico de una onda EM monocromática en un medio dieléctrico homogéneo de índice  $n$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \nabla_t^2 E + k_0^2 n^2 E = 0 \quad (1)$$

donde  $\nabla_t$  es el gradiente de las coordenadas transversales  $\nabla_t = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$  y  $k_0$  es el número de onda de una onda EM en el vacío ( $k_0 = \omega/c$ ), escribimos  $E(x_t, z) = \phi(x_t, z) e^{-i\beta_0 z}$ , aplicamos una aproximación de variación lenta en  $z$  y despreciamos la segunda derivada en  $\phi$ ,  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \ll -2i\beta_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}$  donde  $\beta_0 = k_0 n$ , para obtener la ecuación para la propagación paraxial en régimen escalar de la misma onda EM:

$$-2i\beta_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla_t^2 \phi = 0 \quad (2)$$

---

<sup>6</sup>M.-Á. García-March, A.Ferrando, M. Zacarés, J. Vijande, L.D. Carr, "Angular pseudo-momentum theory for the generalized nonlinear Schrödinger equation in discrete rotational symmetry media" Physica D (2009) 1432-1438.

Esta ecuación es formalmente idéntica a la que describe la evolución de una partícula libre en mecánica cuántica. En efecto, considerando el operador de evolución unitario y expandiéndolo a los órdenes menores en el parámetro de evolución  $z = h \ll 1$  obtenemos lo siguiente:

$$\phi(h) \approx \phi(0) + ihH_0\phi(0) \Rightarrow -i\frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} - H_0\phi \approx 0$$

obteniendo cuando  $h \rightarrow 0$

$$-i\frac{\partial\phi}{\partial z} - H_0\phi = 0$$

Comparando este resultado con la Eq.(2) podemos encontrar fácilmente que  $H_0 = -\frac{1}{2\beta_0}\nabla_t^2$  y escribir

$$|\phi(z)\rangle = e^{iH_0z}|\phi(0)\rangle \quad (3)$$

La forma integral de la Eq.(3) se obtiene introduciendo la identidad de Parserval en la posición espacial  $I = \int |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|$  (a partir de ahora,  $\mathbf{x}$  indica coordenadas transversales) y proyectando en la posición espacial  $\phi(\mathbf{x}, z) = \langle\mathbf{x}|\phi(z)\rangle$

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \int d\mathbf{x}' \langle\mathbf{x}|e^{iH_0z}|\mathbf{x}'\rangle\phi(\mathbf{x}', 0) = \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', z)\phi(\mathbf{x}', 0), \quad z \geq 0 \quad (4)$$

donde  $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', z)$  es la función de Green de avance (se asume  $z \geq 0$ ) de Schrödinger de una partícula libre (o kernel de Fresnel en Óptica) dado por la expresión

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', z) = \frac{i}{\lambda z} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \quad z \geq 0 \quad (5)$$

Por conveniencia, se escribe la Eq.(5) en forma adimensional. Para ésto, se asume que  $a$  es un parámetro de medida del largo que caracteriza el tamaño

típico de la función de onda en  $z = 0$ .  $a$  podría ser, por ejemplo, el ancho de una función gausseana que caracteriza el tamaño de la onda. Dado, entonces, el parámetro  $a$ , normalizamos las coordenadas transversales con respecto a este parámetro:  $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}' \rightarrow a\mathbf{x}'$  donde, ahora,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$  son adimensionales. Por lo tanto, la Eq.5 queda expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', z) &= \frac{ia^2}{\lambda z} \int d\mathbf{x}' e^{-i\frac{\pi a^2}{\lambda z}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \phi(\mathbf{x}', 0) \\ &= \frac{iL_D}{z} \int d\mathbf{x}' e^{-i\frac{\pi L_D}{z}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2} \phi(\mathbf{x}', 0) \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

Normalizamos, luego, la coordenada axial  $z$  por el largo axial típico  $L_D \equiv a^2/\lambda$  introducido en la expresión anterior;  $z \rightarrow L_D z$ . Al hacer este cambio,  $z$  también representa una cantidad adimensional de la función de onda y obtenemos, de esta forma, la integral de propagación de Fresnel adimensional válida para propagaciones en un medio óptico homogéneo:

$$\phi(\mathbf{x}, z) = \frac{i}{z} \int d\mathbf{x}' \exp \left[ -i\frac{\pi}{z} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \right] \phi(\mathbf{x}', 0), \quad z \geq 0 \quad (6)$$

### 3.3 Efecto de un elemento difractivo delgado en la propagación

Analicemos ahora la propagación de la luz en un medio inhomogéneo que presenta tres diferentes regiones definidas por el siguiente perfil de índice de refracción:

$$n^2(\mathbf{x}, z) = \begin{cases} n_0^2(\mathbf{x}) & 0 \leq z < z_0 \\ n_0^2(\mathbf{x}) + \Delta n_0^2(\mathbf{x}) & z_0 \leq z < z_1 = z_0 + h \\ n_1^2(\mathbf{x}) & z_1 \leq z \end{cases} \quad (7)$$

Si aplicamos una aproximación de variación lenta a la ecuación de Helmholtz para un medio inhomogéneo - dado por el índice de refracción  $n^2(\mathbf{x}, z)$ - como lo hicimos en la sección anterior, obtenemos la siguiente ecuación paraxial:

$$-2ik_0n\frac{\partial\phi}{\partial z} + \nabla_t^2\phi + k_0^2(n^2(\mathbf{x}, z) - n^2)\phi = 0$$

donde  $n$  es un índice de refracción independiente de la posición, característico del sistema. La ecuación anterior puede ser escrita en mecánica cuántica de la siguiente forma:

$$-i\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{2\beta_0}\nabla_t^2\phi + \frac{k_0^2}{2\beta_0}\Delta n^2\phi = 0$$

donde  $\beta_0 \equiv k_0n$  y  $\Delta n^2 \equiv n^2(\mathbf{x}, z) - n^2$ . Así, podemos definir el potencial  $V(\mathbf{x}, z) \equiv (-k_0/2n)\Delta n^2$  para escribir:

$$-i\frac{\partial\phi}{\partial z} - \left[ -\frac{1}{2\beta_0}\nabla_t^2 + V(\mathbf{x}, z) \right] \phi = 0$$

donde el Hamiltoniano queda, entonces, expresado por

$$H = -\frac{1}{2\beta_0}\nabla_t^2 + V(\mathbf{x}, z)$$

La propagación en el medio dado por la Eq.(7), también puede ser entendida como un problema de evolución de tres pasos definido por los siguientes potenciales:

$$V(\mathbf{x}, z) = \begin{cases} V_0(\mathbf{x}) & 0 \leq z < z_0 \\ V_0(\mathbf{x}) + \Delta V_0(\mathbf{x}) & z_0 \leq z < z_1 = z_0 + h \\ V_1(\mathbf{x}) & z_1 \leq z \end{cases} \quad (8)$$

Asumimos que la segunda región tiene un ancho muy pequeño dado por  $h \ll 1$

y representa un objeto difractivo delgado. El operador de evolución desde  $z = 0$  hasta un valor arbitrario  $z > z_1$  está dado por  $e^{iHz}$  el cual, debido al carácter de grupo abeliano de los operadores de evolución, puede ser descompuesto en tres operadores diferentes:

$$e^{iHz} = e^{iH(z-z_1)} e^{iHh} e^{iHz_0}$$

Ahora,  $H = T + V$ , donde  $T \equiv -\frac{1}{2\beta_0} \nabla_t^2$  es el término cinético del Hamiltoniano. Definimos  $H_0 \equiv T + V_0$  y  $H_1 \equiv T + V_1$ . De acuerdo al perfil de potencial dado por (8), el operador de evolución puede ser escrito como

$$e^{iHz} = e^{iH_1(z-z_1)} e^{i(H_0+\Delta V_0)h} e^{iH_0z_0}$$

Analicemos el operador de evolución en el elemento difractivo. Ya que  $h \ll 1$ , podemos aplicar la descomposición de Hausdorff-Campbell al menor orden:

$$e^{i(H_0+\Delta V_0)h} = e^{iH_0h+i\Delta V_0h} + O(h)^2 = e^{iH_0h} e^{i\Delta V_0h} + O(h)^2$$

donde los dos órdenes de los operadores son posibles pues conmutan  $O(h)^2$ .

Luego, el operador completo de evolución está dado por

$$e^{iHz} \stackrel{h \rightarrow 0}{\equiv} e^{iH_1(z-z_1)} [e^{i\Delta V_0h} e^{iH_0h}] e^{iH_0z_0} = e^{iH_1(z-z_1)} e^{i\Delta V_0h} e^{iH_0(z_0+h)}$$

y tomando en cuenta el hecho que  $z_1 = z_0 + h$ , finalmente escribimos

$$e^{iHz} \stackrel{h \rightarrow 0}{\equiv} e^{iH_1(z-z_1)} e^{i\Delta V_0h} e^{iH_0z_1} \tag{9}$$

Luego encontramos que la presencia de un elemento difractivo delgado en la posición  $z = z_1$  (notar que  $z \approx z_0$  ya que  $h \rightarrow 0$ ) sólo produce una multiplicación por el operador diagonal en la posición espacial  $e^{i\Delta V_0(\mathbf{x})h}$ . Si aplicamos la descomposición anterior del operador de evolución a la función de onda en  $z = 0$ , vemos inmediatamente que

$$|\phi(z)\rangle = e^{iH_1(z-z_1)} e^{i\Delta V_0 h} |\phi(z_1)\rangle = e^{iH_1(z-z_1)} |\bar{\phi}(z_1)\rangle$$

donde

$$|\bar{\phi}(z_1)\rangle = e^{i\Delta V_0 h} |\phi(z_1)\rangle$$

Como se mencionó anteriormente, esta operación es una simple multiplicación en la posición espacial ya que el operador que representa el elemento difractivo delgado es diagonal en tal espacio:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, z_1) = e^{i\Delta V_0(\mathbf{x})h} \phi(\mathbf{x}, z_1)$$

Una vez que este operador se desarrolla, la amplitud resultante se puede propagar hasta alcanzar el punto axial  $z$  usando el operador de evolución lineal en el último medio  $e^{iH_1(z-z_1)}$ .

### 3.4 Elemento difractivo delgado con simetría rotacional discreta

En esta sección analizamos el efecto de la presencia de un elemento difractivo con simetría rotacional de orden finito. Esto significa que  $\Delta n_0^2$  o equivalentemente  $\Delta V_0$  son invariantes bajo la acción de los elementos del grupo rotacional discreto

$C_N$ . Para simplificar el análisis, vamos a asumir que el primer medio posee una perfecta simetría rotacional  $O(2)$ . Matemáticamente, la propiedad de invarianza del elemento difractivo se expresa como

$$\Delta V_0(G\mathbf{x}) = \Delta V_0(\mathbf{x}) \quad \forall G \in C_N$$

Esta propiedad determina la forma funcional del potencial cerca del eje de rotación. Es conveniente introducir, en estos momentos, una notación compleja para las coordenadas espaciales, i.e.,  $w = x + iy$ . Cerca del origen  $|w|^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 0$ , así que podemos desarrollar una expansión en serie de Taylor de la variable compleja  $w$  y mantener los términos de menor orden. Debido a la invarianza  $C_N$  del potencial existen sólo dos tipos  $C_N$  invariantes de  $w$  y  $w^*$  que pueden aparecer en esta expansión de Taylor:  $ww^* = |w|^2 = x^2 + y^2$ ,  $w^N$  y  $w^{*N}$ .

Vamos a estudiar uno de los casos más simples correspondientes a una simetría rotacional discreta de orden  $N = 4$ .

$$\Delta V_0(w) = u_0 + u_1|w|^2 + u_2|w|^4 + v_0w^4 + v_1w^{*4} + O(w)^6 \quad (10)$$

Esta es la forma más general de un potencial  $C_4$  invariante cerca del eje de simetría. Mientras asumimos que el primer medio es  $O(2)$  invariante, está claro que sólo los términos  $w^4$  y  $w^{*4}$  rompen la simetría completa original para pasar a  $C_4$ . Luego, si queremos analizar el proceso en el cual sólo aparezcan los términos que rompen la simetría, es suficiente considerar sólo los últimos términos de la Eq.(10). Luego tomamos  $u_0 = u_1 = u_2 = 0$  y procedemos a evaluar la forma de la función después de la acción del potencial que rompe la simetría.

Nuestro interés se centra en la descripción analítica del proceso de desintegración

de un vórtice de alta carga propagándose en el primer medio invariante bajo una simetría rotacional completa luego que atraviesa un elemento difractivo que rompe con dicha simetría. De acuerdo con el análisis explicado en la sección anterior, la amplitud del campo del vórtice, luego de atravesar un elemento difractivo muy delgado, está dado por (en términos de las coordenadas complejas  $w = x + iy$ ):

$$\bar{\phi}(w, z_1) = e^{i\Delta V_0(w)h} \phi(w, z_1)$$

donde  $\phi(w, z_1)$  representa la amplitud del vórtice. Ya que vamos a proceder a un cálculo explícito, vamos a considerar que este vórtice posee carga  $l = 3$ . En notación compleja, esto significa que

$$\phi(w, z_1) = w^3 f(w)$$

donde  $f(w) = f(|w|)$  es una función completamente simétrica para rotaciones  $O(2)$ . Vamos a tomar esta función con forma de Gausseana, lo que nos va a permitir desarrollar un cálculo analítico de la propagación. Luego,  $f(w) = e^{-\alpha|w|^2}$  y por lo tanto

$$\bar{\phi}(w, z_1) \stackrel{h \ll 1}{\cong} (1 + iv_0 h w^4 + iv_1 h w^{*4}) w^3 e^{-\alpha|w|^2} \quad (11)$$

Es interesante reconocer que la función anterior se puede escribir en una forma equivalente que explicita las propiedades de transmutación<sup>7</sup>  $O(2) - C_4$ ,  $l - m = kN$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En este caso  $l = 3$  y  $N = 4$ , lo que implica que  $m = -1$ . Observamos

<sup>7</sup>M. Zacarés, M. A. García-March, J. Vijande, A. Ferrando y E. Merino, "Topological charge selection rule for phase singularities". Phys. Rev. A 80, 043812 (2009)

la siguiente identidad:

$$w^3 = w^* \frac{w^4}{|w|^2}$$

Luego, la Eq.(11) puede ser escrita como

$$\bar{\phi}(w, z_1) = w^* F(w) \quad (12)$$

donde (para simplificar la notación, incluimos  $h$  dentro de la definición de  $v_0$  y  $v_1$ :  $v_0 h \rightarrow v_0$  y  $v_1 h \rightarrow v_1$ )

$$F(w) = e^{-\alpha|w|^2} \left[ i v_1 |w|^6 + \frac{1}{|w|^2} w^4 + i v_0 \frac{1}{|w|^2} w^8 \right]$$

Notar que  $F(w)$  sólo depende de los términos  $C_4$  invariantes,  $|w|^2$  y  $w^4$ , lo que implica que  $F(w)$  es explícitamente invariante bajo rotaciones  $C_4$ . Por esta razón, la amplitud del campo del vórtice justo después de emerger del elemento difractivo corresponde a un campo con  $m = -1$  ya que en  $\bar{\phi}$  actúa una rotación elemental  $C_4$ , la cual está dada en coordenadas complejas por  $w \rightarrow w\epsilon$ , donde  $\epsilon = e^{i\pi/2}$ :

$$G\bar{\phi}(w, z_1) = \bar{\phi}(\epsilon w, z_1) = \epsilon * w * F(\epsilon w) = \epsilon^{-1} w * F(w) = \epsilon^{-1} \bar{\phi}(w, z_1)$$

lo que muestra que  $\bar{\phi}$  pertenece a la representación compleja de  $C_4$  dada por el pseudomomento angular  $m = -1$ .

### 3.5 Propagación de un vórtice óptico después de un quiebre de simetría

Pasaremos, entonces, a estudiar el caso en que la onda atraviesa el medio difractivo y entra a un medio homogéneo. Por lo tanto, procederemos a analizar la propagación libre de la configuración de un vórtice inicial del tipo dado por la Eq.11.

Así y como habíamos visto en las secciones anteriores, la propagación de la amplitud de una onda en un medio homogéneo, va a estar dada por la integral de Fresnel (6). Tomando como configuración de campo inicial la amplitud dada por (12), obtenemos la siguiente expresión:

$$\phi(\mathbf{x}, z - z_1) = \frac{i}{z - z_1} \int d\mathbf{x}' \exp \left[ i \frac{\pi}{z - z_1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \right] \bar{\phi}(\mathbf{x}', z_1) \quad z \geq z_1$$

Para simplificar los cálculos, hemos cambiado el origen de coordenadas en  $z$  desde 0 a  $z_1$ , así que a partir de ahora,  $z$  representa la distancia entre un plano axial dado y la posición del elemento difractivo de simetría discreta, esto es,  $z - z_1 \rightarrow z$ . Escribimos explícitamente la integral anterior en términos de las coordenadas  $(x', y')$  y  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \phi(x, y; z) = & \frac{i}{z} \exp \left[ -i \frac{\pi}{z} (x^2 + y^2) \right] \int dx' dy' \exp \left[ -i \frac{\pi}{z} (x'^2 + y'^2) \right] \exp \left[ i \frac{2\pi}{z} (xx' + yy') \right] \times \\ & (x' + iy') \left( 1 + iv_0 (x' + iy')^4 + iv_1 (x' - iy')^4 \right) e^{-\alpha(x'^2 + y'^2)} \end{aligned}$$

La integral anterior puede ser desarrollada analíticamente mientras se pueda espresar como suma de integrales constituidas por productos de  $x'^m y'^n$  y fun-

ciones Gausseanas<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y; z) = & \frac{\pi^2}{(\pi - iz\alpha)^8} e^{-\frac{\pi(x^2+y^2)\alpha}{\pi - iz\alpha}} \{i\pi^6 v_0 (x + iy)^7 + \pi^2 (x + iy)^3 (\pi - iz\alpha) + \\
& v_1 i (x - iy) [\pi^6 (x^2 + y^2)^3 - 12i\pi^5 (x^2 + y^2)^2 z - 72i\pi z^5 \alpha^2 - 24z^6 \alpha^3 \\
& + 36\pi^2 z^4 \alpha (2 + (x^2 + y^2) \alpha) - 12\pi^4 (x^2 + y^2) z^2 (3 + (x^2 + y^2) \alpha) \\
& + 24i\pi^3 z^3 (1 + 3(x^2 + y^2) \alpha)]\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

### 3.6 Ecuación de las trayectorias de las singularidades de fase

La ecuación anterior puede ser escrita en una forma más clara introduciendo la coordenada compleja  $w = x + iy$ , reconociendo, de esta forma, una estructura de momento angular bien definida:

$$\phi(w; z) = \frac{\pi^2}{(\pi - iz\alpha)^8} e^{-\frac{\pi|w|^2\alpha}{\pi - iz\alpha}} [A_+ w^7 + A_0(z) w^3 + A_- (|w|, z) w^*] \tag{14}$$

donde

$$A_+ = i\pi^6 v_0 \tag{15}$$

$$A_0(z) = \pi^2 (\pi - iz\alpha)^4,$$

y

$$\begin{aligned}
A_- (|w|, z) = & v_1 i [\pi^6 |w|^6 - 12i\pi^5 |w|^4 z - 72i\pi z^5 \alpha^2 - 24z^6 \alpha^3 \\
& + 36\pi^2 z^4 \alpha (2 + |w|^2 \alpha) - 12\pi^4 |w|^2 z^2 (3 + |w|^2 \alpha) \\
& + 24i\pi^3 z^3 (1 + 3|w|^2 \alpha)],
\end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Cálculo realizado en el Software Mathematica

esta última expresión puede ser reescrita como sigue:

$$A_-(|w|, z) = v_1 i [24z^3 i (\pi - iz\alpha)^3 - 36\pi^2 z^2 (\pi - iz\alpha)^2 |w|^2 - 12i\pi^4 z (\pi - iz\alpha) |w|^4 + \pi^6 |w|^6]. \quad (16)$$

La expresión (14) tiene la forma predicha anteriormente por nuestros argumentos de simetría, ya que puede ser escrita como

$$\phi(w; z) = \frac{\pi^2}{(\pi - iz\alpha)^8} e^{-\frac{\pi|w|^2\alpha}{\pi - iz\alpha}} w + \left[ \frac{A_+ w^8 + A_0(z) w^4}{|w|^2} + A_-(|w|, z) \right] = w^* F(w, z) \quad (17)$$

donde utilizamos las identidades  $w^7/w^* = w^8/|w|^2$  y  $w^3/w^* = w^4/|w|^2$ . De esta forma

$$F(w, z) = \frac{\pi^2}{(\pi p - iz\alpha)^8} e^{-\frac{\pi|w|^2\alpha}{\pi - iz\alpha}} \left[ \frac{A_+}{|w|^2} w^8 + \frac{A_0(z)}{|w|^2} w^4 + A_-(|w|, z) \right] \quad (18)$$

Reconocemos inmediatamente que  $F(w, z)$  posee invarianza  $C_4$ , por lo tanto  $\phi(\epsilon w; z) = \epsilon^{-1} \phi(w; z)$  donde  $\epsilon = e^{i\pi/2}$  es una rotación elemental de cuarto orden. Luego, como se esperaba, la solución preserva el pseudomomento angular  $m = -1$ .

Estamos interesados en la naturaleza de las trayectorias seguidas por las singularidades de fase. Ya que contamos con una expresión analítica para la propagación del campo, podemos obtener una clara visión acerca de su dinámica. Por definición, las singularidades de fase están dadas por los ceros de la función compleja  $\phi$ , esto es, por todos los  $w$  que cumplan  $\phi(w; z) = 0$ . A partir de la

expresión (17) encontramos que hay dos tipos de singularidades: (i) aquellas en las que  $w^* = 0$  y (ii) aquellas que verifican que  $F(w, z) = 0$ .

Las últimas corresponden a un vórtice óptico de carga  $q = -1$  localizado en el origen.

Este hecho se deduce naturalmente si estudiamos el comportamiento del campo de propagación cerca del origen ( $|w| \rightarrow 0$ ) en el desarrollo de  $\phi(w, z)$  en serie de Taylor alrededor del punto  $w = 0$ :

$$\phi(w; z) = -v_1 \frac{24\pi^2 z^3}{(\pi - iz\alpha)^5} w^* + O(w)^2 \quad (19)$$

este es un resultado muy interesante. Muestra analíticamente que para todos los valores de  $z$ , el campo óptico se puede aproximar a una singularidad de fase cerca del origen llevando carga topológica  $q = m$ , esto es,  $\phi \sim -v_1 r e^{im\theta}$  (en este caso,  $m = -1$ ). Por otro lado, se puede mostrar que la existencia de esta singularidad es debido a un rompimiento de la simetría  $C_4$  ya que su valor asintótico cerca del origen es proporcional al rompimiento de la simetría del parámetro  $v_1$ . Notar que si  $v_1 = 0$ , entonces  $A_- = 0$  y la expansión asintótica para  $|w| \rightarrow 0$  en la Eq.14 es, en cambio

$$\phi(w; z) \approx \frac{\pi^4}{(\pi - iz\alpha)^4} w^3$$

y luego la carga topológica del vórtice original  $q = 3$  puede ser preservado.

El último tipo de singularidad de fase es más engorroso de analizar ya que implica el análisis de raíces complejas de la ecuación no lineal  $F(w, z) = 0$ , la cual, de acuerdo a la definición (18) es equivalente a

$$A_+ w^8 + A_0(z) w^4 + |w|^2 A_- (|w|, z) = 0 \quad (20)$$

Para hacer el cálculo más claro, vamos a asumir que dos de los parámetros que controlan el rompimiento de simetría  $v_0$  y  $v_1$  son del mismo orden:  $v_0 = \lambda v$  y  $v_1 = v$ , donde  $\lambda \sim 1$ . Esto es, de hecho, el caso más común. En tal caso, de acuerdo a la definición previa,  $A_+$  y  $A_-$  son del mismo orden, más específicamente  $A_+ = O(v)$  y  $A_- = O(v)$ . Si vamos al límite  $v \rightarrow 0$ , obtenemos a partir de la Eq.20 que  $A_0(z) w^4 \rightarrow 0$  y, consecuentemente,  $w \rightarrow 0$ . Luego,  $w = w(v)$  es una función de  $v$  verificando que  $w(v) \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$ . Consecuentemente, en el régimen  $v \ll 1$  es también cierto que  $|w| \ll 1$ . Si analizamos la Eq.(20) y las expresiones (15) y (16) vemos que el primer término de la Eq.(20) es  $O(v|w|^8)$  mientras que el tercero contiene términos del orden  $v|w|^2$ ,  $v|w|^4$ ,  $v|w|^6$  y  $v|w|^8$ . La primera contribución distinta de cero en la Eq.(20) debido al rompimiento de simetría cuando  $|w| \ll 1$  (o equivalentemente, cuando  $v \ll 1$ ), es, por lo tanto, el término  $O(vw^2)$ :

$$A_0(z) w^4 - 24z^3 v (\pi - iz\alpha)^3 |w|^2 = O(v|w|^4). \quad (21)$$

Luego

$$w^4 \approx \frac{24z^3 v}{\pi^2 (\pi - iz\alpha)} |w|^2 = vp(z) |w|^2. \quad (22)$$

El objeto matemático más simple de calcular es ahora  $|w|$ . Esto se hace simplemente tomando el módulo de la expresión anterior y dividiendo por  $|w|^2$ .

Obtenemos

$$|w(z)|^2 = v|p(z)| = v \frac{24z^3}{\pi^2 \sqrt{\pi^2 + z^2 \alpha^2}} \quad (23)$$

Esta ecuación muestra que  $O(|w|^2) = O(v)$ . Nuestra ecuación aproximada para  $w$  (21) es entonces válida para órdenes mayores a  $v^3$ . La ecuación anterior provee la evolución de la coordenada radial de las singularidades de fase que se encuentran fuera del eje de simetría. Sabiendo que  $|w(z)|^2 = x^2(z) + y^2(z) =$

$r^2(z)$ , entonces el radio de la trayectoria de la singularidad de fase está dada por:

$$r(z) \approx \sqrt{\frac{24v}{\pi^2}} \frac{z^{3/2}}{(\pi^2 + z^2\alpha^2)^{1/4}} \quad (24)$$

Para encontrar la fase de  $w$ , escribimos  $w$  y  $p$  en su forma compleja considerando el módulo de la forma compleja, esto es,  $w = |w|e^{i\theta}$  y  $p = |p|e^{i\gamma}$

$$|w|^4 e^{i4\theta} = v |p| e^{i\gamma} |w|^2 \Rightarrow |w|^2 e^{i4\theta} = v |p| e^{i\gamma} \Rightarrow e^{i4\theta} = e^{i\gamma} \Rightarrow 4\theta = \gamma$$

donde hemos utilizado el hecho que  $|w|^2 = v |p|$ , como se probó en la Eq. (23). Luego, la evolución de las coordenadas polares de las singularidades de fase están descritas por la fase de  $p(z)$ . Por la definición de  $p(z)$  en la Eq. (22), encontramos fácilmente una expresión para la fase:  $\tan \gamma = z\alpha/\pi$ , luego

$$\theta(z) = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{z\alpha}{\pi}\right) + k\frac{\pi}{2} \quad (25)$$

luego de observar la Eq. (23), notamos que al asumir  $|w| \ll 1$ , no se puede mantener cuando  $z \gg 1$ . En este sentido, la validez de la expresión anterior está restringida para valores de  $z$  tales que la condición  $|w| \ll 1$  se mantiene válida. Por esta razón, cuando  $w(z)$  es una función monótonamente decreciente de  $z$ , es conveniente definir la distancia crítica  $z_c$  como aquella que cumpla con la condición  $|w(z_c)| \sim 1$ . Esta cantidad permite caracterizar cualitativamente los dos regímenes definidos por valores pequeños o grandes de  $|w|$  dada por la condición de distancia  $z \ll z_c$  y  $z \gg z_c$  respectivamente. Nuestro cálculo anterior corresponde al caso de distancia pequeña  $z \ll z_c$ . Podemos hacer una estimación del valor particular de  $z_c$  fuera de la expresión (23):

$$v \frac{24z_c^3}{\pi^2 \sqrt{\pi^2 + z_c^2 \alpha^2}} \sim 1 \quad (26)$$

Resolviendo esta ecuación para  $z_c$  y manteniendo sólo el orden superior en términos de la expansión en  $v$ , obtenemos,

$$z_c \sim \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{6v}}$$

analizamos ahora el régimen  $z \gg z_c$ , en el cual  $|w| \gg 1$ , para ver que el comportamiento de la trayectoria de las singularidades de fase difieren cualitativamente con respecto a la trayectorias del régimen de distancias cortas. Volvemos, entonces, a la Eq. (20) y estudiamos el régimen asintótico de distancia larga para las funciones  $A_0(z)$  y  $A_-(|w|, z)$ . Primero que todo, reconocemos que la dependencia en  $z$  está siempre dada por la combinación  $(\pi - iz\alpha) \stackrel{z \gg z_c}{\sim} -iz\alpha$ , luego,

$$A_0(z) \stackrel{z \gg z_c}{\sim} \pi^2 z^4 \alpha^4 \quad (27)$$

y

$$A_-(|w|, z) \stackrel{z \gg z_c}{\sim} (-24\alpha^3 v i) z^6 \quad (28)$$

Ya que  $A_+ \sim 1$ ,  $A_0$  y  $A_-$  predominan para valores altos de  $z$ . El término  $O(z^4)$  en  $A_-(z)$  puede ser depreciado con respecto al término dominante  $A_0(z)$  (que también es  $O(z^4)$ ) tomando en cuenta que  $A_- \sim O(v)$  y  $A_0 \sim O(1)$  asumiendo  $v \ll 1$ . Luego, la Eq. (22) toma la siguiente forma para  $z \gg z_c$ ,

$$w^4 \approx \frac{24vz^2 i}{\pi^2 \alpha} |w|^2, \quad (29)$$

Tomando el módulo de esta ecuación, obtenemos que

$$|w|^4 \approx \frac{24z^2}{\pi^2} \frac{|v|}{|\alpha|} |w|^2 \Rightarrow |w|^2 \approx \frac{24z^2}{\pi^2} \frac{|v|}{|\alpha|}$$

o, en términos de la coordenada polar radial,

$$r(z) = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} \left( \frac{|v|}{|\alpha|} \right)^{1/2} z = \frac{z}{z_c} \quad (30)$$

para  $z \gg z_c$  y  $v \ll 1$ . La ecuación para la coordenada polar angular se obtiene a partir de la Eq.(29) escribiendo  $w = |w|e^{i\theta}$ :

$$|w|^4 e^{i4\theta} = \frac{24z^2}{\pi^2} \frac{|v|}{|\alpha|} |w|^2 e^{i\pi/2} \Rightarrow e^{i4\theta} = e^{i\pi/2} \quad (31)$$

lo que nos indica que la coordenada polar angular es  $z$ -independiente para  $z \gg z_c$  y  $v \ll 1$ , igual que en régimen de distancias cortas.

$$\theta(z) = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

Una vez que sabemos que el comportamiento asintótico de la trayectoria es lineal en  $z$ , i.e.,  $w(z) \sim ze^{i\pi/8}$ , nos podemos preguntar si es posible obtener una expresión válida sin introducir la restricción  $v \ll 1$ . La respuesta es afirmativa. Para probar ésto, sólo es necesario introducir el *ansatz* de distancias largas  $w(z) = a(\alpha, v)ze^{i\pi/8}$  dentro de la ecuación maestra Eq. (20) sin hacer ninguna suposición acerca de la forma funcional de  $a(\alpha, v)$ . Ya que estamos interesados en la contribución mayor para  $z \gg z_c$ , sólo consideramos la contribución de

mayor orden, la que es del orden  $z^8$ . Luego obtenemos:

$$-ia^2\alpha [12a^4\pi^4v + 24v\alpha^2 - a^2\pi^2\alpha(36v + \alpha^2)] = 0$$

Lo que nos entrega una ecuación de segundo orden para  $a^2$ , obviando la solución trivial  $a = 0$ . La solución a esta ecuación nos entrega dos raíces:

$$a_{\pm}^2 = \frac{36v\alpha + \alpha^3 \pm \alpha\sqrt{144v^2 + 72v\alpha^2 + \alpha^4}}{24\pi^2v}$$

Ya que  $r(z) = |w(z)| = |a|z$ , estamos sólo interesados en  $|a|$ . Luego obtenemos dos posibles soluciones:

$$|a_{\pm}| = \sqrt{\frac{36v\alpha + \alpha^3 \pm \alpha\sqrt{144v^2 + 72v\alpha^2 + \alpha^4}}{24\pi^2v}} \quad (33)$$

Es fácil chequear que todas las derivadas de  $|a_{\pm}|$  con respecto a  $v$  se desvanecen cuando  $v = 0$ . Esto indica que  $|a_{\pm}|$  no es analítica en  $z = 0$ . Este resultado es, de alguna manera, esperado, ya que hemos visto que  $r(z) \sim \sqrt{v}z$  para pequeños valores de  $v$ . De hecho, si uno asume una dependencia no analítica del tipo  $|a_{\pm}| = A_{\pm}v^{\beta_{\pm}}$  cuando  $v \ll 1$ , se puede encontrar el valor de la exponente sólomente utilizando la identidad  $\beta_{\pm} = \lim_{v \rightarrow 0} v \frac{d}{dv} \ln |a_{\pm}|$ . Aplicando esta identidad a la Eq. (33), obtenemos:

$$\beta_{\pm} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\mp\alpha^2}{2\sqrt{144v^2 + 72v\alpha^2 + \alpha^4}} = \mp\frac{1}{2}$$

Esto significa un comportamiento no analítico diferente para las dos soluciones cuando  $v \ll 1$ :  $|a_+| \sim 1/\sqrt{v}$  y  $|a_-| \sim \sqrt{v}$ . Este último término corresponde a la solución previamente encontrada para  $v \ll 1$ . Luego, la generalización de la

Eq. (30) para la coordenada radial está dada por la siguiente solución asintótica  $z \gg z_c$  válida para todos los valores del coeficiente de rompimiento de simetría  $v$ :

$$r(z) = \sqrt{\frac{36v\alpha + \alpha^3 - \alpha\sqrt{144v^2 + 72v\alpha^2 + \alpha^4}}{24\pi^2v}} z$$

para  $z \gg z_c$ . Por la construcción del ansatz para distancias largas, este resultado es compatible con la fase asintótica dada por la Eq. (32).

### 3.7 Ecuación de movimiento para las singularidades de fase en el espacio libre después del rompimiento de la simetría rotacional

Nuestros resultados previos muestran que la dinámica de las singularidades de fase no son triviales cerca del plano donde se localiza el elemento difractivo que rompe la simetría. Las trayectorias son líneas rectas sólo lejos del elemento difractivo como se muestra en la Fig. (1).

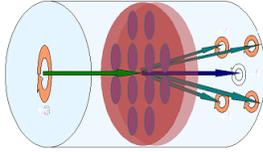


Figure 1: Trayectorias de las singularidades de fase luego de atravesar el elemento difractivo

Éste es un efecto sorprendente ya que las trayectorias rectas deberían aparecer como propagación en el espacio libre en ausencia de no linealidades, como éste es el caso. Como sea, esta propiedad se alcanza sólo asintóticamente en el campo lejano. Como veremos luego, en el campo cercano, las singularidades de fase se comportan como partículas experimentando fuerzas no triviales a pesar

de no haber presencia de potenciales y no linealidades. De alguna forma, las singularidades de fase mantienen una memoria efectiva de la presencia previa del elemento difractivo. Esta memoria desaparece en el campo lejano, donde las fuerzas efectivas que actúan en las singularidades de fase, desaparecen.

Aprovechemos el hecho de tener expresiones analíticas para las trayectorias de las singularidades de fase cerca del elemento difractivo. Es precisamente en esta región donde observamos una dinámica intrigante. De acuerdo a las Eqs. (24) y (25), el comportamiento de la coordenada compleja  $w(z) = r(z) \exp i\theta(z)$  que define la posición de la singularidad de fase, puede escribirse como:

$$w(z) \approx kz^{3/2} e^{i\Omega z} \quad z \ll 1 \quad (34)$$

Para obtener la expresión anterior, aproximamos las Eqs. (24) y (25):

$$r(z) \approx \sqrt{\frac{24v}{\pi^2}} \frac{z^{3/2}}{(\pi^2 + z^2\alpha^2)^{1/4}} \stackrel{z \ll 1}{\approx} \sqrt{\frac{24v}{\pi^2}} z^{3/2} \equiv kz^{3/2}$$

y, ya que  $\tan \frac{z\alpha}{\pi} \approx \frac{z\alpha}{\pi}$  cuando  $z \ll 1$ ,

$$\theta(z) \stackrel{z \ll 1}{\approx} \frac{1}{4} \frac{\alpha z}{\pi} \equiv \Omega z$$

donde  $k$  y  $\Omega$  son constantes dadas por  $(24v/\pi^3)^{1/2}$  y  $\alpha/(4\pi)$ , respectivamente.

Procedemos a derivar la ecuación de movimiento asociada a la Eq. (34). Diferenciamos Eq. (34) con respecto a  $z$ :

$$w'(z) = \left( \frac{3}{2z} + i\Omega \right) w(z) \quad (35)$$

La segunda derivada de la Eq. (34) nos entrega la ecuación de movimiento en notación compleja:

$$w''(z) = \left( \frac{3}{4z^2} + \frac{3i\Omega}{z} - \Omega^2 \right) w(z) = (-\Omega_0^2 + i\Omega_1^2) w(z) \quad (36)$$

donde

$$\Omega_0^2 \equiv \Omega^2 - \frac{3}{4z^2} \quad \text{y} \quad \Omega_1^2 \equiv \frac{3\Omega}{z}$$

Luego, encontramos que las singularidades de fase, en efecto, experimentan una fuerza del tipo no trivial. La Eq. (36) representa un tipo especial de oscilador armónico donde la frecuencia es compleja y dependiente en  $z$ . Ya que la frecuencia es compleja, no esperamos que el sistema sea conservativo. Podemos probar ésto manipulando la Eq. (36) y su conjugada de la misma forma que haríamos para establecer la conservación de energía de un oscilador armónico estándar. Primero, escribimos la conjugada de la Eq. (36):

$$w''^*(z) = (-\Omega_0^2 + i\Omega_1^2) w^*(z) \quad (37)$$

Luego, multiplicamos la Eq. (36) por  $w'^*$  y la Eq. (37) por  $w'$  y sumamos ambas ecuaciones:

$$w''w'^* + w'w''^* = -\Omega_0^2 (ww'^* + w'w^*) + i\Omega_1^2 (ww'^* - w'w^*)$$

inmediatamente reconocemos que el lado izquierdo de esta ecuación y el primer término de la derecha son derivadas totales. El segundo término del lado dere-

cho, no lo es. Luego,

$$\frac{d}{dz} (w'w'^* + \Omega_0^2 ww^*) = i\Omega_1^2 (ww'^* - w'w^*) = 2\Omega |w|^2 \Omega_1^2$$

donde hemos utilizado la Eq. (35) y su conjugada para reescribir el lado derecho de la ecuación anterior. Si definimos la energía del sistema de la misma forma que se define la energía para un oscilador armónico,

$$E = \frac{1}{2} w'w'^* + \frac{1}{2} \Omega_0^2 ww^*$$

entonces queda claro que  $\Omega_1$  introduce ganancias en el sistema:

$$\frac{dE}{dz} = \Omega |w|^2 \Omega_1^2 = \frac{3}{z} \Omega^2 |w|^2 \geq 0 \quad (38)$$

Como luego vamos a probar, la presencia de esta parte imaginaria, puede estar relacionada con la presencia de algún torque externo produciendo rotaciones en la singularidad de fase en la primera etapa de propagación.

Para identificar apropiadamente la naturaleza de las fuerzas efectivas actuando en la singularidad de fase y, consecuentemente, explicar la dinámica del proceso de agrupación de vórtices de carga alta, necesitamos reescribir la ecuación de movimiento compleja (36) en coordenadas cartesianas. Luego, reescribiremos  $w(z) = x(z) + iy(z)$  en nuestra última ecuación, encontrando las siguientes expresiones:

$$x''(z) = -\Omega_0^2 x(z) - \Omega_1^2 y(z)$$

$$y''(z) = -\Omega_0^2 y(z) + \Omega_1^2 x(z)$$

la que podemos escribir de la siguiente forma vectorial,

$$\mathbf{r}_t''(z) = -\Omega_0^2 \mathbf{r}_t(z) - \Omega_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_t(z)$$

donde  $\vec{r}_t = (x, y)$ .

construyamos el vector externo en  $3D$ ,  $\Lambda = (0, 0, \Omega_1^2)$  de tal forma que si  $\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}_t + z\mathbf{k}$

$$\mathbf{r} \times \Lambda = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \Omega_1^2 \end{vmatrix} = \Omega_1^2 (y, -x, 0)$$

luego

$$(\mathbf{r} \times \Lambda)_t = \Omega_1^2 (y - x) = \Omega_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_t$$

Entonces, la ecuación de movimiento para la singularidad de fase puede ser representada en  $3D$ , aunque el movimiento está restringido al vector transversal plano  $\mathbf{r}(z) = (x, y, 0)$ , es

$$\mathbf{r}''(z) = -\Omega_0^2 \mathbf{r}(z) - (\mathbf{r}(z) \times \Lambda) \quad (39)$$

Vemos la presencia simultánea de una fuerza armónica efectiva y una fuerza externa asociada con el torque. El hecho que esta última expresión esté asociada al torque, se puede chequear calculando su efecto en el momento angular en la

fase de la singularidad de fase  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ :

$$\mathbf{M} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dz} = \frac{d}{dz}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = -\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \Lambda) = |\mathbf{r}|^2 \Lambda = (0, 0, |\mathbf{r}_t|^2 \Omega_1^2)$$

donde hemos utilizado la ecuación de movimiento (39) en la cuarta igualdad. Ya que el movimiento ocurre en el plano  $xy$ , sólo existe una variación del momentum angular en el eje  $z$ :

$$M_z = \frac{dL_z}{dz} = |\mathbf{r}_t|^2 \Omega_1^2 = |\mathbf{r}_t|^2 \frac{3\Omega}{z} \geq 0 \quad z \ll 1 \quad (40)$$

Podemos chequear que la ecuación de la energía encontrada previamente es, en efecto, correcta. Sólo necesitamos multiplicar la Eq. (39) por  $\mathbf{r}'$  para obtener

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = -\Omega_0^2 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} \times \Lambda) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\Omega_0^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \Lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \Lambda \cdot \mathbf{L} \quad (41)$$

o, equivalentemente, tomando en cuenta que  $\Lambda = (0, 0, \Omega_1^2)$

$$\frac{dE}{dz} = \Lambda \cdot \mathbf{L} = \Omega_1^2 L_z = |\mathbf{r}_t|^2 \Omega \Omega_1^2 = \frac{3}{z} \Omega^2 |\mathbf{r}_t|^2$$

donde hemos tomado en cuenta el hecho que en coordenadas polares  $L_z = r^2 \theta' = |\mathbf{r}_t|^2 \Omega$ . Esta expresión coincide exactamente con la Eq. (38) usando notación compleja, ya que  $|\mathbf{r}_t|^2 = x^2 + y^2 = |w|^2$ .

Notemos que todos estos resultados se aplican - cuando rota apropiadamente - a cualquiera de las cuatro singularidades moviéndose lejos del centro de simetría. Esto se debe a la simetría de cuarto pliegues de nuestras coluciones y se refleja en las cuatro soluciones diferentes que tenemos para la coordenada angular  $\theta$  en la Eq. (25).

### 3.8 Dinámica de las singularidades de fase en el espacio libre luego del rompimiento de la simetría rotacional

En la sección anterior, hemos derivado la ecuación de movimiento que cumple con las singularidades de fase justo después del rompimiento de la simetría rotacional discreta. Sabemos que el rompimiento de la simetría rotacional produce que un vórtice de gran carga se agrupe en una singularidad central de carga topológica con pseudomomento angular  $m$  y una “onda” de  $N$  ( $N$  es el orden de simetría del elemento difractivo) cargas de singularidades de fase individuales que se asemejan al de partículas alejándose del eje de simetría. La dinámica de estas singularidades de fase comportándose como partículas, está descrita en la ecuación de movimiento (39) (en el caso que  $N = 4$ ). Esta ecuación nos muestra que, a pesar que la función de onda describe la propagación de la luz libre y lineal, la agrupación de singularidades de fase no se mueven como partículas libres. De hecho, justo después de la acción del elemento difractivo, aquellas experimentan dos tipos de fuerzas, como se muestra en el lado derecho de la Eq. (39) (considerando que la singularidad corresponde a una partícula de masa  $m = 1$ ):

1. Una fuerza armónica repulsiva dada por  $\mathbf{F}_h = -\Omega_0^2 \mathbf{r}(z)$ .
2. Una fuerza rotacional  $\mathbf{F}_r = -(\mathbf{r}(z) \times \Lambda)$ , generando un torque  $\mathbf{M} = |\mathbf{r}|^2 \Lambda$ .

#### 3.8.1 Fuerza armónica

Esta fuerza es crucial por ser la responsable de la disociación de la carga inicial del vórtice óptico de carga  $q = 3$ , en una singularidad central de carga  $q = m = -1$  y cuatro vórtices de carga  $q = 1$ . Si teníamos una interacción atractiva,

entonces los cuatro vórtices se mantendrán en la posición del centro de simetría, ya que tanto la posición como la velocidad es son cero:  $\mathbf{r}_t(0) = 0$  y  $\mathbf{r}'_t(0) = 0$ . Como sea, la interacción es repulsiva, ya que  $\Omega_0^2 = \Omega^2 - \frac{3}{4z^2} < 0$  si  $z \ll 1$ . Sin embargo, una interacción armónica repulsiva no es suficiente para garantizar el movimiento de las singularidades rotas lejos del origen, ya que su posición y velocidad son cero en  $z = 0$ . Se mantendrán en esa posición en una situación de equilibrio inestable mientras la fuerza que actúe sobre ellas sea cero. Se necesita de algo más para gatillar el movimiento expansivo de las singularidades generadas. El mecanismo es la existencia de una fuerza distinta de cero en el origen de referencia  $z = 0$ :

$$|\mathbf{F}_t| = \left| \left( \Omega^2 - \frac{3}{4z^2} \right) \right| r(z) \sim \frac{1}{z^2} z^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$$

Si analizamos la forma del potencial armónico para pequeños valores de  $z$ , vemos a partir de la Eq. (41) que:

$$V_h(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Omega_0^2 |\mathbf{r}|^2 \approx -\frac{3}{8z^2} |\mathbf{r}|^2 \quad z \ll 1$$

Lo que indica la presencia de un potencial singular repulsivo en  $z = 0$ . La curvatura del potencial cuadrático es, entonces, infinito y negativo (repulsivo) justo después del rompimiento de la simetría, luego la fuerza de las singularidades es diferente de cero cuando se localizan en el origen, i.e., cuando  $z = 0$ . Esta es la razón de por qué las singularidades se alejan del centro de simetría. El hecho que el potencial y la fuerza sean singulares en  $z = 0$ , no produce ninguna patología en la posición y la velocidad de las singularidades cuando  $z = 0$ . Esto se debe a que si la aceleración tiene la forma  $r''(z) \sim 1/\sqrt{z}$ , su primera y segunda

integral tienen la forma:

$$r'(z) \sim \sqrt{z} + C \quad \text{y} \quad r(z) = z^{3/2} + C'$$

lo que significa que son cantidades finitas en  $z = 0$  y compatibles con la condición inicial  $r'(0) = 0$  y  $r(0) = 0$  (considerando  $C = C' = 0$ ).

### 3.8.2 Torque

El primer efecto dinámico de las singularidades que escapan es la presencia de una fuerza armónica repulsiva. El torque descrito en la Eq. (40) es cero cuando  $z = 0$ , ya que  $M_z \sim r^2 \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$  en la medida que la condición inicial para la singularidad de fase sea  $r(0) = 0$ . Luego, sólo cuando las singularidades comienzan a moverse hacia afuera, lo que significa cuando  $r \neq 0$ , comienzan a sentir un torque externo.

## 4 Conclusión

La dinámica de las singularidades de fase luego de atravesar el medio difractivo con simetría rotacional discreta y entrar al segundo medio homogéneo, está caracterizada por la acción de dos fuerzas: la fuerza armónica y el torque. Cada uno de ellos definirá la dinámica de las singularidades de fase y por lo tanto su comportamiento debido a la presencia del elemento difractivo. Luego, la variación del elemento difractivo, será el responsable de una dinámica diferente de las singularidades de fase obtenidas.

En efecto, la agrupación de las singularidades de fase se puede preveer primero, por la acción del rompimiento de la simetría debido al elemento difractivo, el que introduce una fuerza instantánea que produce  $N = 4$  singularidades de fase fuera del vórtice original; a medida que las singularidades de fase comienzan a moverse, adquieren un momento angular debido a la presencia del torque externo  $M_z \approx r^2 \frac{3\Omega}{z} > 0$ , el que genera un movimiento rotacional (en una primera etapa, de velocidad angular fija  $\Omega$ ) en cada una de las singularidades de fase formadas. Sin embargo, esta rotación no continúa todo el tiempo, pues sabemos que asintóticamente, i.e., para  $z \gg 1$ , la coordenada angular polar, tiende a un valor fijo  $\theta \approx \pi/8$ .

Este comportamiento puede ser utilizado para el modelado y simulación de estructuras multi-vórtice sintonizables mediante los mencionados elementos difractivos discretos con el objeto de establecer un esquema de control de iluminación de sistemas de manipulación de micropartículas mediante pinzas ópticas que pueda resultar alternativo o complementario de los existentes. Se deja planteado este último aspecto para una segunda parte o continuación del trabajo aquí mencionado.

## 5 Bibliografía

- [1]. M.-Á. García-March, A.Ferrando, M. Zacarés, J. Vijande, “Angular pseudo-momentum theory for the generalized nonlinear Schrödinger equation in discrete rotational symmetry media” *Physica D* (2009) 1432-1438.
- [2]. M.-Á. García-March, A.Ferrando, M. Zacarés, J. Vijande, “Topological charge selection rule for phase singularities” *Phys. Rev. A* 80, 043812 (2009).
- [3]. Miguel-Ángel García-March, Albert Ferrando, Mario Zacarés, Sarira Sahu and Daniel E. Ceballos\_Herrera, “Symmetry, winding number, and topological charge of vortex solitons in discrete-symmetry media” *Phys. Rev. A* 79, 053820 (2009).
- [4]. “Optical Vortices and Vortex Solitons” by Anton S. Desyatnikov, Lluís Torner and Yuri S. Kivshar.
- [5]. “Structure of Optical Vortices”, Jennifer E. Curtis and David Grier.
- [6]. “Quantum Mechanics”, Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë.
- [7]. “Mecánica”, Landau/Lifshitz.
- [8]. “Aspects of Symmetry”, Selected Erice lectures of Sidney Coleman.