

Efectos de Desentrelazamiento en Sistemas Disipativos

Freddy Antonio Lastra Pérez



Tesis presentada para obtener el grado de doctor en
Ciencias con Mención en Física

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Dedicada a

Polonia, Sebastián y a mi familia

Resumen

En los últimos años con el desarrollo de nuevas tecnologías, se ha tornado imprescindible un mayor y mejor entendimiento de la naturaleza con el fin de una mejor calidad de vida. En esta tesis se abordan algunos de los aspectos relevantes hoy en día en el ámbito de la Óptica e Información cuántica, como lo son los sistemas disipativos y el desentrelazamiento. En un primer enfoque nos referiremos a los efectos que se pueden dar cuando un sistema cuántico se acopla con un ruido clásico. A continuación describiremos los efectos de reservorios independientes sobre un sistema bipartito en dimensiones superiores a $2 \otimes 3$ y daremos alguna idea de lo que puede suceder con el llamado efecto de la muerte súbita del entrelazamiento, para luego estudiar este efecto en estados coherentes entanglados.

Informe de aprobación de tesis de doctorado

Se informa al comité de Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la tesis presentada por el candidato

FREDDY ANTONIO LASTRA PÉREZ

ha sido aprobada por la comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

DIRECTOR DE TESIS :

Dr. Juan Carlos Retamal Abarzúa

COMISIÓN INFORMANTE :

Dep. de Física de la USACH

Dr. Mikhail Plyushchay

Dr. Fernando Mendez

Externos

Dr. Sascha Wallentowitz

Dr. Miguel Orszag

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, su apoyo y cariño me dieron la fortaleza suficiente para sacar adelante esta etapa de mi vida con éxito, sin duda que son lo más importante en mi vida y este trabajo va dedicado a ustedes.

También quiero agradecer al Dr. Juan Carlos Retamal por su confianza y apoyo, su guía ha sido fundamental para el desarrollo exitoso de cada paso en esta tesis, ha sido realmente un agrado recorrer este camino con él. Quisiera también agradecer a la Dra Dora Altbir por todo su apoyo y por depositar su confianza en mí, con su ayuda fue posible que este trabajo llegará a buen fin. Agradezco también a los profesores que integraron la comisión de tesis, sus consejos fueron muy importantes para el desarrollo de esta tesis.

Agradezco especialmente al profesor Marcelo França Santos y al profesor Nicim Zagury, con los cuales he compartido y trabajado en esta tesis.

Quiero destacar el apoyo vital, como lo es el aporte económico, que me brindó el proyecto MECESUP USA 0108 y también el aporte de CONICYT a través de su beca término de tesis. Agradezco al centro de Óptica e Información cuántica (proyecto MILENIO ICM P02-049F) y a DIGEGRA USACH por la ayuda que me brindaron para mi asistencia a congresos y estadías de investigación. Un agradecimiento especial para la Sra. Susana, Mely y Leíto por su paciencia y eficiencia.

Durante todos estos años en esta institución he conocido a diversas personas, entre profesores, docentes y compañeros, todos ellos de una excelente calidad humana, en esta tesis también se refleja una parte de todos ellos. Quisiera agradecer también a todo el grupo, profesores y alumnos, de Óptica Cuántica de la Universidad de Concepción por toda su hospitalidad y buena disposición, fue siempre un placer compartir con ustedes.

Por último quiero agradecer a mis amigos que he conocido durante toda mi estancia en la USACH, me enseñaron muchas cosas las cuales valoraré para siempre. Un agradecimiento especial para Don Guille, Carlos, Victor, Pablo, Claudio, Rati, Marcel, Nestor, Robert, Seba, Fabian, MAlid, Arturo, Geena, Balu y Omar, gracias por compartir y estar ahí.

Índice general

Resumen	III
Informe de aprobación de tesis de doctorado	IV
Agradecimientos	v
1. Fundamentos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Dinámica disipativa	2
1.2.1. Ecuación maestra de Bloch Redfield	3
1.2.2. Ecuación maestra en la forma de Linblad	7
1.3. Entrelazamiento y medidas de entrelazamiento	8
1.3.1. Conceptos preliminares	8
1.3.2. Entrelazamiento para estados puros bipartitos	11
1.3.3. Entrelazamiento para estados mixtos bipartitos	13
1.3.4. Entrelazamiento para estados bipartitos en dimensiones superiores	14
2. Efectos de decoherencia inducidos por ruidos clásicos sobre el entrelazamiento de dos qubits	17

Índice general	VIII
<hr/>	
2.1. Introducción	18
2.2. Modelo	19
2.3. Generación de entrelazamiento	22
2.4. Conclusión	31
3. Cambios abruptos en la dinámica del desentrelazamiento cuántico	33
3.1. Introducción	33
3.2. Dinámica del desentrelazamiento para qutrits fotónicos bajo disipación	35
3.3. Dinámica del desentrelazamiento para qutrits atómicos bajo disipación	50
3.4. Dos sistemas d-dimensionales acoplados a reservorios independientes	54
3.5. Conclusión	56
4. Estados coherentes entrelazados y muerte súbita del entrelazamiento	57
4.1. Introducción	58
4.2. Dinámica del desentrelazamiento	59
4.3. Implementación	67
4.3.1. En una cavidad	67
4.3.2. En dos cavidades	68
4.4. Muerte súbita inducida del entrelazamiento	69
4.5. Conclusión	71
5. Conclusiones generales	73

Índice general	IX
<hr/>	
Apéndice	75
A. Resultados auxiliares	75
A.1. Cálculo de la concurrencia	75
A.2. Cálculo de la matriz densidad	80
Bibliografía	83
Publicaciones	90

Índice de figuras

2.1. Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en el estado $ \uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto para $\alpha = 10^{-3}$; Línea segmentada: cálculo numérico exacto para $\alpha = 0$; Línea punteada: cálculo numérico aproximado partiendo de Ec.(2.11).	24
2.2. Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en $ \uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.	26
2.3. Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (ii) y los qubits inicialmente en $ \uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada : cálculo perturbativo.	28
2.4. Esquema de niveles que muestra las transiciones entre los estados para (a): caso (i); (b): caso (ii). Líneas sólidas: el estado inicial está preparado en el subespacio $\{ \uparrow\uparrow\rangle, \downarrow\downarrow\rangle\}$; Líneas segmentadas: el estado inicial está preparado en el subespacio $\{ \uparrow\downarrow\rangle, \downarrow\uparrow\rangle\}$	29
2.5. Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (ii) y los qubits inicialmente en $ \uparrow\downarrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.	31

2.6. Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en $ \uparrow\downarrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.	32
3.1. Evolución del EOF $E(t)$ y la entropía lineal $s(t)$ para los nueve estados maximalmente entrelazados. Línea sólida corresponde al grupo (a) de estados maximalmente entrelazados $\{ \Psi_{\alpha,0}\rangle\}$. Línea segmentada corresponde al grupo (b) de estados maximalmente entrelazados $\{ \Psi_{\alpha,1}\rangle, \Psi_{\alpha,2}\rangle\}$ con $\alpha = 0, 1, 2$	36
3.2. Evolución de $\Lambda(t)$ para estados iniciales mixtos de la Eq. (3.2) con $\lambda = 0,1$ como una función del tiempo adimensional Γt	39
3.3. Autovalores relevantes de la matriz M para el caso mostrado en Fig. 3.2.	40
3.4. Tiempos para los cambios abruptos de la dinámica del desentrelazamiento como una función del parametro λ . Línea sólida corresponde al primer cambio abrupto, la línea segmentada corresponde al segundo cambio abrupto y la línea segmentada con puntos corresponde al ESD.	41
3.5. Autovalores relevantes de la matriz traspuesta parcial ρ^{TA}	42
3.6. Evolución del entrelazamiento para el caso mostrado en la Fig. 3.1 (línea segmentada) para $\lambda = 0,15$ y para un estado inicial en el subespacio $\{ 11\rangle, 22\rangle\}$ (línea solida) para $\lambda = 0,2$	43
3.7. Evolución del entrelazamiento para estados iniciales puros no maximalmente entrelazados. Línea segmentada corresponde a $\alpha = 0,2386$, $\beta = 0,9545$, $\gamma = 0,1790$ y la línea solida corresponde a $\alpha = 0,1790$, $\beta = 0,2386$, $\gamma = 0,9545$	45

3.8. Evolución del desentrelazamiento para estados asociados al grupo (b) con $\lambda = 0,3$	47
3.9. Evolución del desentrelazamiento para estados puros no maximalmente entrelazados asociados al caso (b) . Línea segmentada corresponde a los estados $ \phi_1\rangle$ y la línea sólida corresponde a los estados $ \psi_1\rangle$	49
3.10. Autovalores relevantes de ρ^{TA} para dos qutrits atómicamente en un estado maximalmente entrelazado de la clase $\{ \Psi_{\alpha,0}\rangle\}$	52
3.11. Autovalores relevantes de ρ^{TA} para dos sistemas cuatridimensionales acoplados a reservorios descorrelacionados.	55
4.1. Evolución del desentrelazamiento para el sistema efectivo de dos qubits de la Ec. (4.6) como función del tiempo adimensional Γt . La línea sólida corresponde a la concurrencia, y la línea segmentada corresponde al autovalor negativo de ρ^{TA} . Los valores de los parámetros son $ \alpha = \beta = 2,5$, $c_{+,+} = 2/3$, $c_{-,-} = \sqrt{5}/3$. El recuadro muestra el tiempo donde el entrelazamiento se anula, el cual está en completo acuerdo con la Ec. (4.11).	63
4.2. Decaimiento del entrelazamiento para diferentes estados. La línea sólida corresponde a estados $C_0 \alpha\alpha\rangle + C_1 -\beta-\beta\rangle$, la línea segmentada corresponde a estados $C_0 \alpha\beta\rangle + C_1 \beta\alpha\rangle$ y $C_0 \alpha\alpha\rangle + C_1 \beta\beta\rangle$. Los valores para los parámetros son $ \alpha = 3$, $ \beta = 6$ y $C_0 = C_1 = 1/\sqrt{2}$	66
4.3. Representación esquemática de los niveles circulares en un átomo de Rydberg [83].	67
4.4. Arreglo experimental de una cavidad para producir estados entrelazados.	68

-
- 4.5. Arreglo que involucra dos cavidades para producir estados entrelazados. 69
- 4.6. Evolución del desentrelazamiento para el sistema efectivo de dos qubits en la Ec. (4.28) como una función del tiempo adimensional Γt . Línea sólida corresponde a la concurrencia. Línea segmentada corresponde al autovalor negativo de ρ^{TA} . Los parámetros se tomaron como $|\alpha| = |\beta| = 2, N_a = N_b = 1/\sqrt{2}, |C_g| = 1,98, |C_e| = \sqrt{1 - |C_g|^2}$ 71

Capítulo 1

Fundamentos

1.1. Introducción

En el estudio de las propiedades cuánticas de un sistema, el cuál queremos manipular, se torna muy importante la influencia que el medio ambiente (reservorio) provoca sobre el sistema, este fenomeno se conoce como perdida de coherencia o decoherencia [1, 2], esto sucede debido a que siempre existe una interacción la cual no podemos desconectar. Esta interacción actúa destruyendo las correlaciones cuánticas de los estados con los cuales se quiere trabajar, esto es, por ejemplo, destruye las superposiciones de estados y afecta el entrelazamiento, que eventualmente pueden ser usados como un recurso para guardar información o para hacer computación cuantica [3].

Los formalismos para estudiar los mecanismos que provocan decoherencia en sistemas abiertos [4, 7], están basados en resolver ecuaciones maestras bajo la hipotesis de markov, así en determinados contextos, se han obtenido una serie de ecuaciones como, por ejemplo, la ecuación maestra de Pauli, las ecuaciones opticas de Bloch y mas recientemente una serie de ecuaciones maestras que

permiten contrarrestar el efecto de la decoherencia [8, 13].

En particular nosotros estamos interesados en un sistema, el cual se acopla a un ruido aleatorio externo (campos electromagnéticos fluctuantes), los cuales son producidos por una fuente externa. Este modelo, está bien descrito por la llamada ecuación maestra de Bloch-Redfield [14].

Por otro lado, en contribuciones recientemente el estudio del desentrelazamiento ha recobrado gran relevancia con relación al concepto de separabilidad del estado cuántico cuando se expone a un reservorio, esto es importante porque se puede observar claramente que la evolución dinámica de la decoherencia y desentrelazamiento pueden ser bastante diferentes, a este respecto nuestro enfoque es estudiar que le sucede al entrelazamiento de un sistema cuántico compuesto de dos modos del campo electromagnético acoplados a reservorios independientes y sin interactuar entre sí. Para esto se estudia específicamente lo que le sucede a dos qubits y en dimensiones superiores a estados coherentes entrelazados.

En general podemos decir que la evolución dinámica de la decoherencia y el desentrelazamiento están involucrados procesos no unitarios, los cuales conllevan a una pérdida de información debido a que los estados (en general superposiciones entrelazadas) se tornan inestables, por esta razón es muy importante entender como se produce y cuales son los mecanismos para así tener un control eficiente sobre estos fenómenos.

1.2. Dinámica disipativa

En esta sección se discutirán las bases teóricas de las ecuaciones fundamentales que usaremos para describir como un sistema cuántico interactúa con su entorno (reservorio) y cómo éste afecta la dinámica de la decoherencia y desen-

trelazamiento. Partiendo de suposiciones básicas, bien descritas en los textos más importantes sobre el tema [4,5], se expondrán los diversos ingredientes que se necesitan para describir adecuadamente el comportamiento de un sistema frente a su entorno.

1.2.1. Ecuación maestra de Bloch Redfield

Los modelos que describen un sistema cuántico interactuando con su entorno(reservorio), se caracterizan por considerar al sistema dinámico bajo consideración como un sistema finito, usualmente de pocos grados de libertad y con niveles discretos de energía, mientras que el reservorio es un sistema complejo con muchos grados de libertad(en principio infinitos), con un amplio espectro cuasicontinuo. Resolver el sistema total(sistema más reservorio) es una tarea difícil, sino imposible, pero hacer esto sería una pérdida de esfuerzo, porque los procesos específicos que ocurren en el reservorio son totalmente irrelevantes cuando se está interesado en la dinámica del sistema de interés.

Modelos para diferentes situaciones experimentales se han construido, en estos un conjunto común de suposiciones(aunque no necesario único), se asumen, estas son

- 1) Las fluctuaciones en el reservorio son estacionarias y markovianas.
- 2) El tiempo de correlación τ_c de las fluctuaciones del reservorio es del orden del periodo promedio de las fluctuaciones.
- 3) Los ensambles promedios de los operadores del reservorio son cero.
- 4) El acoplamiento entre el sistema dinámico y el reservorio es suficientemente débil y el reservorio suficientemente grande que el efecto del acoplamiento sobre el reservorio es despreciable, por lo tanto se asume que el estado del reservorio permanece en equilibrio a temperatura constante a todos los tiempos. El

acoplamiento tiene un efecto apreciable sobre el sistema dinámico, sin embargo al final este llega al equilibrio con el reservorio.

5) El reservorio induce fluctuaciones markovianas sobre el sistema dinámico.

6) El tiempo de relajación $1/\gamma$, el cuál gobierna la tasa a la cuál el sistema dinámico se acerca al equilibrio, es mucho más grande que el tiempo de correlación τ_c .

Consideremos un sistema S y un reservorio R , además consideremos que el acoplamiento es V , entonces el hamiltoniano total es

$$H = H_s + H_r + V = H_o + V, \quad (1.1)$$

la ecuación que gobierna la dinámica del sistema total es

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] \quad (1.2)$$

expandiendo a segundo orden y pasando al cuadro de interacción (donde los operadores se transforman como $\tilde{A}(t) = \exp[\frac{iH_o t}{\hbar}]A \exp[-\frac{iH_o t}{\hbar}]$), obtenemos para el sistema total [4, 5]

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{i\hbar}[\tilde{V}(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \quad (1.3)$$

Además, como estamos interesados solo en el sistema, debemos trazar sobre los grados de libertad del reservorio, lo cual define el estado del sistema como

$$\tilde{\rho}_s(t) = Tr_r(\tilde{\rho}(t)) \quad (1.4)$$

además podemos escribir la interacción como (que es la forma que tiene la interacción dipolar)

$$V = \sum_i S_i R_i \quad (1.5)$$

así la ecuación se escribe

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_s(t) &= -\frac{1}{i\hbar} Tr_r [\sum_i \tilde{S}_i(t) \tilde{R}_i(t), \rho(0)] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} Tr_r \sum_{i,j} \int_0^t dt' [\tilde{S}_i(t) \tilde{R}_i(t), [\tilde{S}_j(t') \tilde{R}_j(t'), \tilde{\rho}(t')]], \end{aligned} \quad (1.6)$$

para $t = 0$ tenemos $\rho(0) = \rho_s(0)\rho_r(0)$, con

$$\rho_r(0) = \frac{\exp(-\beta H_r)}{Z} \quad (1.7)$$

implica que el primer término de la ecuación es cero, esto es

$$\dot{\tilde{\rho}}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2} Tr_r \sum_{i,j} \int_0^t dt' [\tilde{S}_i(t) \tilde{R}_i(t), [\tilde{S}_j(t') \tilde{R}_j(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (1.8)$$

Por otro lado siempre podemos hacer $\tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}_s(t')\tilde{\rho}_r(0)$, dado que el estado del reservorio no cambia. En la (1.8), nos quedan sólo 4 términos, ocupando la permutación cíclica y que las fluctuaciones son estacionarias y definiendo $\tau = t - t'$ $\tilde{R}_i(0) = R_i$, $\tilde{R}_j(0) = R_j$, los terminos que involucran promedios sobre los operadores del baño se pueden escribir como

$$\begin{aligned} Tr_r[\tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rho_r(0)] &= \langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle = \langle \tilde{R}_i(\tau) R_j \rangle \\ Tr_r[\tilde{R}_i(t) \rho_r(0) \tilde{R}_j(t')] &= \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle = \langle R_j \tilde{R}_i(\tau) \rangle \\ Tr_r[\tilde{R}_j(t') \rho_r(0) \tilde{R}_i(t)] &= \langle \tilde{R}_i(t) \tilde{R}_j(t') \rangle = \langle \tilde{R}_i(\tau) R_j \rangle \\ Tr_r[\rho_r(0) \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t)] &= \langle \tilde{R}_j(t') \tilde{R}_i(t) \rangle = \langle R_j \tilde{R}_i(\tau) \rangle \end{aligned} \quad (1.9)$$

reagrupando términos, nos quedamos con la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}}_s(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^t d\tau [[\tilde{S}_i(t), \tilde{S}_j(t-\tau) \tilde{\rho}_s(t)] \langle \tilde{R}_i(\tau) R_j \rangle \\ &\quad - [\tilde{S}_i(t), \tilde{\rho}_s(t) \tilde{S}_j(t-\tau)] \langle R_j \tilde{R}_i(\tau) \rangle] \end{aligned} \quad (1.10)$$

tenemos dos escalas de tiempos típicas $1/\gamma$ (decaimiento) y τ_c (correlaciones en el reservorio distintas de cero), y usualmente se tiene que $1/\gamma \gg \tau_c$, esto conduce

a tomar el límite superior $t \rightarrow \infty$, lo cual es una buena aproximación. Ahora, miremos los dos primeros términos de la Ecuación (1.10), y proyectémoslos en la base de autoestados de H_o , entonces para el primero tendremos

$$\begin{aligned}
\langle k | \tilde{S}_i(t) \tilde{S}_j(t - \tau) \tilde{\rho}_s(t) | l \rangle &= \sum_{n,m} \langle k | \tilde{S}_i(t) | n \rangle \langle n | \tilde{S}_j(t - \tau) | m \rangle \langle m | \tilde{\rho}_s(t) | l \rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle k | S_i | n \rangle \langle n | S_j | m \rangle \langle m | \tilde{\rho}_s | l \rangle \exp(i\omega_{km}t) \exp(-i\omega_{nm}\tau) \\
&= \sum_m \langle m | \tilde{\rho}_s | l \rangle \sum_r \langle k | S_i | r \rangle \langle r | S_j | m \rangle \exp(i\omega_{km}t) \exp(-i\omega_{rm}\tau) \\
&= \sum_{n,m} \langle m | \tilde{\rho}_s | n \rangle \delta_{ln} \sum_r \langle k | S_i | r \rangle \langle r | S_j | m \rangle \exp(i\omega_{km}t) \exp(-i\omega_{rm}\tau) \exp(i\omega_{nl}t)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

por otro lado el segundo término es

$$\begin{aligned}
\langle k | \tilde{S}_j(t - \tau) \tilde{\rho}_s(t) \tilde{S}_i(t) | l \rangle &= \sum_{n,m} \langle k | \tilde{S}_j(t - \tau) | n \rangle \langle n | \tilde{\rho}_s(t) | m \rangle \langle m | \tilde{S}_i(t) | l \rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle k | S_j | n \rangle \langle n | \tilde{\rho}_s | m \rangle \langle m | S_i | l \rangle \exp(-i\omega_{kn}\tau) \exp(i\omega_{kn}t) \exp(i\omega_{ml}t) \\
&= \sum_{n,m} \langle k | S_j | m \rangle \langle m | \tilde{\rho}_s | n \rangle \langle n | S_i | l \rangle \exp(-i\omega_{km}\tau) \exp(i\omega_{km}t) \exp(i\omega_{nl}t)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

el otro conmutador se puede expresar de una forma similar, definiendo las expresiones

$$\begin{aligned}
\Gamma_{nlkm}^+ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \langle n | S_i | l \rangle \langle k | S_j | m \rangle \int_0^\infty d\tau \exp(-i\omega_{km}\tau) \langle \tilde{R}_i(\tau) R_j \rangle \\
\Gamma_{nlkm}^- &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \langle n | S_j | l \rangle \langle k | S_i | m \rangle \int_0^\infty d\tau \exp(-i\omega_{nl}\tau) \langle R_j \tilde{R}_i(\tau) \rangle
\end{aligned} \tag{1.13}$$

y juntando todos los términos tenemos

$$\langle k | \dot{\tilde{\rho}}_s(t) | l \rangle = \sum_{n,m} \langle m | \tilde{\rho}_s(t) | n \rangle R_{klmn} \exp(i(\omega_{km} + \omega_{nl})t) \tag{1.14}$$

donde

$$R_{klmn} = -\delta_{ln} \sum_r \Gamma_{krrm}^+ + \Gamma_{nlkm}^+ + \Gamma_{nlkm}^- - \delta_{km} \sum_r \Gamma_{nrrl}^- \tag{1.15}$$

eliminando las frecuencias rápidas y quedándose solo con los términos para los cuales $\omega_{km} + \omega_{nl} = 0$ obtenemos la ecuación de Bloch Redfield [14]

$$\dot{\rho}_{kl}(t) = -i\omega_{kl}\rho_{kl}(t) - \sum_{kl} R_{klmn}\rho_{kl}(t). \tag{1.16}$$

1.2.2. Ecuación maestra en la forma de Linblad

En la sección anterior se mostró el formalismo semiclásico de Bloch Redfield, partiendo de los mismos supuestos, se pueden obtener las ecuaciones que describen el comportamiento completamente cuántico de un sistema, estas son las ecuaciones que describen la dinámica disipativa y que dan cuenta de los dos procesos más importantes a nivel cuántico, como lo son la decoherencia y el desentrelazamiento. En particular, estamos interesados en la evolución del desentrelazamiento de un sistema bipartito, el cual se compone de dos sistemas efectivos de dos qubits, cada uno interactuando con su propio reservorio, sin interacción entre ellos y partiendo de un estado entrelazado. El Hamiltoniano que describe los dos sistemas y sus respectivos reservorios es de la forma

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b \\
&+ \sum_k \hbar\nu_k^a c_k^\dagger c_k + \sum_k \hbar \left[g_k^a a c_k^\dagger + g_k^{a*} a^\dagger c_k \right] \\
&+ \sum_k \hbar\nu_k^b d_k^\dagger d_k + \sum_k \hbar \left[g_k^b b d_k^\dagger + g_k^{b*} b^\dagger d_k \right], \quad (1.17)
\end{aligned}$$

donde a, a^\dagger and b, b^\dagger describen a cada modo, y c_k, c_k^\dagger y d_k, d_k^\dagger describen a los reservorios. Este Hamiltoniano se puede escribir como dos hamiltonianos independientes, para el sistema a y para el sistema b

$$H = H_s^a + H_r^a + V_I^a + H_s^b + H_r^b + V_I^b = H_a + H_b, \quad (1.18)$$

Si insertamos este Hamiltoniano en ecuación (1.8), y notando en esta ecuación que $\rho(t) = \rho_s(t)\rho_r^a(0)\rho_r^b(0)$, donde $\rho_s(t)$ describe el estado en el espacio de Hilbert producto tensorial de ambos qubits $H_a \otimes H_b$, además si consideramos el caso del límite a cero temperatura, la ecuación maestra para el sistema total viene dada

por

$$\dot{\rho} = \sum_{1,2} \frac{\Gamma_i}{2} \left[2A_i \rho A_i^\dagger - A_i^\dagger A_i \rho - \rho A_i^\dagger A_i \right], \quad (1.19)$$

donde A_i, A_i^\dagger describen los operadores de aniquilación y creación para los modos bosónicos a y b .

1.3. Entrelazamiento y medidas de entrelazamiento

En esta sección se expondrán las medidas y criterios que existen para describir el entrelazamiento para estados puros o mixtos en sistemas compuestos de dos partes, ya sea en sistemas constituidos por dos qubits ($2 \otimes 2$), cómo para sistemas en dimensiones superiores (más allá de $2 \otimes 3$). Estos criterios son derivados de los llamados mapeos positivos, los cuales son requerimientos esenciales cuando se quiere afrontar el problema del entrelazamiento y separabilidad para sistemas cuánticos [15].

1.3.1. Conceptos preliminares

Un sistema compuesto es aquel que consiste de dos (bipartitos) o más partes (multipartitos), el más simple es el que constituyen dos qubits. Los llamaremos sistemas A y B . En las teorías de la comunicación cuántica y el entrelazamiento la convención es pensar en dos subsistemas cada uno en posesión de los observadores Alice y Bob. Cualquier estado de cada uno de estos observadores se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_A &= a|0\rangle_A + b|1\rangle_A \\ |\Phi\rangle_B &= c|0\rangle_B + d|1\rangle_B, \end{aligned} \quad (1.20)$$

con $|a|^2 + |b|^2 = 1$ y $|c|^2 + |d|^2 = 1$. El estado total de los dos subsistemas es simplemente el estado producto tensorial

$$|\psi_{prod}\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B \quad (1.21)$$

tal estado es llamado estado puro, pero estos estados producto no son los unicos físicamente realizables. En general cualquier superposición es realizable, así el estado puro más general se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_i^{d_A} \sum_j^{d_B} t_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B \quad (1.22)$$

donde $\sum_i^{d_A} \sum_j^{d_B} |t_{ij}|^2 = 1$ y los conjuntos $\{|i\rangle_A\}$ y $\{|j\rangle_B\}$ son bases ortonormales de los respectivos subsistemas.

Los estados puros que juegan un rol fundamental en las teorías mencionadas son el estado singlete

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) \quad (1.23)$$

y los tres estados correspondientes al triplete

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) \\ |\Phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \\ |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle), \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde hemos usado la convención $|i\rangle|j\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$. Estos cuatro estados son los llamados estados de Bell o estados *EPR*. Juntos forman una base ortonormal en el espacio de Hilbert de dos qubits, son llamados la base de Bell.

Notemos aquí un hecho fundamental, ninguno de los cuatro estados puros de la base de Bell se puede expresar como un producto directo de estados

pertenecientes a los subsistemas A y B como en (1.21), esto define lo que se entiende por estados separables y estados entrelazados. El estado en el ec. (1.21) es un estado puro separable, mientras que los cuatro estados de Bell son estados puros entrelazados, de hecho estos son estados puros maximalmente entrelazados y uno puede ser transformado en el otro mediante operaciones unitarias locales aplicadas a ambos subsistemas.

Ahora definamos los estados maximalmente entrelazados para un sistema compuesto de dos subsistemas de dimensión d , estos se pueden definir a partir de [16]

$$\begin{aligned} |\Psi_{\alpha,\beta}\rangle &= GXOR_{12}(F_1|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} e^{i\frac{2\pi}{d}\alpha k} |k\rangle_1 |k \ominus \beta\rangle_2, \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde $GXOR_{12}$ se define por

$$GXOR_{12}|i\rangle_1|j\rangle_2 = |i\rangle_1|i \ominus j\rangle_2 \quad (1.26)$$

y $i \ominus j$ denota la diferencia $i - j$ modulo (d), $i, j = 0, 1, \dots, d - 1$ con $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, d$, lo cual significa que si $j \leq i$ entonces $i \ominus j = i - j$, en cambio si $j > i$ entonces $i \ominus j = d - (j - i)$. Usando este protocolo podemos generar los estados maximalmente entrelazados para un sistema compuesto de dos qutrits. Asi para este sistema, los 9 estados maximalmente entrelazados vienen dados por

$$\begin{aligned}
|\psi_{0,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle + |2\rangle|2\rangle) \\
|\psi_{1,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|0\rangle + e^{\frac{2i\pi}{3}}|1\rangle|1\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|2\rangle|2\rangle) \\
|\psi_{2,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|0\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|1\rangle|1\rangle + e^{\frac{8i\pi}{3}}|2\rangle|2\rangle) \\
|\psi_{0,1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|2\rangle + |1\rangle|0\rangle + |2\rangle|1\rangle) \\
|\psi_{1,1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|2\rangle + e^{\frac{2i\pi}{3}}|1\rangle|0\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|2\rangle|1\rangle) \\
|\psi_{2,1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|2\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|1\rangle|0\rangle + e^{\frac{8i\pi}{3}}|2\rangle|1\rangle) \\
|\psi_{0,2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|2\rangle + |2\rangle|0\rangle) \\
|\psi_{1,2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|1\rangle + e^{\frac{2i\pi}{3}}|1\rangle|2\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|2\rangle|0\rangle) \\
|\psi_{2,2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle|1\rangle + e^{\frac{4i\pi}{3}}|1\rangle|2\rangle + e^{\frac{8i\pi}{3}}|2\rangle|0\rangle)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

definiremos a los 3 primeros estados como el grupo a , que contienen a lo más 4 excitaciones $\{|\Psi_{\alpha,0}\rangle\}$ y los 6 estados restantes como el grupo b $\{|\Psi_{\alpha,1}\rangle, |\Psi_{\alpha,2}\rangle\}$ con $\alpha = 0, 1, 2$ que contienen a lo más 3 excitaciones.

1.3.2. Entrelazamiento para estados puros bipartitos

Otra manera de definir un estado cuántico puro, es aquel para el cual se satisface la siguiente relación

$$\rho_{puro} = \rho_{puro}^2, \tag{1.28}$$

donde hemos definido el estado puro en términos de la matriz densidad $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. En general, un estado que no satisfaga esta relación se dice que es un estado mixto.

Una primera medida para el entrelazamiento de estados puros viene de la observación que si tomamos la traza parcial sobre cualquiera de los dos subsistemas, esto es,

$$\begin{aligned}\rho_A &= tr_B\{\rho\} \\ \rho_B &= tr_A\{\rho\}\end{aligned}\tag{1.29}$$

estos resultan ser estados mixtos para los subsistemas, de aqui se puede definir la entropia lineal $S(\rho_i) = -tr\{\rho_i \log \rho_i\}$, con $i = A, B$, de aqui se puede inferir que si

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0\tag{1.30}$$

estamos en presencia de un estado separable, mientras que si

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = \frac{1}{2},\tag{1.31}$$

entonces tenemos un estado máximalmente entrelazado.

En particular, para un estado puro de la forma (1.22) se encontró una forma analítica para cuantificar el entrelazamiento [17]. Esta se debe a la observación de que para un sistema bipartito compuesto por dos qubits siempre se puede aplicar la descomposición del valor singular con lo cual el estado se escribe en una base diagonal

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i\rangle |i\rangle,\tag{1.32}$$

donde los autovalores son llamados coeficientes de schmidt. El número de estos autovalores se llama número de Schmidt. Como para un estado puro siempre existe esta descomposición, entonces se puede definir una medida para el entrelazamiento en términos de estos coeficientes, esta medida es la llamada concurrencia para estados puros y se escribe como

$$C(\psi) = |\langle \psi^* | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi \rangle|\tag{1.33}$$

1.3.3. Entrelazamiento para estados mixtos bipartitos

Siguiendo la discusión precedente para los estados puros, el siguiente paso es cuantificar el entrelazamiento para estados mixtos de dos qubits, este problema es aún más difícil, porque la descomposición en el valor singular ya no existe, entonces para definir una medida de entrelazamiento debemos partir directamente de la definición que daremos a continuación.

Comenzaremos definiendo lo que se entiende por estados separables, esta definición se debe a Werner [18]. Un estado es separable si se puede escribir de la siguiente forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad (1.34)$$

donde ρ_A (ρ_B) son estados que pertenecen al sistema A (B).

En general, el entrelazamiento se define a partir del entrelazamiento de formación [19] que es el mínimo sobre todas las descomposiciones en estados puros $\{p_i|\psi_i\rangle\}$, esto es, para un estado ρ dado por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (1.35)$$

el entrelazamiento viene dado por

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E[|\psi_i\rangle], \quad (1.36)$$

esto significa la cantidad mínima de e-bits o pares entrelazados (singletes), con que se construye el estado cuántico.

Para un estado arbitrario, como la mezcla estadística ecuación (1.35), debemos hacer la minimización sobre todos los ensambles para obtener la medida de entrelazamiento. Wootters demostró que esta minimización se puede hacer para el caso de dos qubits y se puede dar en términos de las raíces de los autovalores,

ordenados en forma decreciente, de $\rho\tilde{\rho}$, donde $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$, así tenemos que [17]

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (1.37)$$

En los capítulos 2 y 4 usaremos esta medida de entrelazamiento para cuantificar las correlaciones cuánticas de nuestros sistemas.

1.3.4. Entrelazamiento para estados bipartitos en dimensiones superiores

En general hacer el proceso de minimización para dimensiones superiores es una tarea muy demandante, afortunadamente existen criterios basados en papeos positivos que permiten abordar el problema del entrelazamiento y tener medidas eficientes operacionalmente. El criterio más importante es el de la traspuesta parcial positiva, con este criterio se pueden definir estados llamados estados entrelazados libres y estados entrelazados confinados [20], este criterio divide estas dos clases de estados en dimensiones superiores, nos referiremos a él con más detalle más adelante.

El entrelazamiento que contiene un estado cuántico puro de dimensión $m \otimes n$, se puede cuantificar a través de la medida llamada Tangle [21]. El Tangle se define como

$$\tau_{AB} = 2\nu_A\nu_B(1 - \text{tr}(\rho_A^2)) \quad (1.38)$$

donde ρ_A es el operador densidad reducido, que se obtiene trazando sobre el subsistema B . Los coeficientes ν_A, ν_B son factores de escala arbitrarios que dependen de la dimensión de cada subsistema A y B .

Antes de pasar a los estados mixtos en dimensiones superiores definamos lo que se entiende por mapeos positivos.

Un mapeo positivo $L : \Lambda\{H\} \rightarrow \Lambda\{H\}$ con $H \in H^{(1)} \otimes H^{(2)}$, es una transformación tal que

$$L(\rho) \geq 0 \quad \forall \quad \rho \geq 0, \quad (1.39)$$

donde $\rho \in H^{(1)} \otimes H^{(2)}$ y $\rho \geq 0$ significa que su espectro es positivo.

Con esta definición podemos comenzar con la descripción de estados mixtos. Cuantificar el entrelazamiento para un sistema bipartito que evoluciona como un estado mixto es uno de los problemas abiertos más difíciles de resolver. Solo en trabajos recientes expresiones analíticas para la cota inferior del entrelazamiento de formación EOF [22] para sistemas cuánticos con dimensiones $m \otimes n$ se ha reportado. Ha sido encontrado que la cota inferior para el entrelazamiento viene dada por

$$E(\rho) \geq \begin{cases} 0 & \text{if } \Lambda = 1, \\ H_2[\gamma(\Lambda)] + [1 - \gamma(\Lambda)] \log_2(m-1) & \text{if } \Lambda \in \left[1, \frac{4(m-1)}{m}\right], \\ \frac{\log_2(m-1)}{m-2}(\Lambda - m) + \log_2(m) & \text{if } \Lambda \in \left[\frac{4(m-1)}{m}, m\right], \end{cases} \quad (1.40)$$

donde m es la dimensión del primer subsistema, γ se escribe como

$$\gamma(\Lambda) = \frac{1}{m^2} \left[\sqrt{\Lambda} + \sqrt{(m-1)(m-\Lambda)} \right]^2 \quad (1.41)$$

con $\Lambda = \max(\|\rho^{TA}\|, \|R(\rho)\|)$ y $H_2(x) = x \log(x) - (1-x) \log(1-x)$, donde $\|\cdot\|$ representa la norma de la traza tal que $\|G\| = \text{tr}(GG^\dagger)^{\frac{1}{2}}$. La matriz ρ^{TA} es la traspuesta parcial con respecto al segundo subsistema B , esto es, $\rho_{ik,jl}^{TA} = \rho_{il,jk}$, y la matriz $R(\rho)$ se define como $R(\rho)_{ij,kl} = \rho_{ik,jl}$.

Como se mencionó anteriormente, la expresión para la cota inferior del entrelazamiento combina el criterio de la traspuesta parcial positiva (PPT) con el criterio del realinamiento. El criterio PPT dice que $\rho^{TA} \geq 0$ para un estado

separable [23]. Además, $\rho^T \geq 0$ (osea satisface ec. (1.39)) es también suficiente para la separabilidad de sistemas bipartitos $2 \otimes 2$ y $2 \otimes 3$ [24].

Por otro lado el criterio del realinamiento dice que la versión realineada de ρ , denotada por $R(\rho)$, se debe satisfacer para un estado separable $\|R(\rho)\| \leq 1$ [25].

Capítulo 2

Efectos de decoherencia inducidos por ruidos clásicos sobre el entrelazamiento de dos qubits

En este capítulo estudiaremos las propiedades del entrelazamiento cuántico de un sistema compuesto de dos qubits, los cuales se acoplan a un campo externo fluctuante, que puede ser considerado como un ruido clásico [88]. Además, ambos qubits se acoplan bajo una interacción de intercambio. Se estudiará el problema de la generación dinámica de entrelazamiento cuántico partiendo de diferentes condiciones iniciales. Finalmente, se evaluará la tasa a la cual el entrelazamiento se pierde usando la concurrencia [19].

2.1. Introducción

La caracterización del entrelazamiento cuántico entre un sistema compuesto por dos partes, es uno de los problemas fundamentales en el ámbito actual de la información y computación cuántica [3, 26, 27]. El mayor desafío en el presente status de investigación en estos campos, es la búsqueda de sistemas físicos elementales para almacenar la información cuántica e implementar operaciones lógicas. El principal problema que enfrentan estos sistemas, es su inevitable interacción con el medio que los rodea, el cual afecta de manera irreversible la coherencia y el entrelazamiento cuántico del sistema [1]. En este sentido, la investigación actual ha derivado en la creación de mecanismos que supriman los efectos producidos por el reservorio, es así como se han desarrollado diferentes esquemas y métodos, como por ejemplo, corrección de errores [28], subespacios libres de decoherencia [29] y efecto zeno cuántico [30] y más recientemente, se ha explorado la posibilidad de suprimir la decoherencia producida por fluctuaciones magnéticas clásicas [31].

Por otro lado, las tasas de decaimiento reducidas podrían ser importantes con relación al almacenamiento de información cuántica. La decoherencia y disipación relacionadas a este problema han sido estudiadas usando un modelo general para junturas Josephson, nanomagnetos acoplados y para impurezas Condo interactuantes [32]. Un modelo similar ha sido estudiado en referencia [33] para un qubit cargado en una juntura Josephson, usando el formalismo de Bloch-Redfield. El problema ha sido estudiado también en qubits unidimensionales acoplados mediante interacción de intercambio [34, 35]. En particular la predicción de estados maximalmente entrelazados ha sido predicha [34].

En este capítulo, estudiaremos los efectos debidos a fluctuaciones en campos magnéticos sobre el entrelazamiento de dos qubits interactuando a través de

la interacción de intercambio de Heisenberg. Analizaremos cómo evoluciona el entrelazamiento partiendo de una condición inicial, donde el estado es separable.

2.2. Modelo

El Hamiltoniano que describe la interacción de intercambio entre dos qubits acoplados a campos magnéticos externos, está dado por

$$H = \sum_{a,b=x,y,z} \left\{ \sum_{i=1,2} \sigma_a^i [B_a^i + h_a^i(t)] + g_{ab} \sigma_a^1 \otimes \sigma_b^2 \right\}, \quad (2.1)$$

donde los qubits están descritos por las matrices de Pauli $\sigma_a^i (i = 1, 2)$. Cada qubit está acoplado a un campo magnético local \vec{B}^i y a una fuente externa de ruido $\vec{h}^i(t)$. La parte del Hamiltoniano sin ruido ha sido estudiada con el propósito de buscar estados, los cuales podrían ser menos afectados por ruidos clásicos [31]. En este sentido, la posibilidad de encontrar tasas de decaimiento reducidas está asociada a hamiltonianos con espectro doblemente degenerado. Así, una elección conveniente para el campo magnético es $\vec{B}^i = (\Delta_i, 0, 0)$ y las fluctuaciones $\vec{h}^i(t) = (0, 0, h_i(t))$, esto es debido a que para el caso de junturas Josephson, las corrientes presentes en el baño que aporta los pares de Cooper están en un plano y generan fluctuaciones perpendiculares a él. La parte fluctuante representa dos reservorios disipativos descorrelacionados, es decir $\langle h_1(t)h_2(0) \rangle = 0$. A continuación nos restringiremos a este caso y elegiremos un acoplamiento diagonal $g_{ab} = g_a \delta_{ab}$ y $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta/2$. Así, el hamiltoniano H_0 sin ruido en la

base $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ viene dado por:

$$H_0 = \begin{pmatrix} g_z & \frac{\Delta}{2} & \frac{\Delta}{2} & g_x - g_y \\ \frac{\Delta}{2} & -g_z & g_x + g_y & \frac{\Delta}{2} \\ \frac{\Delta}{2} & g_x + g_y & -g_z & \frac{\Delta}{2} \\ g_x - g_y & \frac{\Delta}{2} & \frac{\Delta}{2} & g_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El formalismo general para describir la evolución de un sistema cuántico bajo la interacción con un reservorio está bien entendida desde el punto de vista de la teoría de sistemas cuánticos abiertos [4, 5], cuando el reservorio está descrito por un baño térmico. Sin embargo, para el caso de un ruido clásico aleatorio el formalismo de Bloch-Redfield [14] nos entrega un cuadro alternativo para estudiar la dinámica. La ecuación maestra en la base de autoestados de H_0 está dada por (1.16)

$$\dot{\rho}_{nm}(t) = -i\omega_{nm}\rho_{nm}(t) - \sum_{kl} R_{nmkl}\rho_{kl}(t), \quad (2.3)$$

donde $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$ y

$$R_{nmkl} = \delta_{lm} \sum_r \Lambda_{nrrk} + \delta_{nk} \sum_r \Lambda_{lrrm}^* - \Lambda_{lmnk} - \Lambda_{knml}^*,$$

son las partes reales de los elementos de matriz del tensor de relajación

$$\text{Re}\Lambda_{lmnk} = \frac{1}{8}S(\omega_{nk}) [\sigma_{z,lm}^1 \sigma_{z,nk}^1 + \sigma_{z,lm}^2 \sigma_{z,nk}^2].$$

A continuación usaremos una densidad espectral ohmica dada por $S(\omega) = \alpha\omega \coth(\omega/2T)$, que es el teorema de Nyquist [6] para un ruido producido por corrientes en equilibrio térmico, el cual ya ha sido considerado por otros autores [31, 35]. Para junturas Josephson tenemos que $\alpha = \frac{4e^2 R}{\pi\hbar} \sim 10^{-3}$ [36] (se ha colocado el valor para $R = 6\Omega$, el cual es un valor típico para la resistencia de la

juntura Josephson) y hemos asumido también que ($\hbar = k_B = 1$). Estamos interesados en estudiar la solución a este problema, partiendo de condiciones iniciales apropiadas. Por ejemplo, estamos principalmente interesados en la generación de entrelazamiento cuando el sistema esta inicialmente preparado en estados separables, tales como, $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}, \{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$. Una inspección simple de los autovalores y las autofunciones de H_0 , sugiere que podemos reducir la complejidad del sistema eligiendo apropiadamente los parametros físicos. En este caso, hemos encontrado dos casos de interés donde se obtiene degeneración espectral. El primer caso exhibe una degeneración espectral, dada por

$$(i) \quad \begin{aligned} g_x &= \Delta/2, \quad g_y = g_z = \Delta \\ E_1 = E_3 &= \frac{3}{2}\Delta, \quad E_2 = -\frac{5}{2}\Delta, \quad E_4 = -\frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

El segundo caso exhibe una doble degeneración espectral

$$(ii) \quad \begin{aligned} g_x &= 0, \quad g_y = g_z = \Delta/2 \\ E_1 = E_3 &= \Delta, \quad E_2 = E_4 = -\Delta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los autoestados de H_0 son independientes de g_x y sólo dependen de la diferencia entre $g_y - g_z$, así que para ambos casos los autoestados de H_0 están dados por:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{2} [|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle] \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle] \\ |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle] \\ |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{2} [|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A continuación, estudiaremos la generación de entrelazamiento en ambos casos de degeneración espectral. Evaluaremos la concurrencia como una función del tiempo y calcularemos la tasa a la cual el entrelazamiento se pierde.

2.3. Generación de entrelazamiento

Escribamos el sistema de ecuaciones (2.3) en la base de autoestados del hamiltoniano para el conjunto de parámetros que lleva a la ecuación (2.6). Es importante notar que para un par de niveles degenerados, la densidad de ruido espectral es $S(\omega_{ij}) \sim \alpha T$, tal que, para temperaturas bajas podemos asumir que $S(\omega_{ij}) \sim 0$. Para un par de niveles no degenerados, la densidad espectral viene dada aproximadamente por $S(\omega_{ij}) \sim \alpha \omega$. Con esta información, estableceremos el sistema de ecuaciones correspondientes a los casos (i) or (ii). Por ejemplo el sistema de ecuaciones que resulta para el caso (i) está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{11} &= -4\Delta\alpha\rho_{11} + 4\Delta\alpha\rho_{22} \\
\dot{\rho}_{22} &= -6\Delta\alpha\rho_{22} + 4\Delta\alpha\rho_{11} + 2\Delta\alpha\rho_{44} - 3\Delta\alpha(\rho_{41} + \rho_{14}) \\
\dot{\rho}_{33} &= -2\Delta\alpha\rho_{33} + 2\Delta\alpha\rho_{44} + \Delta\alpha(\rho_{14} + \rho_{41}) \\
\dot{\rho}_{44} &= -4\Delta\alpha\rho_{44} + 2\Delta\alpha\rho_{22} + 2\Delta\alpha\rho_{33} + 2\Delta\alpha(\rho_{14} + \rho_{41}) \\
\dot{\rho}_{12} &= -(5\Delta\alpha + 4i\Delta)\rho_{12} + 4\Delta\alpha\rho_{21} - 3\Delta\alpha\rho_{24} \\
\dot{\rho}_{13} &= -3\Delta\alpha\rho_{13} + \Delta\alpha\rho_{34} \\
\dot{\rho}_{14} &= -(4\Delta\alpha + 2i\Delta)\rho_{14} + 2\Delta\alpha\rho_{11} - 3\Delta\alpha\rho_{22} + \Delta\alpha\rho_{33} \\
\dot{\rho}_{23} &= -(4\Delta\alpha - 4i\Delta)\rho_{23} \\
\dot{\rho}_{24} &= -(5\Delta\alpha - 2i\Delta)\rho_{24} + 2\Delta\alpha\rho_{42} - 3\Delta\alpha\rho_{12} + 2\Delta\alpha\rho_{21} \\
\dot{\rho}_{34} &= -(3\Delta\alpha + 2i\Delta)\rho_{34} + 2\Delta\alpha\rho_{43} + \Delta\alpha\rho_{13} + 2\Delta\alpha\rho_{31}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

En este problema debemos distinguir dos escalas de tiempo relevantes que dominan la dinámica. Existe un comportamiento rápidamente oscilante asociado al parámetro Δ , el cual provoca transiciones entre los estados $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$. Por otro lado, tenemos una escala de tiempos lenta $\Delta\alpha$ asociada a los campos fluctuantes, la cual provee el decaimiento de la coherencia. Una solución analítica

exacta es difícil de obtener. Sin embargo, considerando las dos escalas de tiempo diferentes, podemos obtener una solución aproximada usando un acercamiento perturbativo en la escala de tiempos lenta $\Delta\alpha$, asumiendo que la matriz densidad se puede expandir como

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}^{(0)} + \rho_{ij}^{(1)} + \dots \quad (2.8)$$

donde $\rho_{ij}^{(k)}$ es el k -ésimo orden de perturbación en $\Delta\alpha$. Reescribiendo el sistema en una notación conveniente, esto es,

$$\dot{\rho}^{(0)} + \dot{\rho}^{(1)} + \dots = (L_0 + L_1)(\rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \dots), \quad (2.9)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^{(0)} &= L_0 \rho^{(0)} \\ \dot{\rho}^{(1)} &= L_0 \rho^{(1)} + L_1 \rho^{(0)} \\ &\dots \quad \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde L_0 es la matriz a orden cero en $\Delta\alpha$ y L_1 es la matriz a primer orden en $\Delta\alpha$ obtenida de la Ecuación (2.7). Las soluciones formales pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \rho^{(0)}(t) &= e^{L_0 t} \rho^{(0)}(0) \\ \rho^{(1)}(t) &= e^{L_0 t} \rho^{(1)}(0) + e^{L_0 t} \int_0^t e^{-L_0 \tau} L_1 \rho^{(0)}(\tau) d\tau \\ &\dots \quad \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Las condiciones iniciales son independientes de $\Delta\alpha$, tal que $\rho_{ij}^{(k)}(0) = 0$ para $i, j = 1, \dots, 4$ y $k \geq 1$.

Partiendo de este sistema de ecuaciones, podemos enfocarnos en algún caso de interés. Por ejemplo, consideremos un estado inicial separable $|\uparrow\uparrow\rangle$. Este estado puede ser reescrito en la base de autoestados (2.6), dando

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\Psi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\Psi_3\rangle + \frac{1}{2} |\Psi_4\rangle \quad (2.12)$$

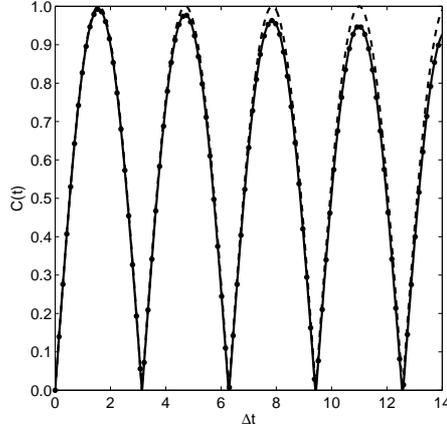


Figura 2.1: Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en el estado $|\uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto para $\alpha = 10^{-3}$; Línea segmentada: cálculo numérico exacto para $\alpha = 0$; Línea punteada: cálculo numérico aproximado partiendo de Ec.(2.11).

Este estado no tiene componente inicial en el estado $|\Psi_2\rangle$. De las soluciones dadas por las ecuaciones (2.11), vemos que la evolución dinámica a orden cero en $\Delta\alpha$ ocurre en un subespacio restringido $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle\}$ donde los elementos que involucran a $|\Psi_2\rangle$ aparecen sólo como una corrección a primer orden en $\Delta\alpha$ para ρ_{22} . Con estas soluciones podemos evaluar el efecto del ruido sobre la evolución del entrelazamiento.

El entrelazamiento de un sistema bipartito será evaluado usando la definición de concurrencia dada por $C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$, donde λ_i 's son las raíces cuadradas de los autovalores de the matrix $\rho\tilde{\rho}$ ordenados en orden decreciente, donde $\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ [17]. La figura (2.1) muestra la solución numérica exacta y la aproximada obtenidas de la ecuación (2.11), comparada con el caso sin ruido $\alpha = 0$. Una primera observación de la figura (2.1), es que

el período de oscilación para la concurrencia es el mismo para ambos casos y su valor máximo se alcanza en el tiempo $t_n = (2n+1)\pi/2\Delta$ con $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Una expresión exacta para la concurrencia es difícil de obtener desde las soluciones para la dinámica. Sin embargo, podemos calcular una expresión perturbativa para la concurrencia partiendo de la solución perturbativa en (2.11). Esta expresión como función de $\Delta\alpha$ viene dada por

$$\rho\tilde{\rho} = \rho^{(0)}(t)\tilde{\rho}^{(0)}(t) + \rho^{(0)}(t)\tilde{\rho}^{(1)}(t) + \rho^{(1)}(t)\tilde{\rho}^{(0)}(t) \dots$$

que en una notación más conveniente, se escribe como

$$\rho\tilde{\rho} = M^{(0)}(t) + M^{(1)}(t) + M^{(2)} + \dots \quad (2.13)$$

donde $M^{(k)}(t)$ son las contribuciones de k -ésimo orden en $\Delta\alpha$ en el producto $\rho\tilde{\rho}$. Los autovectores y autovalores de $\rho\tilde{\rho}$ en la ecuación (2.13) se pueden calcular usando un acercamiento perturbativo en el parámetro $\Delta\alpha$. Resolviendo el problema a orden cero $M^{(0)}(t) = \rho^{(0)}(t)\tilde{\rho}^{(0)}(t)$ y luego calculando las correcciones en $\Delta\alpha$ [37], obtenemos

$$C_{\uparrow\uparrow}^{(i)}(t) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2t\Delta) - \alpha \left(\frac{1}{2} \sin 2t\Delta + 2t\Delta - 3t\Delta \cos 2t\Delta \right) - \frac{3}{2}\alpha \left(t\Delta - \frac{1}{2} \sin 2t\Delta \right)}. \quad (2.14)$$

La figura (2.2) compara esta expresión para la concurrencia con el cálculo numérico exacto.

El primer término dentro de la raíz cuadrada corresponde a la evolución periódica del entrelazamiento en el caso sin ruido. El estado que se genera al tiempo $t_n = (2n+1)\pi/2\Delta$ con $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ viene dado por

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}(t_e)\rangle = \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_3\rangle - \frac{1}{2}|\Psi_4\rangle.$$

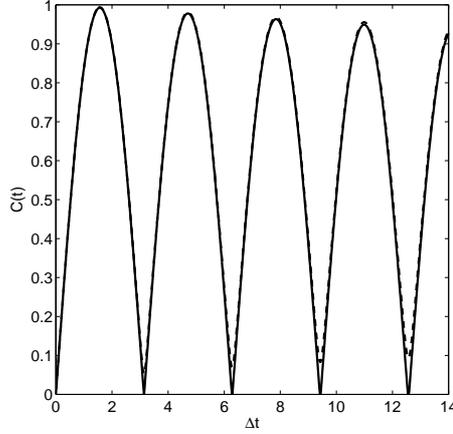


Figura 2.2: Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en $|\uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.

En la base usual, este estado se escribe como:

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}(t_n)\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)|\downarrow\rangle, \quad (2.15)$$

esto es, un estado de Bell rotado en la base del primer qubit. El efecto del ruido sobre esta clase de estados, puede ser tomado en cuenta evaluando la tasa de concurrencia en los tiempos $t_n = (2n + 1)\pi/2\Delta$ obteniendo:

$$C_{\uparrow\uparrow}^{(i)}(t_n) = 1 - 4\alpha\Delta t_n, \quad (2.16)$$

donde podemos definir la tasa a la cual el máximo de entrelazamiento se pierde $\Gamma_{\uparrow\uparrow}^{(i)} = 4\alpha\Delta$.

También, se obtiene una situación similar para el mismo conjunto de parámetros si el estado inicial es ahora el estado desnudo $|\downarrow\downarrow\rangle$. En este caso, la evolución unitaria conducirá el estado

$$|\Psi_{\downarrow\downarrow}(t_n)\rangle = \frac{1}{2}|\Psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Psi_3\rangle - \frac{1}{2}|\Psi_4\rangle$$

el cual es

$$|\Psi_{\downarrow\downarrow}(t_n)\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)|\downarrow\rangle. \quad (2.17)$$

El decaimiento correspondiente del entrelazamiento en los tiempos $t_n = (2n + 1)\pi/2\Delta$ es el mismo que antes $C_{\downarrow\downarrow}^{(ii)}(t_e) = 1 - 4\alpha\Delta t_n$.

Elijamos el caso (ii), el cual corresponde a estados doblemente degenerados dados por $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_3\rangle\}$ y $\{|\Psi_2\rangle, |\Psi_4\rangle\}$. Como hemos mencionado, en este caso la dinámica de los dos qubits bajo un reservorio se ve menos afectada por el ruido [31]. Esto se ilustra en la figura (2.3) donde un cálculo numérico exacto para la evolución del entrelazamiento, partiendo del estado $|\uparrow\uparrow\rangle$, se compara con la expresión perturbativa obtenida para la concurrencia

$$\begin{aligned} C_{\uparrow\uparrow}^{(ii)}(t) &= \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2t\Delta) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \cos 2t\Delta} \left(\frac{3}{4} \sin 4t\Delta - \frac{9}{8} \sin 2t\Delta - 2t\Delta \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{8} \sin 6t\Delta + 3t\Delta \cos 2t\Delta - t\Delta \cos 4t\Delta \right) \right]^{1/2} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \left(t\Delta - \frac{1}{2} \sin 2t\Delta \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como se puede deducir de esta figura, el tiempo donde se alcanza el estado aproximadamente entrelazado de dos qubits partiendo de el estado inicial $|\uparrow\uparrow\rangle$ (lo mismo ocurre para $|\downarrow\downarrow\rangle$), es el mismo que antes, $t = t_e = \pi/(2\Delta)$, y conduce también a los mismos estados maximalmente entrelazados (2.15) y (2.17) respectivamente. La tasa de decaimiento para este caso, se obtiene evaluando $C_{\uparrow\uparrow}^{(ii)}(t)$ en los tiempos $t_n = (2n + 1)\pi/2\Delta$ de una forma similar a lo hecho para (2.14):

$$C_{\uparrow\uparrow}^{(ii)}(t_n) = 1 - 2\alpha\Delta t_n. \quad (2.19)$$

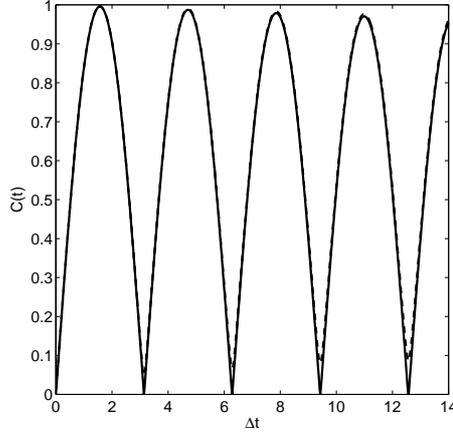


Figura 2.3: Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (ii) y los qubits inicialmente en $|\uparrow\uparrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada : cálculo perturbativo.

Cuando el estado inicial está en el subespacio $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$, la evolución depende si el acoplamiento entre los qubits se fija como (i) $g_x = \Delta/2, g_y = g_z = \Delta$ o (ii) $g_x = 0, g_y = g_z = \Delta/2$. Si escogemos el caso (i) y el sistema de dos qubits inicialmente en el subespacio $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$, la dinámica a orden cero ocurrirá en el subespacio de los tres autoestados no degenerados $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_4\rangle\}$. Las contribuciones en el estado $|\Psi_3\rangle$ aparecen sólo a primer orden para el elemento de matriz ρ_{33} . Las diferencias de energía entre los estados son 2Δ y 4Δ como se muestra en la Fig. (2.4a). Como mencionamos antes, cuando el sistema está inicialmente en el subespacio $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$, la contribución en el estado $|\Psi_2\rangle$ aparece a primer orden para el elemento de matriz ρ_{22} y a orden cero la evolución dinámica ocurre en el subespacio $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle\}$, donde los estados $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_3\rangle$ son degenerados. En este caso, las diferencias de energía entre estos estados son 2Δ . Así, las oscilaciones son más lentas que para el caso cuando el estado está inicialmente en el subespacio $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$. Por otro lado, para el caso (ii) de

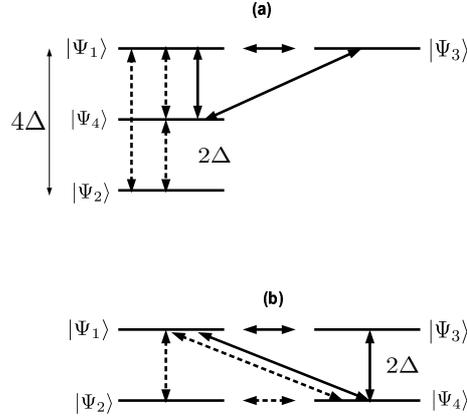


Figura 2.4: Esquema de niveles que muestra las transiciones entre los estados para (a): caso (i); (b): caso (ii). Líneas sólidas: el estado inicial está preparado en el subespacio $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$; Líneas segmentadas: el estado inicial está preparado en el subespacio $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$.

la Fig. (2.4b), podemos ver que, en términos de la energía, no es importante en cual de los subespacios se prepare el sistema inicialmente, dado que para ambos casos obtenemos transiciones idénticas en términos de las diferencias de energía entre los niveles que involucran en la dinámica. Este hecho explica por qué la concurrencia en el caso (i) oscila más rápido que en el caso (ii), cuando el sistema está preparado inicialmente en el subespacio $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$. Como se puede ver para el caso sin ruido ($\alpha = 0$), las concurrencias para los casos (i) y (ii) son $C_{\uparrow\downarrow}^{(i)}(t) = [(1 - \cos 6\Delta t)/2]^{1/2}$ y $C_{\uparrow\downarrow}^{(ii)}(t) = [(1 - \cos 2\Delta t)/2]^{1/2}$ respectivamente.

De la discusión precedente, es claro que la elección de los acoplamientos entre los qubits afectará el tiempo de las oscilaciones t_e del entrelazamiento, como también el estado entrelazado final. Para el caso (ii) y los qubits inicialmente en el estado $|\uparrow\downarrow\rangle$, tras un tiempo $t_e = \pi/(2\Delta)$ deberíamos obtener estados

maximalmente entrelazados, dados por:

$$|\Psi_{\uparrow\downarrow}(t_e)\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)|\downarrow\rangle. \quad (2.20)$$

Los efectos del reservorio se obtienen de la misma forma que en las discusiones previas, la concurrencia a primer orden en delta $\Delta\alpha$ viene dada por:

$$\begin{aligned} C_{\uparrow\downarrow}^{(ii)}(t) &= \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2t\Delta) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \cos 2t\Delta} \left(\frac{3}{4} \sin 4t\Delta - \frac{9}{8} \sin 2t\Delta - 2t\Delta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \sin 6t\Delta + 3t\Delta \cos 2t\Delta - t\Delta \cos 4t\Delta \right)^{1/2} \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2}(t\Delta - \frac{1}{2} \sin 2t\Delta) \right] = C_{\uparrow\downarrow}^{(ii)}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Evaluando esta expresión en los tiempos $t_n = (2n + 1)\pi/2\Delta$ obtenemos:

$$C_{\uparrow\downarrow}^{(ii)}(t_n) = 1 - 2\alpha\Delta t_n. \quad (2.22)$$

Por otro lado, para el mismo estado inicial pero considerando el caso (i) y $t_e = \pi/(6\Delta)$, el estado entrelazado esta dado por la expresión:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\uparrow\downarrow}(t_e)\rangle &= \frac{1}{4}(e^{-i\pi/3} - 1)[|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle] \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}e^{-i\pi/3} + \frac{1}{2}e^{i\pi/3} + \frac{1}{4} \right) |\uparrow\downarrow\rangle \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}e^{-i\pi/3} - \frac{1}{2}e^{i\pi/3} + \frac{1}{4} \right) |\downarrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde la concurrencia en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} C_{\uparrow\downarrow}^{(i)}(t) &= \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 6t\Delta) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{1 - \cos 6t\Delta} \left(\frac{3}{4} \sin 2t\Delta - \frac{9}{2}t\Delta + \frac{1}{2} \sin 4t\Delta - \frac{3}{2} \sin 6t\Delta \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \sin 12t\Delta - \frac{1}{4} \sin 14t\Delta + 7t\Delta \cos 6t\Delta - \frac{5}{2}t\Delta \cos 12t\Delta \right)^{1/2} \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2}(t\Delta + \frac{1}{2} \sin 2t\Delta) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

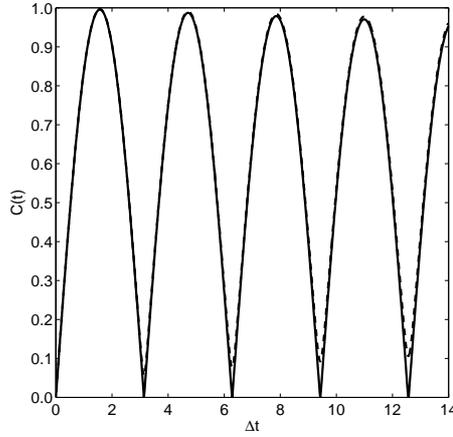


Figura 2.5: Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (ii) y los qubits inicialmente en $|\uparrow\downarrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.

Esto significa que alrededor del máximo, la concurrencia decae como:

$$C_{\uparrow\downarrow}^{(i)}(t_n) = 1 - 4\alpha\Delta t_n. \quad (2.25)$$

con $t_n = (2n + 1)\pi/6$. Si aplicamos el mismo procedimiento, pero el sistema inicialmente en el estado $|\downarrow\uparrow\rangle$, es posible encontrar también para tiempos $t_e = \pi/(2\Delta)$ y $t_e = \pi/(6\Delta)$ estados entrelazados para ambos casos (i) y (ii).

2.4. Conclusión

En este capítulo, hemos estudiado la evolución del entrelazamiento cuántico en un sistema de dos qubits acoplados mediante la interacción de intercambio de Heisemberg, los qubits han sido inicialmente preparados en estados separables como condiciones iniciales y sujetos a campos externos aleatorios. Hemos estudiado y caracterizado la pérdida de entrelazamiento cuántico debida a los

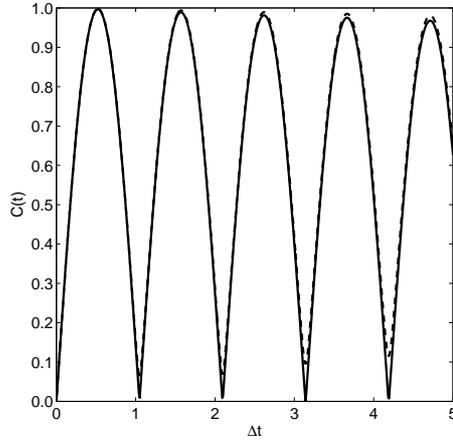


Figura 2.6: Evolución de la concurrencia $C(t)$ para el caso (i) y los qubits inicialmente en $|\uparrow\downarrow\rangle$. Línea sólida: cálculo numérico exacto; Línea segmentada: cálculo perturbativo.

efectos del reservorio, calculando la Concurrencia para un sistema bipartito. Hemos mostrado que mediante una elección apropiada de acoplamientos entre los qubits (g_x, g_y, g_z) , se pueden preparar estados altamente entrelazados. Este entrelazamiento y sus tiempos característicos de decaimiento son dependientes de la condición inicial. Aunque el caso estudiado es un caso particular para las elecciones de los parámetros de acoplamiento, hemos encontrado que en el caso de doble degeneración espectral, las tasas de decaimiento son más lentas que para los casos de solamente una degeneración espectral.

Capítulo 3

Cambios abruptos en la dinámica del desentrelazamiento cuántico

En este capítulo estudiaremos la evolución del entrelazamiento cuántico para sistemas bipartitos de dimensión d cada uno. Estudiaremos el caso de dos qutrits (sistemas de tres niveles) interactuando con sus respectivos reservorios a cero temperatura en el marco general de la dinámica markoviana [89]. Además, estudiaremos el caso de dos átomos de dos niveles interactuando con sus respectivos reservorios en el marco del modelo de Dicke.

3.1. Introducción

El entrelazamiento cuántico se ha convertido en uno de los conceptos y recursos fundamentales para Información y Computación cuántica [3], no solo por sus propiedades fundamentales interesantes sino que también por su potencial aplicación a criptografía cuántica [38, 39], teleportación cuántica [40], etc. Recientemente el interés por el comportamiento del entrelazamiento bajo

un reservorio disipativo ha atraído el interés por el descubrimiento de nuevas características, tal como la muerte súbita del entrelazamiento. Este fenómeno aparece cuando tenemos dos qubits, los cuales son afectados por sus respectivos reservorios descorrelacionados [41, 17]. En particular, este fenómeno ha sido estudiado para la clase de estados mixtos denominados estados X [72, 51] y para los estados de Werner [44].

Por otro lado sería interesante investigar qué pasa si consideramos con los sistemas cuando estos tienen mayor dimensión. Como es bien sabido, el contenido de entrelazamiento para un sistema compuesto por dos qubits esta bien caracterizado a través de la concurrencia [17, 54]. Sin embargo, una fórmula exacta para cuantificar el grado de entrelazamiento para un sistema bipartito de dimensiones arbitrarias ha sido un problema realmente difícil y sin solución hasta el momento. Para un sistema bipartito de dimensión arbitraria, en un estado puro, se ha propuesto una expresión para determinar su entrelazamiento, es el llamado tangle [21]. Para el caso más general de un estado mixto, solo muy recientemente, algunos criterios para cuantificar el entrelazamiento han aparecido [55, 56, 22]: (i) el criterio de la traspuesta parcial (criterio PPT) [23, 24] y (ii) el criterio del realinamiento [55, 56]. En un trabajo reciente [22], estos dos criterios se han unificado para dar una medida general para el entrelazamiento de formación y una expresión analítica para la cota inferior.

En este capítulo estudiamos la evolución del entrelazamiento para sistemas bipartitos usando la cota inferior para el entrelazamiento de formación propuesta por Chen *et al.* [22].

3.2. Dinámica del desentrelazamiento para qutrits fotonicos bajo disipación

Comenzaremos estudiando un sistema físico compuesto de dos cavidades, cada una acoplada independientemente a su propio reservatorio. Si consideramos el caso del límite de temperatura cero, la ecuación maestra para el sistema total esta dada por

$$\dot{\rho} = \sum_{1,2} \frac{\Gamma_i}{2} \left[2A_i \rho A_i^\dagger - A_i^\dagger A_i \rho - \rho A_i^\dagger A_i \right], \quad (3.1)$$

donde A_i, A_i^\dagger describen los operadores de aniquilación y creación para los modos bosónicos y ρ es una matriz densidad $3 \otimes 3$ en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ de ambos qutrits, las cuales representan a cavidades las cuales tienen 0, 1 ó 2 fotones respectivamente. En este marco físico, resultados numéricos muestran que $\|\rho^{TA}\| \geq \|R(\rho)\|$ para todos los tiempos, esto es, $\Lambda = \|\rho^{TA}\|$ en Ec. 1.40. Entonces, con el propósito de obtener expresiones analíticas para el entrelazamiento, nos enfocaremos en la cantidad $\Lambda = \|\rho^{TA}\|$.

Estamos interesados en cómo el mecanismo de decoherencia descrito por la Ec.(3.1) afecta el entrelazamiento del sistema $3 \otimes 3$ -dimensional. Como un punto de partida, podemos estudiar los efectos disipativos sobre la evolución del desentrelazamiento de todos los estados de Bell posibles que se puedan definir para dos qutrits. En la Fig.(3.1) se muestra, la evolución del entrelazamiento dada por 1.40 y la entropía lineal $s(t) = 1 - \text{tr} \rho_B^2$ para los nueve estados maximalmente entrelazados que se pueden formar de los dos qutrits. De cálculos numéricos, los nueve estados maximalmente entrelazados se pueden dividir en dos grupos, dependiendo de la porción del espacio de Hilbert que ellos ocupan inicialmente. Los dos grupos de estados maximalmente entrelazados aparecen de acuerdo al número de excitaciones que tienen inicialmente: (a) el primer grupo

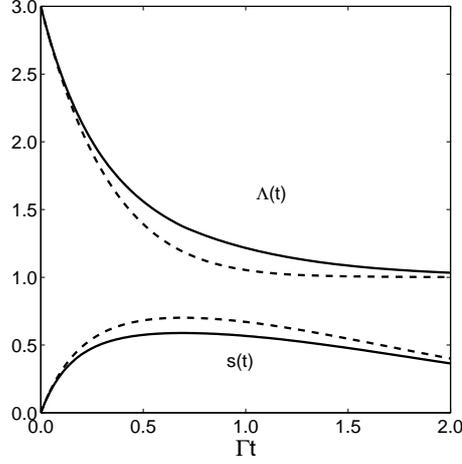


Figura 3.1: Evolución del EOF $E(t)$ y la entropía lineal $s(t)$ para los nueve estados maximalmente entrelazados. Línea sólida corresponde al grupo (a) de estados maximalmente entrelazados $\{|\Psi_{\alpha,0}\rangle\}$. Línea segmentada corresponde al grupo (b) de estados maximalmente entrelazados $\{|\Psi_{\alpha,1}\rangle, |\Psi_{\alpha,2}\rangle\}$ con $\alpha = 0, 1, 2$ ec. (1.27).

que contiene hasta cuatro excitaciones está compuesto por los estados $\{|\Psi_{\alpha,0}\rangle\}$, (b) el segundo grupo que contiene hasta tres excitaciones está compuesto por los estados $\{|\Psi_{\alpha,1}\rangle\}$, y compuesto por los estados $\{|\Psi_{\alpha,2}\rangle\}$, con $\alpha = 0, 1, 2$ ec. (1.27). Para ambos casos, podemos observar de la Fig. 3.1 que para los estados iniciales maximalmente entrelazados, el desentrelazamiento decrece asintóticamente.

Consideremos estudiar la evolución de estados iniciales mixtos. Con el proposito de hacer esto consideremos una generalización particular de estados “X” [51]

para un sistema de dos qutrits, de la siguiente manera

$$\rho(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde los λ_i son parámetros reales, los cuales varían desde $\lambda_i = 0$ a $\lambda_i = 1$. Estos corresponden a una modificación de los estados maximalmente entrelazados $|\Psi_{0,0}\rangle$, para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. En los casos extremos, para λ_i 's =0, tenemos estados separables, mientras que para λ_i 's =1 tenemos un estado maximalmente entrelazado. No es difícil darse cuenta que esta clase de estados es una generalización de la clase de estados llamados “X”, estudiados para sistemas bidimensionales [72, 51]. Como podemos comprender fácilmente de la dinámica dada por Ec. (3.1), este estado inicial visitará una porción del espacio de Hilbert que

recuerda a la compuesta por una matriz 3-X, la cuál tiene una estructura:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & \rho_{15} & 0 & 0 & 0 & \rho_{19} \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & 0 & \rho_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & 0 & 0 & 0 & \rho_{48} & 0 \\ \rho_{15}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{55} & 0 & 0 & 0 & \rho_{59} \\ 0 & \rho_{26}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{48}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} & 0 \\ \rho_{19}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{59}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{99} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

A continuación analizaremos la dinámica del desentrelazamiento mostrando efectos interesantes, los cuales surgen cuando se consideran estados iniciales mixtos de esta clase. La Ec. (3.1) se puede resolver para constantes de decaimiento arbitrarias, pero por simplicidad reduciremos el problema a un caso más simple $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. La Fig. 3.2 muestra la evolución de $\Lambda(t)$ para $\lambda = 0,1$. Como observamos, $\Lambda(t)$ experimenta cambios abruptos a lo largo de su evolución, exhibiendo discontinuidades en su derivada, que finalmente evoluciona a una muerte abrupta del entrelazamiento. Comparada con el caso de dos qubits, este es un comportamiento más interesante del desentrelazamiento. De la definición de $\Lambda(t)$, esta característica debe estar cercanamente relacionada con la dependencia temporal de los autovalores $M = \rho^{T_A} \cdot (\rho^{T_A})^\dagger$. En nuestro caso, cálculos numéricos y analíticos para M se pueden realizar. De los cálculos numéricos podemos decir que los cambios abruptos están dominados por el comportamiento de un grupo

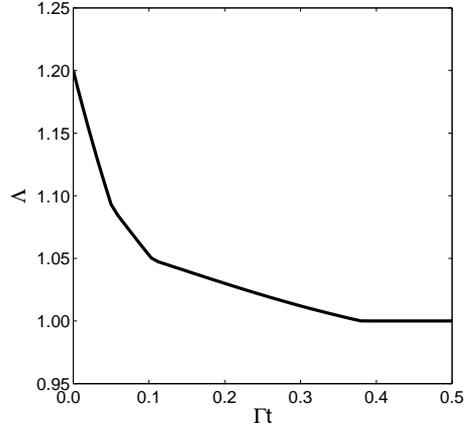


Figura 3.2: Evolución de $\Lambda(t)$ para estados iniciales mixtos de la Eq. (3.2) con $\lambda = 0,1$ como una función del tiempo adimensional Γt .

restringido de autovalores dados por:

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= (\rho_{12,12})^2 + (\rho_{11,22})^2 - 2\rho_{12,12}\rho_{11,22}, \\
 E_2(t) &= (\rho_{00,11})^2 + (\rho_{01,01})^2 - 2\rho_{00,11}\rho_{01,01}, \\
 E_3(t) &= (\rho_{00,22})^2 + (\rho_{02,02})^2 - 2\rho_{00,22}\rho_{02,02},
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \rho_{12,12} &= \frac{2}{3} (e^{-3\Gamma t} - e^{-4\Gamma t}) \\
 \rho_{11,22} &= \frac{\lambda}{3} e^{-3\Gamma t} \\
 \rho_{00,11} &= \frac{2\lambda}{3} e^{-3\Gamma t} - \frac{4\lambda}{3} e^{-2\Gamma t} + \lambda e^{-\Gamma t} \\
 \rho_{01,01} &= 2e^{-3\Gamma t} - \frac{7}{3}e^{-2\Gamma t} - \frac{2}{3}e^{-4\Gamma t} + e^{-\Gamma t} \\
 \rho_{00,22} &= \frac{\lambda}{3} e^{-2\Gamma t} \\
 \rho_{02,02} &= -\frac{2}{3}e^{-3\Gamma t} + \frac{1}{3}e^{-4\Gamma t} + \frac{1}{3}e^{-2\Gamma t}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

son los elementos de matriz $\rho_{ij,kl}$. Estos autovalores (3.4) están graficados en la Fig. 3.3, donde observamos que los tiempos en los cuales estos alcanzan un valor cero están en exacto acuerdo con los tiempos donde se producen los cambios abruptos en la evolución del entrelazamiento. Estos tiempos se pueden calcular

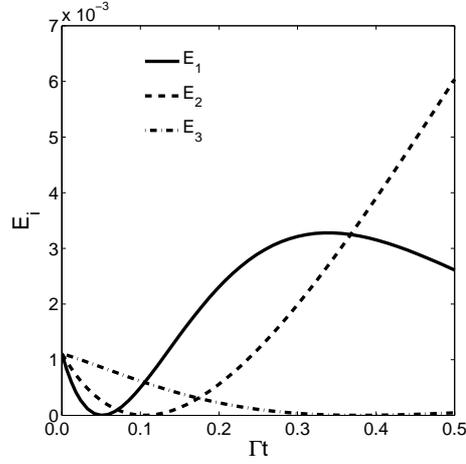


Figura 3.3: Autovalores relevantes de la matriz M para el caso mostrado en Fig. 3.2.

analíticamente en términos del parámetro λ desde Ec. (3.4):

$$t_1 = \ln(2/(2 - \lambda)), t_2 = \ln(1/(1 - \lambda)), t_3 = \ln(1/(1 - \sqrt{\lambda})). \quad (3.6)$$

La Figura 3.4 muestra los comportamientos suaves de estos tiempos como una función del parámetro λ , definiendo estados particulares mixtos de dos qutrits. Desde este cuadro podemos darnos cuenta que los cambios abruptos en la dinámica del desentrelazamiento aparecerán para cualquier valor de λ en el intervalo $[0, 1]$. En particular, para los tres estados maximalmente entrelazados correspondientes a (a), el grupo definido por $|\Psi_{\alpha,0}\rangle$, experimentarán cambios abruptos en $t_1 = \ln 2$, los tiempos del segundo y tercer cambio abrupto, el cuál es el ESD, tienden a infinito, mostrando que el desentrelazamiento decaerá asintóticamente. Como veremos, las mismas características están presentes para los dos grupos restantes. Notemos que este resultado difiere substancialmente de su contraparte de dos qubits, donde los estados maximalmente entrelazados correspondientes se desentrelazan suavemente [72]. Notemos también que estos cambios abruptos

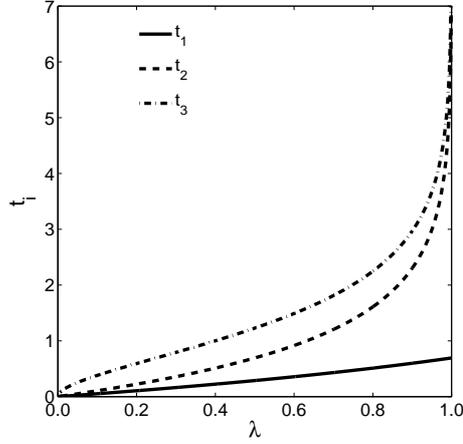


Figura 3.4: Tiempos para los cambios abruptos de la dinámica del desentrelazamiento como una función del parámetro λ . Línea sólida corresponde al primer cambio abrupto, la línea segmentada corresponde al segundo cambio abrupto y la línea segmentada con puntos corresponde al ESD.

pueden ser matemáticamente interpretados como discontinuidades de la derivada para la expresión $\Lambda(t) = \sum_{i=1}^9 \sqrt{E_i(t)}$, un cambio abrupto en la evolución de Λ ocurre cuando uno de estos nueve autovalores E_i se anula, como se observa en la Fig. 3.2. Hasta ahora, el análisis para explicar estos cambios abruptos en la evolución del entrelazamiento ha sido en términos de los autovalores de la matriz M . Sin embargo, también podemos entender estos cambios abruptos en $\Lambda(t)$, observando el comportamiento de los autovalores de la matriz traspuesta parcial ρ^{TA} . En nuestro caso solo existen tres autovalores negativos que nos entregan información sobre estos cambios abruptos y están graficados en la Fig. 3.5. Notamos que estos autovalores van de negativos a positivos para tiempos específicos, los cuales están de acuerdo con los cambios abruptos en la evolución del entrelazamiento. En otras palabras, la tasa de desentrelazamiento cambia cuando el rango de la matrix traspuesta parcial cambia abruptamente, hasta que el

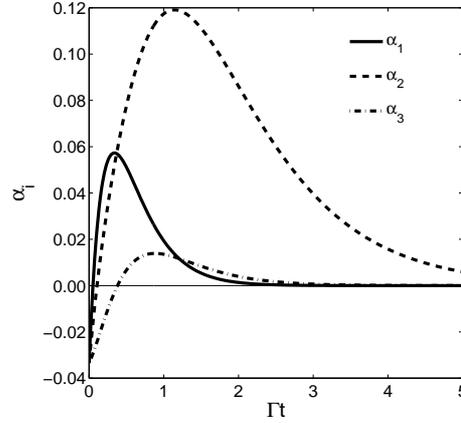


Figura 3.5: Autovalores relevantes de la matriz traspuesta parcial ρ^{TA} .

entrelazamiento desaparece. Podemos asociar a cada autovalor de ρ^{TA} un correspondiente operador testigo de entrelazamiento, tal que $\alpha_i(t) = Tr(W_i \rho(t))$ con $i = 1, 2, 3$ y cada W_i esta dado por

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} [|21\rangle\langle 21| - |11\rangle\langle 22| - |22\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 12|], \\ W_2 &= \frac{1}{2} [|10\rangle\langle 10| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|], \\ W_3 &= \frac{1}{2} [|02\rangle\langle 02| - |00\rangle\langle 22| - |22\rangle\langle 00| + |20\rangle\langle 20|]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A tiempo $t = 0$, todos los operadores pueden ser usados para caracterizar el entrelazamiento de ρ . A medida que el tiempo transcurre, estos operadores van perdiendo su capacidad para detectar entrelazamiento, hasta que ya no hay entrelazamiento.

La Figura 3.6 muestra la evolución del entrelazamiento para dos casos, la línea sólida corresponde a un estado inicial puro en un subespacio bidimensional $\{|11\rangle, |22\rangle\}$, la cual recuerda el comportamiento observado para dos qubits [72]. En este caso solo tenemos un cambio abrupto en la evolución que corresponde a la muerte repentina del entrelazamiento, tal como se espera. Si miramos los autovalores de M , vemos que en el tiempo en que Λ se anula, existe también

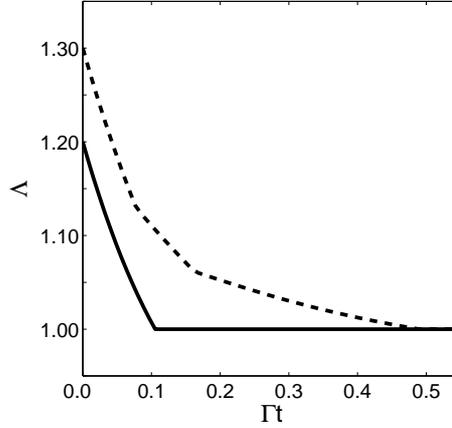


Figura 3.6: Evolución del entrelazamiento para el caso mostrado en la Fig. 3.1 (línea segmentada) para $\lambda = 0,15$ y para un estado inicial en el subespacio $\{|11\rangle, |22\rangle\}$ (línea sólida) para $\lambda = 0,2$

un autovalor que se anula, indicando que un cambio abrupto ha ocurrido. Una conclusión similar se puede obtener al mirar la negatividad en vez de la concurrencia para el caso de dos qubits. Ahora, si analizamos a los otros miembros del grupo, vemos que ellos se comportan de la misma manera.

Además, podemos explorar la evolución del entrelazamiento para un estado inicial puro no maximalmente entrelazado, por ejemplo, $|\Phi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |11\rangle + \gamma |22\rangle$. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, consideraremos α , β y γ como parámetros reales. En este caso, una dinámica más variada puede ocurrir. Dependiendo de la elección de las amplitudes podemos tener decaimiento asintótico, muerte súbita, cambios abruptos ó una combinación de ellos. Los tiempos que corresponden a los cambios abruptos y a la muerte súbita del entrelazamiento se pueden calcular a partir de los autovalores relevantes asociados

a ρ^{TA} , los cuales corresponden a

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \rho_{12,12} - \rho_{11,22}, \\ \alpha_2 &= \varrho_{01,01} - \varrho_{00,11}, \\ \alpha_3 &= \varrho_{02,02} - \varrho_{00,22},\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde los elementos de matriz están dados por

$$\begin{aligned}\rho_{12,12}(t) &= 2\gamma^2 [e^{-3\Gamma t} - e^{-4\Gamma t}], \\ \rho_{11,22}(t) &= \beta\gamma e^{-3\Gamma t}, \\ \varrho_{01,01}(t) &= \gamma^2 [2(e^{-\Gamma t} - e^{-4\Gamma t}) + 6(e^{-3\Gamma t} - e^{-2\Gamma t})] \\ &\quad + \beta^2 [e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t}], \\ \varrho_{00,11}(t) &= \alpha\beta e^{-\Gamma t} - 4\beta\gamma [e^{-2\Gamma t} - \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} - \frac{1}{2}e^{-3\Gamma t}], \\ \varrho_{02,02}(t) &= 2\gamma^2 [\frac{1}{2}e^{-4\Gamma t} + \frac{1}{2}e^{-2\Gamma t} - e^{-3\Gamma t}], \\ \varrho_{00,22}(t) &= \alpha\gamma e^{-2\Gamma t}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Apartir de estas ecuaciones podemos ver que los tiempos para los dos primeros cambios abruptos y la muerte repentina del entrelazamiento son respectivamente

$$\begin{aligned}t_1 &= -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{\beta}{2\gamma} \right), \\ t_2 &= -\frac{1}{\Gamma} \ln \left[1 - \frac{\beta}{3\gamma} \left(1 + \frac{1}{(2Z)^{1/3}} - \left(\frac{Z}{2} \right)^{1/3} \right) \right], \\ t_3 &= -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma} \right),\end{aligned}\tag{3.10}$$

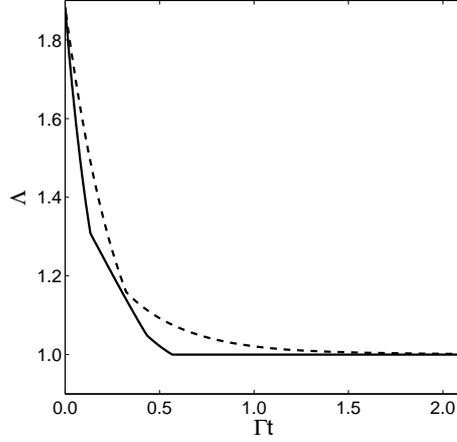


Figura 3.7: Evolución del entrelazamiento para estados iniciales puros no maximalmente entrelazados. Línea segmentada corresponde a $\alpha = 0,2386$, $\beta = 0,9545$, $\gamma = 0,1790$ y la línea sólida corresponde a $\alpha = 0,1790$, $\beta = 0,2386$, $\gamma = 0,9545$.

donde

$$Z = 5 - 27 \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + 3\sqrt{3} \sqrt{1 - 10 \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + 27 \left(\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)^2}. \quad (3.11)$$

De estas expresiones podemos deducir diferentes dinámicas para el entrelazamiento, siendo estas : (i) decaimiento asintótico para ($\alpha \geq \beta > \gamma$), (ii) un cambio abrupto y decaimiento asintótico para ($\beta \geq \alpha \geq \gamma$, ó $\alpha > \gamma > \beta$), (iii) dos cambios abruptos y decaimiento asintótico para ($\beta > \gamma > \alpha$), y (iv) dos cambios abruptos y muerte súbita del entrelazamiento para ($\gamma > \beta > \alpha$). La Figura 3.7 muestra dos casos particulares de evolución dinámica para los casos (ii) y (iv).

Un estudio similar se puede hacer con los restantes estados maximalmente entrelazados, que corresponden a la clase de estados de hasta tres excitaciones. Partiendo de una forma analoga como se hizo para el caso anterior, podemos

definir estados iniciales de la forma

$$\rho(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Como se puede ver de la evolución de este estado bajo disipación, este ocupa una porción del espacio de Hilbert de tal forma que evoluciona a un estado como

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & \rho_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & \rho_{34} & 0 & 0 & 0 & \rho_{38} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{34}^* & \rho_{44} & 0 & 0 & 0 & \rho_{48} & 0 \\ \rho_{15}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{27}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{38}^* & \rho_{48}^* & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

Este estado recuerda al estado X definido en [51, 72]. Como hemos dicho antes, todos los estados pertenecientes a esta clase presentan el mismo comportamiento en la evolución del entrelazamiento. La Figura 3.8 muestra la dinámica del desentrelazamiento para esta clase de estados. Una primera observación es que

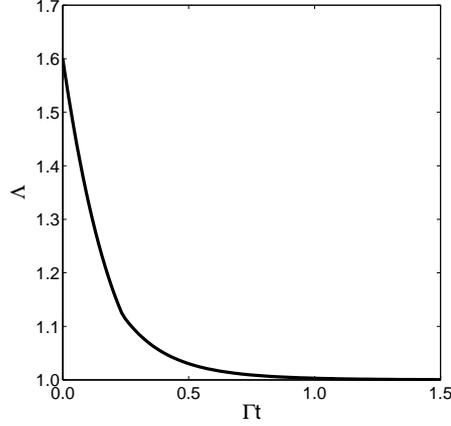


Figura 3.8: Evolución del desentrelazamiento para estados asociados al grupo (b) con $\lambda = 0,3$.

la evolución del desentrelazamiento experimenta solo un cambio abrupto antes de decaer asintóticamente. Este comportamiento particular se puede entender observando el correspondiente autovalor de ρ^{TA} asociado a la familia de estos estados. Consideremos la familia de estados $|\Psi_{\alpha,1}\rangle$. En este caso existe solo un autovalor asociado a ρ^{TA} , que se anula y está dado por

$$\chi_{\alpha,1} = \frac{1}{2} (\rho_{11,11} + \rho_{20,20}) - X, \text{ with} \tag{3.14}$$

$$X = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 |\rho_{10,21}|^2 + (\rho_{11,11} - \rho_{20,20})^2} \right),$$

donde los elementos de matriz están dados por

$$\rho_{20,20}(t) = \rho_{21,21}(0) e^{-2\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}),$$

$$\rho_{11,11}(t) = 2\rho_{21,21}(0) e^{-2\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}), \tag{3.15}$$

$$\rho_{10,21}(t) = \rho_{10,21}(0) e^{-2\Gamma t},$$

para la familia de estados $|\Psi_{\alpha,2}\rangle$, podemos observar que esta familia se puede obtener vía operaciones locales desde el estado $|\Psi_{\alpha,1}\rangle$, así que el entrelazamiento es el mismo. De estas ecuaciones podemos calcular el tiempo para el cual el cambio abrupto ocurre y es igual para ambos casos, este viene dado por la expresión

$$t_h = -\frac{1}{\Gamma} \log \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.16)$$

Como en el primer caso, las dos familias de estados maximalmente entrelazados corresponden a $\lambda = 1$, por lo cual estos experimentan un cambio abrupto en su dinámica de desentrelazamiento en $t_h = -\log(1 - 1/\sqrt{2})/\Gamma$.

Con el propósito de estudiar un comportamiento completo para la dinámica del desentrelazamiento correspondiente a estos casos, supongamos inicialmente un estado no maximalmente entrelazado en los correspondientes subespacios. Para el grupo (b), si el subespacio es inicialmente compuesto por los estados $\{|02\rangle, |10\rangle, |21\rangle\}$, un estado puro no maximalmente entrelazado se puede escribir como $|\tilde{\Phi}\rangle = \alpha |02\rangle + \beta |10\rangle + \gamma |21\rangle$, donde λ , β and γ son amplitudes complejas. Debido al caracter no simétrico de este estado, la evolución del entrelazamiento no exhibe una dinámica muy variada como en el caso previo. En particular, hemos encontrado que la dinámica del desentrelazamiento exhibe un cambio abrupto y decaimiento asintótico dependiendo de la elección de las amplitudes iniciales. La solución general para el correspondiente autovalor negativo de la ρ^{T_A} que se hace cero está dado por la Ec. (3.14). De esta ecuación, encontramos que el tiempo para que este cambio abrupto ocurra es:

$$\tau_h = -\frac{1}{\Gamma} \log \left(1 - \frac{|\beta|}{\sqrt{2}|\gamma|} \right). \quad (3.17)$$

Podemos ver en esta expresión que la dinámica del desentrelazamiento exhibirá: (i) un cambio abrupto y decaimiento asintótico para $(|\gamma| > |\beta|/\sqrt{2})$, y (ii)

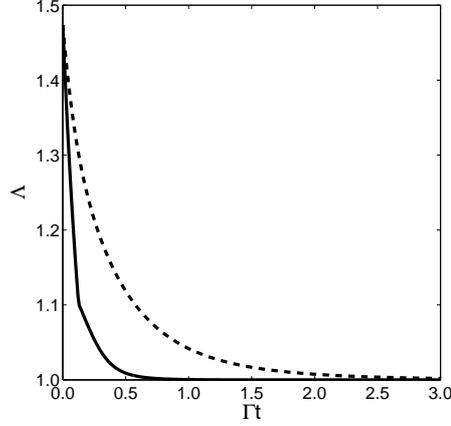


Figura 3.9: Evolución del desentrelazamiento para estados puros no maximalmente entrelazados asociados al caso (b) . Línea segmentada corresponde a los estados $|\phi_1\rangle$ y la línea sólida corresponde a los estados $|\psi_1\rangle$.

decaimiento asintótico para $(|\gamma| \leq |\beta|/\sqrt{2})$. Figura (3.9) muestra la evolución del entrelazamiento para el estado $|\phi_1\rangle = \alpha|02\rangle + \beta|10\rangle + \gamma|21\rangle$ el cuál experimenta decaimiento asintótico y para el estado $|\psi_1\rangle = \alpha|02\rangle + \gamma|10\rangle + \beta|21\rangle$ el cuál experimenta un cambio abrupto para luego decaer asintóticamente. Este resultado difiere del caso de dos qubits, donde los estados no simétricos experimentan solo decaimiento asintótico [72]. En este caso, las amplitudes son $\alpha = 0,0656$, $\beta = (0,9843)i$ y $\gamma = 0,1640$. Por otro lado, si comenzamos inicialmente en un estado formado por la superposición de los estados $\{|01\rangle, |12\rangle, |20\rangle\}$ llegaremos a las mismas conclusiones debido a que cualquier estado de esta clase puede ser obtenido mediante operaciones locales partiendo del estado $|\tilde{\Phi}\rangle = \alpha |02\rangle + \beta |10\rangle + \gamma |21\rangle$.

3.3. Dinámica del desentrelazamiento para qutrits atómicos bajo disipación

Ahora nos gustaría estudiar el comportamiento de la dinámica del desentrelazamiento para el caso de un par de qutrits atómicos. Consideremos que los átomos están igualmente acoplados al mismo reservorio tal que, un mecanismo de decaimiento colectivo este presente [57]. Es importante notar que este modelo nos dice que, cuando el sistema está inicialmente preparado en un estado de Dicke simétrico, el sistema evolucionará solo dentro del subespacio simétrico. Esta propiedad del modelo nos permite tratar, por ejemplo, dos átomos de dos niveles cada uno como un sistema efectivo de tres niveles, comunmente llamado qutrit. Considerando el caso de cero temperatura como en las secciones previas, la ecuación maestra viene dada por

$$\dot{\rho} = \sum_{i=1}^2 \frac{\Gamma_i}{2} (2J_-^{(i)} \rho J_+^{(i)} - J_+^{(i)} J_-^{(i)} \rho - \rho J_+^{(i)} J_-^{(i)}) \quad (3.18)$$

donde \hat{J}_{\pm} son los operadores atómicos colectivos de momento angular de subida (bajada). Como en el primer caso, mostraremos que este sistema en general exhibe las mismas características que el caso previamente estudiado.

Con el propósito de estudiar la dinámica del desentrelazamiento para este sistema, consideraremos estados iniciales de la forma Ec. (3.2). Para este sistema físico la dinámica del entrelazamiento se puede dividir en la misma clase de estados antes mencionados. De la condición inicial (3.2) y considerando la evolución dada por (3.18), observamos que la matriz densidad evoluciona como la Ec. (3.3). Esto implica que la dinámica del desentrelazamiento exhibirá tres cambios abruptos, siendo el último la muerte súbita del entrelazamiento. Esto se puede ver fácilmente analizando los autovalores relevantes en la matriz ρ^{TA} ,

la cual para un estado inicial con parámetros reales, están dados por la ecuaciones (3.8). Naturalmente, los mismos operadores testigo de entrelazamiento dados por las ecuaciones (3.7) se pueden asociar a este caso. En particular en este caso los elementos de la matriz densidad bienen dados por:

$$\begin{aligned}
 \rho_{01,01}(t) &= \frac{2\Gamma t}{3} e^{-4\Gamma t}, \\
 \rho_{00,11}(t) &= \frac{\lambda}{3} e^{-4\Gamma t}, \\
 \rho_{12,12}(t) &= \frac{1}{3} (2\Gamma t + 1) (e^{-2\Gamma t} - e^{-4\Gamma t}) - \frac{1}{3} (2\Gamma t e^{-2\Gamma t})^2, \\
 \rho_{11,22}(t) &= \frac{\lambda}{3} e^{-2\Gamma t} (4e^{-2\Gamma t} - 8e^{-\Gamma t} + 5), \\
 \rho_{02,02}(t) &= \frac{1}{3} e^{-2\Gamma t} [1 - e^{-2\Gamma t} (1 + 2\Gamma t)], \\
 \rho_{00,22}(t) &= \frac{\lambda}{3} e^{-2\Gamma t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Podemos darnos cuenta apartir de estas ecuaciones que para este sistema físico, existe un tiempo, el cual puede ser calculado analíticamente y está asociado al autovalor α_2 , mientras que los tiempos restantes asociados a los autovalores α_1 y α_3 solo pueden ser calculados numéricamente ya que para estos tenemos ecuaciones trascendentales. En general, si consideramos un estado mixto complejo inicial, la expresión analítica para este tiempo en términos de los elementos de la matriz densidad está dado por $t_1 = |\rho_{00,11}(0)|/2\Gamma\rho_{00,00}(0)$. Este tiempo siempre tiene un valor finito, para un estado inicial puro, lo cual es esencialmente diferente del caso previo. En particular, para el estado de la Ec. (3.2), este tiempo en términos del parámetro λ esta dado por

$$t_1 = \frac{\lambda}{2\Gamma}.
 \tag{3.20}$$

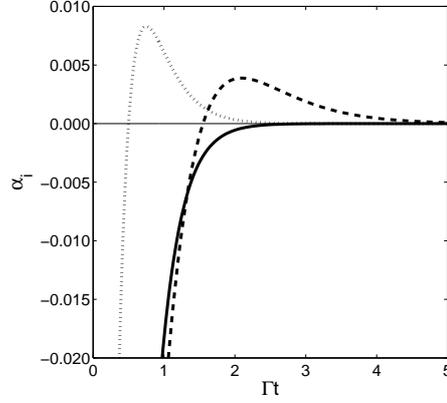


Figura 3.10: Autovalores relevantes de ρ^{TA} para dos qutrits atómicos inicialmente en un estado maximalmente entrelazado de la clase $\{|\Psi_{\alpha,0}\rangle\}$.

Nos gustaría señalar una característica interesante que aparece cuando se considera el estudio de estados maximalmente entrelazados asociados a la clase $\{|\Psi_{\alpha,0}\rangle\}$. En este caso, la dinámica del desentrelazamiento exhibe dos cambios abruptos para luego decaer asintóticamente, lo cual difiere de su contrapartida de qutrits fotónicos, donde los estados maximalmente entrelazados exhiben solo un cambio abrupto y decaimiento asintótico. La figura 3.10 muestra los autovalores relevantes de ρ^{TA} para esta clase de estados. De esta figura observamos que solo dos autovalores cambian de valores negativos a positivos y el tercer autovalor se vuelve cero asintóticamente. También, el tiempo donde el primer autovalor se anula está en acuerdo exacto con la expresión analítica dada por (3.20).

Como en el caso de los qutrits fotónicos podemos estudiar la dinámica del desentrelazamiento partiendo de estados iniciales puros no maximalmente entrelazados, como

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle + \gamma|22\rangle, \quad (3.21)$$

donde α, β, γ son amplitudes complejas. Debido a que este estado está inicialmente expresado en la base $\{|00\rangle, |11\rangle, |22\rangle\}$ la matriz densidad evolucionará a (3.3), entonces, dependiendo de las elecciones de las amplitudes, el desentrelazamiento exhibirá diferentes dinámicas como en el caso previo de qutrits fotónicos. Apartir de cálculos numéricos y considerando los mismos valores para las amplitudes que en la Fig. 3.7 hemos encontrado que el desentrelazamiento exhibirá dos cambios abruptos y muerte súbita o dos cambios abruptos para luego decaer asintóticamente.

Además, podemos estudiar el desentrelazamiento para estados particulares en los subespacios $\{|02\rangle, |10\rangle, |21\rangle\}$ o $\{|01\rangle, |12\rangle, |20\rangle\}$. Por ejemplo, podemos considerar la segunda clase de estados correspondientes al caso (b), en la Ec. (3.12), los cuales son estados puros no maximalmente entrelazados. Como en el caso de qutrits fotónicos, cualquiera de estos estados evolucionará a una matriz densidad particular. Si comenzamos del primer subespacio, la evolución será como en la ecuación (4.19). En ese caso existe solo un subespacio que recuerda al caso de dos qubits, entonces solo un cambio abrupto ocurrirá. El mismo tipo de comportamiento puede ser observado si comenzamos de un estado inicial en el segundo subespacio. El correspondiente autovalor negativo de ρ^{TA} para cualquier estado inicialmente en el subespacio $\{|02\rangle, |10\rangle, |21\rangle\}$ viene dado por

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha,1} &= \frac{1}{2} (\rho_{12,12} + \rho_{20,20}) - X, \text{ with} \\ X &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 |\rho_{02,10}|^2 + (\rho_{12,12} - \rho_{20,20})^2} \right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde los elementos de matriz bienen dados por

$$\begin{aligned}\rho_{20,20}(t) &= \rho_{10,10}(0) e^{-2\Gamma t} (1 - e^{-\Gamma t}), \\ \rho_{12,12}(t) &= 2\Gamma t \rho_{10,10}(0) e^{-4\Gamma t}, \\ \rho_{02,10}(t) &= \rho_{02,10}(0) e^{-3\Gamma t},\end{aligned}\tag{3.23}$$

En este caso, el tiempo donde el cambio abrupto ocurre está dado por $\xi_{\alpha,1} = 0$. Para este sistema físico particular, no existe solución analítica porque la ecuación que lo entrega es trascendental. Este mismo resultado aparece si analizamos cualquiera de los subespacios restantes.

3.4. Dos sistemas d-dimensionales acoplados a reservorios independientes

Hasta ahora hemos estudiado la dinámica del desentrelazamiento para el caso de dos sistemas tridimensionales acoplados a reservorios independientes. Hemos encontrado un comportamiento diferente al encontrado para qubits, partiendo de distintos estados ya sean maximalmente entrelazados o no. Sin embargo, nos gustaría extender estos resultados al caso de dimensiones más altas. Naturalmente podemos estudiar el siguiente caso de más alta dimensión, que sería el caso de dimensión 4 acoplado a reservorios independientes. En particular, consideremos dos cavidades que tienen un numero máximo de hasta tres excitaciones, tal que el espacio de Hilbert de todo el sistema está en la base $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. En este caso trataremos con matrices densidad de 16×16 , donde daremos una descripción numérica a este problema. Como en el caso de dos qutrits, estudiaremos la dinámica del desentrelaza-

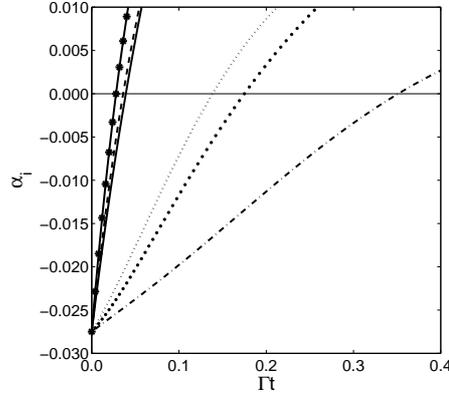


Figura 3.11: Autovalores relevantes de ρ^{TA} para dos sistemas cuadrimensional acoplados a reservorios descorrelacionados.

miento considerando como estados iniciales, estados “X” generalizados, los cuales corresponden a una deformación del estado maximalmente entrelazado $|\Psi_{0,0}\rangle = (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle)/2$. La figura 3.11 muestra los autovalores relevantes de la matriz ρ^{TA} , a partir de esta figura concluimos que la evolución del desentrelazamiento experimenta cinco cambios abruptos para finalmente decaer a cero abruptamente.

Podemos entender esta propiedad del desentrelazamiento de la siguiente manera. Debido al caracter simétrico de cualquier estado en el subespacio expandido por los vectores $\{|00\rangle, |11\rangle, |22\rangle, |33\rangle\}$, existen 6 subespacios que recuerdan el comportamiento observado para el caso de dos qubits [72], similarmente que para el caso de dos qutrits donde 3 subespacios aparecen. En este sentido es posible generalizar este comportamiento para dimensiones arbitrarias de sistemas bipartitos $d \otimes d$. Consideremos dos sistemas d-dimensionales, A y B , acoplados a reservorios independientes. Si el estado inicial del sistema completo se escribe como $|\Psi\rangle = \sum_i p_i |i_A\rangle |i_B\rangle$ con $i = 0, 1, \dots, d$ y $p_i > 0$, el numero de cambios

abruptos presentes en la dinámica del desentrelazamiento está dado por

$$\binom{d}{2} = \frac{d(d-1)}{2}, \quad (3.24)$$

siendo el último, donde el entrelazamiento finalmente se anula.

3.5. Conclusión

En este trabajo hemos estudiado la dinámica del desentrelazamiento cuántico para una la cota más baja del entrelazamiento de formación (EOF). Hemos mostrado los efectos del reservorio sobre la evolución del entrelazamiento para sistemas físicos, como lo son los qutrits atómicos, fotónicos y de sistemas de más dimensión, encontrando soluciones tanto analíticas como numéricas. En particular, hemos encontrado que más allá del caso de dos qubits, el comportamiento dinámico muestra una variedad de situaciones esencialmente diferentes para sistemas bipartitos que pueden tomar lugar dependiendo de la condición inicial. Estos cambios abruptos están presentes como discontinuidades en la dinámica del desentrelazamiento y anteceden a la muerte súbita del entrelazamiento. También, hemos encontrado que estas propiedades se pueden extender para casos más generales, como lo son sistemas bipartitos d -dimensionales, en particular el número de cambios abruptos puede ser obtenido considerando el número de subespacios que recuerdan al caso de dos qubits.

Capítulo 4

Estados coherentes entrelazados y muerte súbita del entrelazamiento

En este capítulo estudiaremos la evolución de estados entrelazados de dos campos electromagnéticos cuantizados bajo mecanismos de disipación. Notando que todo el sistema evoluciona como un sistema efectivo de dos qubits, evaluamos la concurrencia o equivalentemente el autovalor negativo de la matriz traspuesta parcial como función del tiempo. Bajo ciertas condiciones, encontramos que la muerte repentina del entrelazamiento está presente en la evolución dinámica del sistema. También presentamos dos esquemas en cavidades para generar tales estados y un protocolo de medición respectivamente. Para una clase específica de estados donde la muerte súbita del entrelazamiento no está presente, se estudia un proceso difusivo con el propósito de inducirla.

4.1. Introducción

Como ya hemos mencionado en los capítulos anteriores el entrelazamiento es un concepto fundamental y central para la Información y Computación cuántica [3, 58]. Este es un recurso esencial para teleportación cuántica [59], distribución de claves cuánticas [60, 61] y lógica controlada [62] entre otras. Por otro lado, la generación de entrelazamiento ha sido extensamente investigada en una variedad de sistemas físicos, desde óptica cuántica hasta sistemas de materia condensada [63, 64, 65, 66, 67].

También, en trabajos recientes la decoherencia y el desentrelazamiento en sistemas bipartitos ha recibido considerable atención. Aunque la decoherencia de sistemas individuales decae asintóticamente en el tiempo [68, 69], dos qubits entrelazados pueden evolucionar a un estado separable en un tiempo finito bajo la acción de un reservorio disipativo [70, 71, 72, 73, 74, 75]. Este fenómeno es llamado muerte súbita del entrelazamiento (Entanglement sudden death). Este aparece en sistemas bipartitos, donde cada sistema interactúa con su propio reservorio y depende del estado inicial. También, la muerte súbita del entrelazamiento ha sido recientemente estudiada desde el punto de vista geométrico [77], lo cuál entrega un marco alternativo al problema.

Hasta la fecha, este fenómeno de la evolución del entrelazamiento ha sido estudiado para sistemas bipartitos finito dimensionales, así como también para algunos estados continuos como los llamados estados entrelazados gaussianos (ref). Por otro lado, la muerte súbita del desentrelazamiento ha sido implementada experimentalmente usando fotones gemelos [76]. Otro escenario apropiado para extender verificaciones experimentales de la muerte súbita del entrelazamiento, es en cavidades cuánticas electromagnéticas. En este escenario experimental, donde se ha logrado un alto nivel de control cuántico y preparación de

estados entrelazados [66]. Por otro lado, logros recientes en cavidades han permitido la generación y monitoreo de la evolución de superposiciones de estados cuánticos coherentes [78, 79, 80]. El mismo protocolo de preparación se podría implementar para generar estados coherentes entrelazados.

El propósito de este trabajo es mostrar que un tiempo finito de desentrelazamiento aparece no solo para un sistema de dos qubits, sino que también cuando se consideran estados bipartitos de más alta dimensión, en particular, para estados coherentes. Analizaremos bajo que condiciones, estos estados evolucionan a estados separables. Además, cuando el entrelazamiento de estados coherentes decae asintóticamente, proponemos un esquema para inducirlo.

4.2. Dinámica del desentrelazamiento

A continuación, estudiaremos la dinámica del desentrelazamiento de dos modos cuánticos, cada uno afectado por su propio reservatorio. Tal situación es convenientemente descrita por el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b \\
&+ \sum_k \hbar\omega_k^a c_k^\dagger c_k + \sum_k \hbar \left[g_k^a a c_k^\dagger + g_k^{a*} a^\dagger c_k \right] \\
&+ \sum_k \hbar\omega_k^b d_k^\dagger d_k + \sum_k \hbar \left[g_k^b b d_k^\dagger + g_k^{b*} b^\dagger d_k \right], \tag{4.1}
\end{aligned}$$

donde a, a^\dagger y b, b^\dagger describen a cada modo, y c_k, c_k^\dagger y d_k, d_k^\dagger describen a los reservatorios independientes.

Comenzaremos nuestro análisis considerando dos modos inicialmente preparados en estados entrelazados de superposiciones pares e impares dadas por

$$|\pm, \alpha\rangle = N_{\pm\alpha}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \tag{4.2}$$

done $N_{\pm\alpha} = 1/\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}$. Consideremos que el estado inicial del sistema completo está descrito por

$$|\Psi\rangle = (c_{+,+} |+, \alpha\rangle |+, \beta\rangle + c_{-,-} |-, \alpha\rangle |-, \beta\rangle), \quad (4.3)$$

donde los coeficientes $c_{+,+}$, $c_{-,-}$ son constantes reales. La evolución temporal de este estado puede ser convenientemente descrita en términos de una base ortogonal tiempo dependiente para ambos modos, la cual se puede definir como sigue

$$\begin{aligned} |\pm\rangle &= N_{\pm\alpha}(|\alpha_t\rangle \pm |-\alpha_t\rangle), \\ |\pm\rangle &= N_{\pm\beta}(|\beta_t\rangle \pm |-\beta_t\rangle), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde los coeficientes $N_{\pm\alpha}$ y $N_{\pm\beta}$ están definidos por

$$\begin{aligned} N_{\pm\alpha_t} &= \{2 [1 \pm \exp(-2(|\alpha|^2 \exp(-\Gamma_1 t)))]\}^{-1/2}, \\ N_{\pm\beta_t} &= \{2 [1 \pm \exp(-2(|\beta|^2 \exp(-\Gamma_2 t)))]\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

El estado global entrelazado se puede escribir de la siguiente forma, en la base $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

$$\rho_t = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_6 & 0 \\ 0 & a_6 & a_3 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Definiendo las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{+,+} N_{+\alpha} N_{+\beta} + c_{-,-} N_{-\alpha} N_{-\beta}, \\ A_2 &= c_{+,+} N_{+\alpha} N_{+\beta} - c_{-,-} N_{-\alpha} N_{-\beta}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $N_{+\alpha}$, $N_{-\alpha}$, $N_{+\beta}$, $N_{-\beta}$ están evaluadas en $t = 0$, los coeficientes en Ec.(4.6)

vienen dados por

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{[N+\alpha_t N+\beta_t]^{-2}}{8} [(A_1^2 + A_2^2)(1 + f_t \cdot g_t) + 2A_1 A_2(f_t + g_t)], \\
a_2 &= \frac{[N+\alpha_t N-\beta_t]^{-2}}{8} [(A_1^2 + A_2^2)(1 - f_t \cdot g_t) + 2A_1 A_2(f_t - g_t)], \\
a_3 &= \frac{[N-\alpha_t N+\beta_t]^{-2}}{8} [(A_1^2 + A_2^2)(1 - f_t \cdot g_t) - 2A_1 A_2(f_t - g_t)], \\
a_4 &= \frac{[N-\alpha_t N-\beta_t]^{-2}}{8} [(A_1^2 + A_2^2)(1 + f_t \cdot g_t) - 2A_1 A_2(f_t + g_t)], \\
a_5 &= \frac{[N+\alpha_t N-\alpha_t N+\beta_t N-\beta_t]^{-1}}{8} [(A_1^2 - A_2^2)(1 + f_t \cdot g_t)], \\
a_6 &= \frac{[N+\alpha_t N-\alpha_t N+\beta_t N-\beta_t]^{-1}}{8} [(A_1^2 - A_2^2)(1 - f_t \cdot g_t)],
\end{aligned} \tag{4.8}$$

y la expresiones para f_t y g_t son respectivamente

$$\begin{aligned}
f_t &= \exp\left(-2(|\alpha|^2(1 - \exp(-\Gamma_1 t)))\right), \\
g_t &= \exp\left(-2(|\beta|^2(1 - \exp(-\Gamma_2 t)))\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En la base precedente, podemos tratar a todo el sistema como un sistema efectivo dos qubits, así podemos estudiar el sistema a través de las propiedades de entrelazamiento dadas por la concurrencia [81]. Además, podemos usar la medida de entrelazamiento propuesta para sistemas bipartitos en dimensiones superiores que vimos en el capítulo anterior [22], la cual coincide numéricamente con la concurrencia en este caso particular [82].

Notemos que la matriz densidad Ec. (4.6), corresponde a una matriz X , la cual ha sido extensamente estudiada en contribuciones recientes asociadas a tiempos de desentrelazamiento finitos [70, 72]. En lo que sigue, mostraremos

que un tiempo finito de desentrelazamiento aparece incluso para estados coherentes entrelazados del campo electromagnético, dependiendo de unos pocos parámetros asociados al estado inicial del sistema total.

La dinámica del desentrelazamiento para este sistema se puede estudiar a través de la evolución de los autovalores negativos de la matriz traspuesta parcial ρ^{TA} . En este caso, existe solo un autovalor negativo que da información sobre el entrelazamiento de acuerdo con el criterio de Peres [23]. Para el estado de la Ec. (4.6), este autovalor negativo se puede calcular analíticamente y está dado por

$$\lambda_-^{(1)} = \frac{1}{2} \left[a_2 + a_3 - \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + 4(a_5)^2} \right], \quad (4.10)$$

La muerte súbita del entrelazamiento aparece cuando este autovalor es nulo.

En el caso general $c_{+,+} \neq c_{-,-}$, eligiendo por simplicidad $|\alpha| = |\beta|$ y $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, existe un tiempo para el cual la ecuación $\lambda_- = 0$ tiene solución. Este tiempo de desentrelazamiento viene dado por

$$t_d^{(1)} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 + \frac{1}{2|\alpha|^2} \ln \left(\frac{|A_2|}{|A_1|} \right) \right). \quad (4.11)$$

De esta ecuación, la condición que se debe satisfacer para que $t_d^{(1)}$ sea finito está dada por

$$\exp(-2|\alpha|^2) < \frac{|A_2|}{|A_1|} < 1. \quad (4.12)$$

Esta condición se puede satisfacer de dos formas diferentes. La primera es cuando tomamos $c_{-,-} > c_{+,+}$, para el cual existe siempre un tiempo finito para el cual el entrelazamiento desaparece. Mientras que, si tomamos $c_{+,+} > c_{-,-}$, la condición para que haya tiempo finito, está dada por

$$\frac{c_{-,-}}{c_{+,+}} < \frac{(1 - \exp(-2|\alpha|^2))^2}{(1 + \exp(-2|\alpha|^2))^2}. \quad (4.13)$$

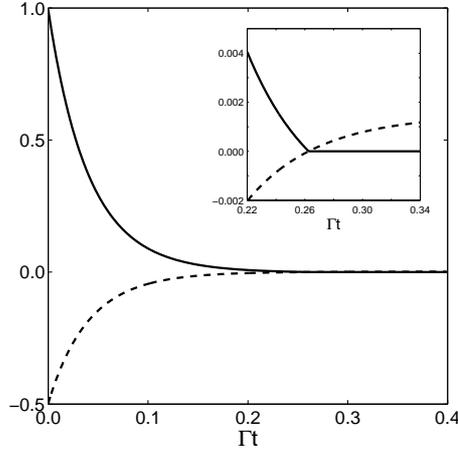


Figura 4.1: Evolución del desentrelazamiento para el sistema efectivo de dos qubits de la Ec. (4.6) como función del tiempo adimensional Γt . La línea sólida corresponde a la concurrencia, y la línea segmentada corresponde al autovalor negativo de ρ^{TA} . Los valores de los parámetros son $|\alpha| = |\beta| = 2,5$, $c_{+,+} = 2/3$, $c_{-,-} = \sqrt{5}/3$. El recuadro muestra el tiempo donde el entrelazamiento se anula, el cual está en completo acuerdo con la Ec. (4.11).

La figura 4.1 muestra la concurrencia y el autovalor $\lambda_-^{(1)}$ como una función del tiempo para el primer caso.

El análisis previo para el estado Eq. (4.3), está en correspondencia con el estudio de la muerte súbita del desentrelazamiento para la condición inicial $|\psi\rangle = c_0|00\rangle + c_1|11\rangle$ en Ref. [72]. Allí se ha mostrado que estados de la forma $|\psi\rangle = c_0|01\rangle + c_1|10\rangle$ no exhiben desentrelazamiento en tiempos finitos. En nuestro caso, el estado que estaría en correspondencia sería

$$|\Phi\rangle = c_{+,-}|+-\rangle + c_{-,+}| - + \rangle, \quad (4.14)$$

donde $c_{+,-}$, $c_{-,+}$ son constantes reales sin pérdida de generalidad. Un análisis

similar para la evolución temporal conduce a un estado, de la forma

$$\rho_t = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & b_2 & b_6 & 0 \\ 0 & b_6 & b_3 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

donde b_i son coeficientes dependientes del tiempo y vienen dados por (faltan los coeficientes)

Bajo las mismas suposiciones que hicimos antes, el autovalor de la matriz traspuesta parcial, que atestigua el entrelazamiento puede ser analíticamente calculado y está dado por

$$\lambda_-^{(2)} = \frac{1}{2} \left[b_1 + b_4 - \sqrt{(b_1 - b_4)^2 + 4(b_6)^2} \right]. \quad (4.16)$$

De esta expresión, somos capaces de calcular el tiempo para desentrelazamiento finito

$$t_d^{(2)} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 + \frac{1}{4|\alpha|^2} \ln \left(\frac{(c_{+,-} - c_{-,+})^2}{(c_{+,-} + c_{-,+})^2} \right) \right). \quad (4.17)$$

La única condición que se requiere para que $t_d^{(2)}$ sea finito es

$$\exp(-4|\alpha|^2) < \frac{(c_{+,-} - c_{-,+})^2}{(c_{+,-} + c_{-,+})^2}. \quad (4.18)$$

Hasta ahora hemos discutido cómo la muerte súbita del entrelazamiento aparece para estados entrelazados especiales. Hemos mostrado que el tiempo finito para el desentrelazamiento depende solo de un número pequeño de parámetros que involucran las amplitudes iniciales y el número promedio de fotones. Sin embargo, una descripción completa de la dinámica debe también considerar estados que exhiban decaimiento asintótico del entrelazamiento. En lo que sigue, estudiaremos las propiedades asociadas a este tipo de dinámica.

Consideremos un estado inicial de la forma

$$|\Psi\rangle = N_a |\alpha\rangle |\beta\rangle + N_b |\gamma\rangle |\delta\rangle, \quad (4.19)$$

donde $N_{a,b}, \alpha, \gamma, \beta, \delta$, son constantes reales. En este caso, una base apropiada para ambos modos esta definida como

$$\begin{aligned} |\pm\rangle_1 &= N_{1t\pm} (|\alpha_t\rangle \pm |\gamma_t\rangle), \\ |\pm\rangle_2 &= N_{2t\pm} (|\beta_t\rangle \pm |\delta_t\rangle), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde los coeficientes $N_{1t\pm}$ and $N_{2t\pm}$ están dados por

$$\begin{aligned} N_{1t\pm} &= \{2 [1 \pm \exp(-0,5(\alpha - \gamma)^2 \exp(-\Gamma t))]\}^{-1/2}, \\ N_{2t\pm} &= \{2 [1 \pm \exp(-0,5(\beta - \delta)^2 \exp(-\Gamma t))]\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En tal base, la evolución del estado (4.19) puede ser escrita como

$$\rho_t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

donde los coeficientes $c_{i,j}$ son funciones reales dependientes del tiempo.

En general, para estados dados por Ec. (4.22), es difícil obtener expresiones analíticas para la concurrencia o para el autovalor negativo de ρ^{TA} . Sin embargo, para elecciones especiales de los parámetros iniciales, tales como $N_a = N_b = N_0$, estos estados evolucionan como estados X , donde como hemos visto anteriormente, expresiones analíticas se pueden obtener. Para las condiciones iniciales consideradas en el caption de la Fig. 4.2, donde las condiciones $N_{1t+} = N_{2t+}$ y $N_{1t-} = N_{2t-}$ son siempre satisfechas, el autovalor negativo de la matriz traspuesta parcial está dado por

$$\lambda_-^{(3)} = c_{22} - |c_{14}|, \quad (4.23)$$

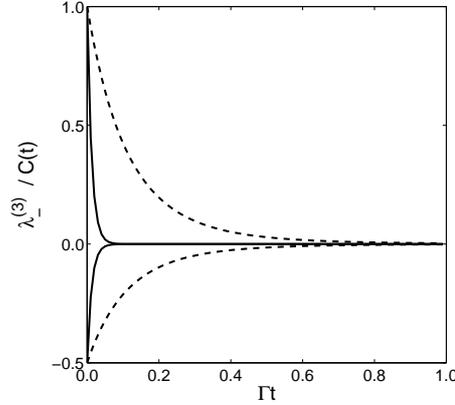


Figura 4.2: Decaimiento del entrelazamiento para diferentes estados. La línea sólida corresponde a estados $C_0|\alpha\alpha\rangle + C_1|-\beta-\beta\rangle$, la línea segmentada corresponde a estados $C_0|\alpha\beta\rangle + C_1|\beta\alpha\rangle$ y $C_0|\alpha\alpha\rangle + C_1|\beta\beta\rangle$. Los valores para los parámetros son $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 6$ y $C_0 = C_1 = 1/\sqrt{2}$.

donde,

$$\begin{aligned} c_{22} &= \frac{1}{8N} \left(\frac{N_0}{N_{1t+}N_{2t-}} \right)^2 [1 - h_t], \\ c_{14} &= \frac{1}{8N} \left(\frac{N_0}{N_{1t+}N_{2t-}} \right)^2 [1 + h_t], \end{aligned} \quad (4.24)$$

con N la traza del estado (4.19) y h_t es

$$h_t = \exp[-0,5((\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2)(1 - \exp(-\Gamma t))]. \quad (4.25)$$

La figura 4.2 muestra el comportamiento de la concurrencia y el autovalor negativo de la matriz ρ^{TA} , partiendo de diferentes estados entrelazados iniciales. De esta figura observamos cómo el sistema pierde su entrelazamiento asintóticamente en el tiempo. Este comportamiento se puede entender del análisis de la expresión para el autovalor negativo (4.23), desde donde no es difícil mostrar que la condición para la muerte súbita ($\lambda_-^{(3)} = 0$) implica un tiempo infinito, esto es, el desentrelazamiento decae asintóticamente.

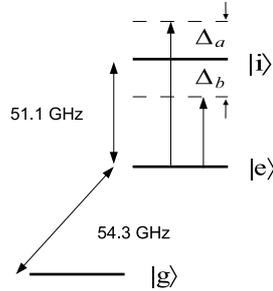


Figura 4.3: Representación esquemática de los niveles circulares en un átomo de Rydberg [83].

4.3. Implementación

4.3.1. En una cavidad

La generación de estados entrelazados, se puede implementar en una cavidad e involucra átomos de Rydberg con niveles circulares como se muestra en la figura (4.3), en una cavidad C , la cuál soporta dos modos polarizados ortogonales $M_{a,b}$ separados por $\delta = 1,2$ MHz [84], zonas Ramsey y detectores como se ve en la Fig. 4.4.

El estado entrelazado Eq. (4.3) puede ser preparado enviando átomos de Rydberg los cuales cruzan la cavidad C sintonizados dispersivamente con la transición atómica $|i\rangle \rightarrow |e\rangle$. Las desintonías asociadas con cada modo y la correspondiente transición se ajustan a $\Delta_a = -\delta/2$ y $\Delta_b = \delta/2$ respectivamente, como se muestra en Fig. 4.3. Los estados del campo están inicialmente preparados en estados coherentes no degenerados $|\alpha\rangle|\beta\rangle$. Un primer átomo se envía a través de la primera zona Ramsey R_1 para ser preparado en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. El átomo es enviado tal que cuando cruza la cavidad C , dispersivamente interactúa con ambos modos, tal que el estado experimenta un cambio de fase de la forma

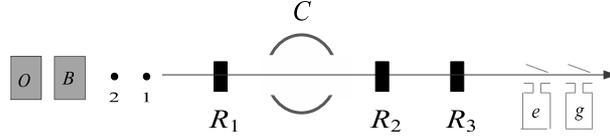


Figura 4.4: Arreglo experimental de una cavidad para producir estados entrelazados.

$|\alpha\rangle|\beta\rangle \rightarrow |-\alpha\rangle|-\beta\rangle$ cuando el átomo ocupa el estado $|e\rangle$. En seguida, el átomo es rotado en la zona Ramsey R_2 , tal que $|e\rangle \rightarrow (|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ y $|g\rangle \rightarrow (-|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. En esta etapa el átomo se mide en el estado base, así el estado del campo ha colapsado en el estado $|-\alpha\rangle|-\beta\rangle + |\alpha\rangle|\beta\rangle$, donde la correspondiente normalización ha sido omitida.

Un segundo átomo es enviado a través de la zona Ramsey R_1 y preparado en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. Cuando el átomo pasa por la cavidad C , interactúa sólo con un modo [84], produciendo un cambio de fase $|\pm\alpha\rangle|\beta\rangle \rightarrow |\mp\alpha\rangle|\beta\rangle$. Este átomo es entonces rotado en la zona Ramsey R_2 , tal que $|e\rangle \rightarrow (b_e|e\rangle + b_g|g\rangle)$ y $|g\rangle \rightarrow (-b_g|e\rangle + b_e|g\rangle)$. Por ejemplo, bajo un ajuste apropiado de las amplitudes b_e y b_g , el estado en Ec. (4.3) se genera cuando el segundo átomo es detectado en el estado base.

4.3.2. En dos cavidades

La descripción anterior también se puede implementar en un arreglo que involucra dos cavidades de alto factor de calidad, enviando átomos de Rydberg, los cuales interactúen dispersivamente con los modos en las cavidades C_1 y C_2 como se muestra en la Fig. 4.5.

Primero discutiremos cómo generar los estados entrelazados de la Ec. (4.3). Este estado se puede preparar enviando dos átomos de Rydberg de una forma

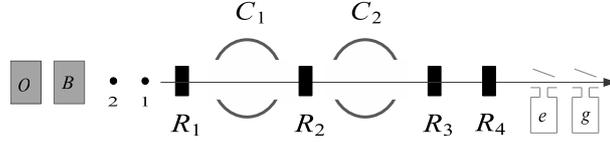


Figura 4.5: Arreglo que involucra dos cavidades para producir estados entrelazados.

secuencial a través de las cavidades C_1 y C_2 sintonizadas dispersivamente con la transición atómica $|i\rangle \rightarrow |e\rangle$ y inicialmente preparadas en estados coherentes $|\alpha\rangle|\beta\rangle$. Un primer átomo se prepara en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ para interactuar con ambas cavidades. La velocidad del átomo se selecciona tal que, una vez que el átomo ha cruzado C_1 y C_2 , los estados de los campos experimentan un cambio de fase $|-\alpha\rangle|-\beta\rangle$. Entonces, el átomo experimenta un pulso $\pi/2$ en la zona Ramsey R_3 . Como en el esquema anterior, el átomo se mide en el estado base y las cavidades colapsan en el estado $|-\alpha\rangle|-\beta\rangle + |\alpha\rangle|\beta\rangle$.

Un segundo átomo se prepara en el estado $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, y pasa por C_1 produciendo un cambio de fase $|\pm\alpha\rangle|\beta\rangle \rightarrow |\mp\alpha\rangle|\beta\rangle$. El estado de este átomo es rotado en la zona Ramsey R_2 , tal que $|e\rangle \rightarrow (b_e|e\rangle + b_g|g\rangle)$ y $|g\rangle \rightarrow (-b_g|e\rangle + b_e|g\rangle)$. Finalmente el átomo cruza C_2 cambiando la fase del campo tal que $|\alpha\rangle|\pm\beta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle|\mp\beta\rangle$. Ajustando las amplitudes b_e , b_g y detectando en el estado base, se genera el estado en Eq. (4.3).

4.4. Muerte súbita inducida del entrelazamiento

Como hemos discutido, estados de la forma (4.19) evolucionan como estados entrelazados X cuando $N_a = N_b = N_0$, pero la muerte súbita del entrelazamiento

no aparece en la evolución. Asumiendo parámetros iniciales $\alpha \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow -\alpha, \delta \rightarrow -\alpha$, esto es, el estado Ec. (4.19) se transforma a

$$|\Psi_1\rangle = N_0 (|\alpha\rangle |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle |-\alpha\rangle), \quad (4.26)$$

el entrelazamiento entre los dos estados coherentes puede caracterizarse através de solo dos elementos de matriz, en analogía con Ec. (4.23). A pesar de que este caso involucra solo decaimiento asintótico, la muerte súbita del entrelazamiento se puede inducir usando un proceso difusivo. Esta clase de proceso se puede implementar, por ejemplo, enviando átomos a través del eje de la cavidad en una forma secuencial, como se discutirá para el esquema de una cavidad.

Átomos en el estado excitado experimentan una rotación en la primera zona Ramsey, tal que $|e\rangle \rightarrow C_e|e\rangle + C_g|g\rangle$, con $|C_e|^2 + |C_g|^2 = 1$. Cada uno interactúa dispersivamente cambiando la fase del segundo campo. La interacción dispersiva produce un cambio de fase tal que (4.26) se transforma a

$$|\Psi_2\rangle = N_0 (|\alpha\rangle |-\alpha\rangle + |-\alpha\rangle |\alpha\rangle). \quad (4.27)$$

Después de que han pasado N átomos en intervalos de tiempo Δt , la matriz densidad para ambos campos, tras haber trasado sobre los grados de libertad de los átomos será

$$\rho(t_n) = \frac{1}{M} [X_n \rho_1(t_n) + Y_n \rho_2(t_n)], \quad (4.28)$$

donde $M = 2N_0^2(1 + \exp(-4|\alpha|^2))$, $t_n = n\Delta t$ y los estados $\rho_1(t_n)$, $\rho_2(t_n)$ corresponden a evoluciones temporales de los estados $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_2\rangle$, respectivamente.

Las expresiones para X_n y Y_n vienen dadas por

$$X_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} |C_g|^{2(2n-k)} |C_e|^{2k},$$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} |C_g|^{2(2n+1-k)} |C_e|^{2k}.$$

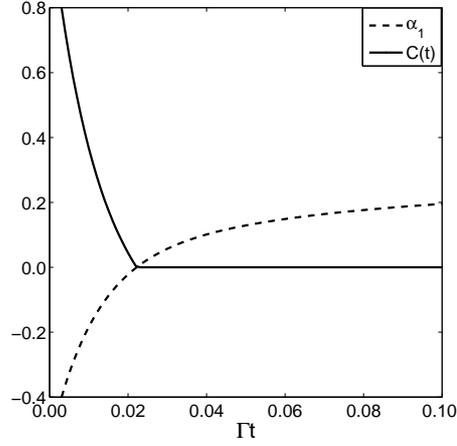


Figura 4.6: Evolución del desentrelazamiento para el sistema efectivo de dos qubits en la Ec. (4.28) como una función del tiempo adimensional Γt . Línea sólida corresponde a la concurrencia. Línea segmentada corresponde al autovalor negativo de ρ^{TA} . Los parámetros se tomaron como $|\alpha| = |\beta| = 2$, $N_a = N_b = 1/\sqrt{2}$, $|C_g| = 1,98$, $|C_e| = \sqrt{1 - |C_g|^2}$.

Se puede mostrar que el estado (4.28) exhibe muerte súbita del entrelazamiento, siendo el tiempo finito dada por

$$t_n^{(3)} = -\frac{1}{\Gamma} \ln \left(1 + \frac{1}{4|\alpha|^2} \ln \left(\frac{Y_n}{2X_n N_0^2} \right) \right). \quad (4.29)$$

aquí, observamos que el tiempo de muerte súbita $t_n^{(3)}$ depende de el número promedio de fotones $|\alpha|^2$ como en el caso previo y adicionalmente, de los coeficientes C_g y C_e .

4.5. Conclusión

Resumiendo, hemos mostrado que un tiempo finito de desentrelazamiento está presente no solo en el caso de dos qubits, sino que también para estados

coherentes, los cuales ocupan una porción mayor del espacio de Hilbert. En este caso, este tiempo depende de los parámetros iniciales, que involucran a las amplitudes iniciales y al número promedio de fotones. También, hemos propuesto una implementación física en cavidades para preparar y detectar estados que tienen muerte súbita del entrelazamiento, en cavidades. Además, en el caso cuando una superposición de estados coherentes no tiene muerte súbita, hemos propuesto un esquema para inducir este fenómeno.

Capítulo 5

Conclusiones generales

A lo largo de este trabajo se ha estudiado uno de los ingredientes fundamentales para la realización de protocolos en Computación e Información cuántica como lo es el entrelazamiento, se ha podido observar que los efectos que provoca el reservorio al sistema cuántico donde se quiere codificar la información, pueden ser muy variados, pero se pueden caracterizar de una forma sencilla. Esto nos permite tener un mayor grado de control a la hora de querer manipular el sistema físico. Por otro lado, apesar del deterioro de la información provocado por reservorio, en principio existen formas de contrarrestar este efecto, aumentando así el tiempo en el cual la información es útil. En particular en esta tesis se ha estudiado la evolución del entrelazamiento para sistemas cuánticos bipartitos expuestos a reservorios en la aproximación de cero temperatura. Se ha encontrado que para un sistema expuesto a fluctuaciones magnéticas las tasas de desentrelazamiento se ven disminuidas si el sistema tiene una doble degeneración en los autoestados del hamiltoniano. También partiendo de condiciones iniciales que involucran estados separables se pueden generar estados altamente entrelazados. Por otro lado, hemos encontrado que el comportamiento del desentrelazamiento

para dimensiones superiores, partiendo de estados X generalizados y usando la medida para la cota inferior del entrelazamiento de formación dada en [22], exhibe cambios abruptos siendo el último la muerte súbita del entrelazamiento. Además, este comportamiento se puede generalizar a cualquier dimensión bipartita $d \otimes d$. Por último se ha estudiado el desentrelazamiento de estados coherentes entrelazados, notando que estos evolucionan como dos qubits efectivos hemos podido caracterizar la muerte súbita como función de los parámetros iniciales, en este caso ha sido posible inducir la muerte súbita del entrelazamiento para estados que inicialmente decaen de forma asintótica.

Apéndice A

Resultados auxiliares

A.1. Cálculo de la concurrencia

En esta sección describiremos los pasos que conducen a la ec.(2.14). Para esto, usaremos lo propuesto en la referencia [37]. Según esta referencia, el primer paso es calcular el orden cero en $\Delta\alpha$ de $\rho\tilde{\rho}$, para ello escribiremos en forma conveniente la ecuación (2.8). Si definimos el vector ρ^\dagger igual a

$$\left(\rho_{11} \ \rho_{22} \ \rho_{33} \ \rho_{44} \ \rho_{12} \ \rho_{21} \ \rho_{13} \ \rho_{31} \ \rho_{14} \ \rho_{41} \ \rho_{23} \ \rho_{32} \ \rho_{24} \ \rho_{42} \ \rho_{34} \ \rho_{43} \right), \quad (\text{A.1.1})$$

entonces podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera

$$\dot{\rho} = (M_0 + M_1)\rho \quad (\text{A.1.2})$$

donde M_0 es una matriz diagonal independiente de α dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.3})$$

con $a = -4i\Delta$ y $b = -2i\Delta$.

M_1 es $\Delta\alpha$ por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (A.1.4)$$

con estas definiciones podemos calcular

$$\rho^{(0)}(t) = \exp(M_0 t) \rho^{(0)}(0) \quad (A.1.5)$$

con

$$\rho^{(0)}(0)^\dagger = \left(\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \right), \quad (A.1.6)$$

así obtenemos

$$\rho^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\exp[-2it\Delta]}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}\exp(-2it\Delta)}{4} \\ \frac{\exp(2it\Delta)}{4} & 0 & \frac{-\sqrt{2}\exp(2it\Delta)}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.7})$$

esta matriz esta en la base de autoestados de (2.2), para cambiarnos a la base canonica $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ tenemos que usar las relaciones (2.6). Usando esta relación podemos escribir $\rho_{base-usual}^{(0)}(t) = M\rho^{(0)}(t)M^\dagger$, donde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.8})$$

ahora podemos calcular $\rho\tilde{\rho}$ a orden cero en $\Delta\alpha$, esto es

$$\rho_{base-usual}^{(0)}(t)\tilde{\rho}_{base-usual}^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} f_t & f_t & f_t & h_t \\ g_t & g_t & g_t & -f_t \\ g_t & g_t & g_t & -f_t \\ -g_t & -g_t & -g_t & f_t \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.9})$$

donde

$$\begin{aligned} f_t &= \frac{\exp(-2it\Delta)}{32}(5\exp(2it\Delta) - \exp(4it\Delta) - \exp(6it\Delta) - 3) \\ g_t &= \frac{\exp(-2it\Delta)}{32}(3\exp(2it\Delta) - 3\exp(4it\Delta) + \exp(6it\Delta) - 1) \\ h_t &= \frac{\exp(-2it\Delta)}{32}(-3\exp(2it\Delta) - 5\exp(4it\Delta) - \exp(6it\Delta) - 9) \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

de estas expresiones uno puede notar que $h_t = -\frac{f_t^2}{g_t}$, con esto se simplifica notablemente el problema de encontrar los autovectores y autovalores de la matriz (A.1.9), que vienen definidos por

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{f_t}{g_t} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{f_t}{g_t} \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\} \leftrightarrow 2f_t + 2g_t$$

de aquí el autovalor distinto de cero es justamente el primer termino dentro de la raíz de la ec. (2.14). Para encontrar las correcciones a primer orden debemos tener los autovalores derechos e izquierdos de la matriz (A.1.9) para luego hacer los corchetes con la matriz a primer orden. Los autovalores derechos son los que calculamos recién, para calcular los autovalores izquierdos debemos calcular los autovalores de $(\rho_{can.}^{(0)}(t)\tilde{\rho}_{can.}^{(0)}(t))^\dagger$ que con la simplificación que vimos recién estos vienen dados por

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{g_t^*}{f_t^*} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\frac{g_t^*}{f_t^*} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\frac{g_t^*}{f_t^*} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{g_t^*}{f_t^*} \\ -\frac{g_t^*}{f_t^*} \\ -\frac{g_t^*}{f_t^*} \\ 1 \end{array} \right) \right\} \leftrightarrow 2f_t^* + 2g_t^*$$

Ahora necesitamos calcular el primer orden de la matriz $\rho\tilde{\rho}$, este viene dado en la base de autoestados por la expresión

$$\rho^{(1)}(t) = \exp(M_0 t) \int_0^t \exp(-M_0 t) M_1 \exp(M_0 t) \rho^{(0)}(0) dt. \quad (\text{A.1.11})$$

Esta expresión se puede resolver analíticamente, una vez que se ha escrito en la base canónica, se efectúan los corchetes entre un vector izquierdo, la matriz a primer orden y un vector derecho entonces las correcciones vienen dadas para cada autovalor por

$$\lambda_i^{(1)}(t) = \langle \psi_{l_i} | (\rho^{(0)}(t)\tilde{\rho}^{(1)}(t) + \rho^{(1)}(t)\tilde{\rho}^{(0)}(t)) | \psi_{r_i} \rangle. \quad (\text{A.1.12})$$

Agregando estas correcciones se obtiene la ecuación (2.14).

A.2. Cálculo de la matriz densidad

En esta sección describiremos los cálculos que partiendo de (4.3) conducen a (4.6). Lo primero es escribir el estado (4.3) en términos de estados coherentes, para ello hacemos uso de las relaciones (4.4), haciendo esto el estado se escribe

$$|\Psi\rangle = A_1(|\alpha\rangle|\beta\rangle + |-\alpha\rangle|-\beta\rangle) + A_2(|\alpha\rangle|-\beta\rangle + |-\alpha\rangle|\beta\rangle), \quad (\text{A.2.13})$$

donde los coeficientes A_1 y A_2 vienen dados por (4.7). Ahora usaremos el método propuesto en [87], para esto debemos comenzar escribiendo el estado total sistema-reservorio de la siguiente forma

$$|\Phi\rangle = |\Psi\rangle|0_a\rangle|0_b\rangle \quad (\text{A.2.14})$$

para calcular la evolución temporal de este estado debemos actuar con el operador evolución, con lo que el estado adquiere la forma

$$\begin{aligned} |\Phi_t\rangle = & A_1(|\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle|\alpha_{1t}\rangle|\beta_{1t}\rangle + |-\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle|-\alpha_{1t}\rangle|-\beta_{1t}\rangle) \\ & + A_2(|\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle|\alpha_{1t}\rangle|-\beta_{1t}\rangle + |-\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle|-\alpha_{1t}\rangle|\beta_{1t}\rangle), \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

donde los estados $|\alpha_{1t}\rangle, |-\alpha_{1t}\rangle, |\beta_{1t}\rangle, |-\beta_{1t}\rangle$ están definidos en forma análoga a los de la referencia [87]. Escribiendo la matriz densidad $\rho_t = |\Phi_t\rangle\langle\Phi_t|$, trazando sobre los grados de libertad del reservorio y definiendo

$$\begin{aligned} \langle\alpha_t|-\alpha_t\rangle &= \langle-\alpha_t|\alpha_t\rangle = \exp(-2F_1(t)\alpha^2) = \eta_\alpha \\ \langle\beta_t|-\beta_t\rangle &= \langle-\beta_t|\beta_t\rangle = \exp(-2F_2(t)\beta^2) = \eta_\beta, \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

con $F_1 = 1 - \exp(-\Gamma_1 t)$ y $F_2 = 1 - \exp(-\Gamma_2 t)$. Apartir de estas expresiones obtenemos finalmente que el estado a tiempo t esta dado por

$$\begin{aligned}
\rho_t = & A_1^2[|\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle-\beta_t| + \\
& \eta_\alpha\eta_\beta(|\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle-\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle\beta_t|)] + \\
& A_1A_2[\eta_\alpha(|\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle-\beta_t|) + \\
& \eta_\beta(|\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle-\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle\beta_t|)] + \\
& A_1A_2[\eta_\alpha(|-\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle\beta_t| + |\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle-\beta_t|) + \\
& \eta_\beta(|-\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle-\beta_t| + |\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle\beta_t|)] + \\
& A_2^2[|\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle-\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle\beta_t| + \\
& \eta_\alpha\eta_\beta(|\alpha_t\rangle|-\beta_t\rangle\langle-\alpha_t|\langle\beta_t| + |-\alpha_t\rangle|\beta_t\rangle\langle\alpha_t|\langle-\beta_t|)], \tag{A.2.17}
\end{aligned}$$

agrupando términos se puede redefinir esta expresión en 4 matrices

$$\rho_t = A_1^2\rho_1 + A_1A_2\eta_\alpha\rho_2 + A_1A_2\eta_\beta\rho_3 + A_2^2\rho_4. \tag{A.2.18}$$

Usando las relaciones (4.4) podemos escribir estas matrices en la base $\{|+\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$, despues de algunos cálculos las expresiones para las 4 matrices vienen dadas por

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{2(1+\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N-\beta_t)^2} & 0 & 0 & \frac{2(1+\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N+\beta_t N-\alpha_t N-\beta_t)^2} \\ 0 & \frac{2(1-\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N-\beta_t)^2} & \frac{2(1-\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N+\beta_t N-\alpha_t N-\beta_t)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2(1-\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N+\beta_t N-\alpha_t N-\beta_t)^2} & \frac{2(1-\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N-\alpha_t N+\beta_t)^2} & 0 \\ \frac{2(1+\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N+\alpha_t N\beta_t N-\alpha_t N-\beta_t)^2} & 0 & 0 & \frac{2(1+\eta_\alpha\eta_\beta)}{(N-\alpha_t N-\beta_t)^2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{(N+\alpha_t N+\beta_t)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{(N+\alpha_t N-\beta_t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{(N-\alpha_t N+\beta_t)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{(N-\alpha_t N-\beta_t)^2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{(N_{+\alpha_t} N_{+\beta_t})^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{(N_{+\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{(N_{-\alpha_t} N_{+\beta_t})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{(N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} \end{pmatrix},$$

$$\rho_4 = \begin{pmatrix} \frac{2(1+\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & 0 & 0 & \frac{-2(1+\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{+\beta_t} N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} \\ 0 & \frac{2(1-\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & \frac{-2(1-\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{+\beta_t} N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2(1-\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{+\beta_t} N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & \frac{2(1-\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{-\alpha_t} N_{+\beta_t})^2} & 0 \\ \frac{-2(1+\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{+\alpha_t} N_{+\beta_t} N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} & 0 & 0 & \frac{2(1+\eta_\alpha \eta_\beta)}{(N_{-\alpha_t} N_{-\beta_t})^2} \end{pmatrix},$$

donde los factores $N_{+\alpha_t}$, $N_{-\alpha_t}$, $N_{+\beta_t}$, $N_{-\beta_t}$ vienen dados por la ec. (4.5). Sumando los elementos de estas matrices se obtienen la ecuaciones (4.6).

Bibliografía

- [1] E. Joss, H. D. Zeh, C. Kiefer, D. Giulini, J. Kupsch and I. O. Stamatescu, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 2003).
- [2] M. Namiki , S. Pascazio and H. Nakazato , *Decoherence and quantum measurements*(World Scientific , 2nd edition ,1997)
- [3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge University Press (2000).
- [4] Howard Carmichael , *An Open Systems Approach To Quantum Optics* (Springer , Berlin ,1993)
- [5] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione , *The theory of Open quantum Systems* (Oxford University Press ,2002)
- [6] C.W. Gardiner and P.Zoller , *Quantum noise* (Springer , Berlin , 2000)
- [7] H. Louisell , *Quantum statistical properties of radiation* (John Wiley & Sons ,1973)
- [8] P.Facchi , S.Tasaki , S.Pascazio , H.Nakazato , A.Tokuse and D.A. Lidar , Phys. Rev. A **71** , (2004)

-
- [9] P.Facchi and S.Pascazio , Phys. Rev. Lett. **89**, 080401 , (2002)
- [10] D. Bacon , D.A. Lidar , K.B. Whaley , Phys. Rev. A **60** , (1999)
- [11] P.Facchi , D.A. Lidar , S.Pascazio , Phys. Rev. A **69** , (2004)
- [12] D.A. Lidar I.L. Chuang and K.B. Whaley , Phys. Rev. Lett. , (1998)
- [13] D.A. Lidar and Sara Schneider , (quant-ph/o410048 v1 , 2004)
- [14] U. Weiss, *Quantum dissipative systems*, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 1999).
- [15] M. Plenio y S. Virmani, Quant. Inf. Comp. 7, 1 (2007).
- [16] G. Alber, A. Delgado, N. Gisin, and I. Jex, J. Phys. A, **34**, 8821 (2001).
- [17] William K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [18] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [19] C. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin y W. Wootters, Phys. Rev. A **54** 3824 , (1996).
- [20] M. Horodechi, P. Horodechi y R. Horodechi, Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).
- [21] P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G.J. Milburn, Phys. Rev. A **64**, 042315 (2001).
- [22] K. Chen, S. Albeverio, S. Fei, Phys. Rev. Lett. **95**, 210501 (2005).
- [23] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [24] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).

-
- [25] O. Rudolph, quant-ph/0202121 .
- [26] G. Alber *et al.*, *Quantum Information* (Springer, Berlin, 2001).
- [27] H. Lo, S. Popescu, and T. Spiller, *Introduction to Quantum Computation and Information* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [28] D. P. DiVincenzo and P. W. Shor, Phys. Rev. Lett. **77**, 3260 (1996);
- [29] G. M. Palma *et. al.*, Proc. R. Soc. London A **452**, 567 (1996)
- [30] W. Y. Hwang, H. Lee, D. D. Ahn, and S. W. Hwang, Phys. Rev. A **62**, 062305 (2000);
- [31] I. A. Grigorenko and D. V. Khveshchenko, Phys. Rev. Lett. **94**, 040506 (2005).
- [32] M. Dubé and P. C. E. Stamp, Int. J. Mod. Phys. B **12**, 1191 (1998).
- [33] M. Governale, M. Grifoni, and G. Schön, Chem. Phys. **268**, 273 (2001).
- [34] G. J. Milburn, R. Laflamme, B. C. Sanders, and E. Knill, Phys. Rev. A **65**, 032316 (2002).
- [35] M. J. Storcz and F. K. Wilhelm, Phys. Rev. A **67**, 042319 (2003).
- [36] O. Astafiev, Yu. A. Pashkin, Y. Nakamura, T. Yamamoto and J. S. Tasi, Phys. Rev. Lett. **93**, 267007 (2004).
- [37] R. Guzman, J. C. Retamal, J. L. Romero and C. Saavedra, Phys. Lett. A. **323** (2004) 382.

-
- [38] C. H. Bennett and G. Brassard, in Proceedings IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing (IEEE, New York, 1984); C. H. Bennett, F. Bessette, G. Brassard, L. Salvail, and J. Smolin, *J. Cryptology* **5**,3 (1992).
- [39] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661(1991).
- [40] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, *Phys.Rev.Lett.* **70**,1895 (1993).
- [41] L.Diósi, *Lect. Notes Phys.* 622, 157-163 (2003).
- [42] P. J. Dodd and J. J. Halliwell, *Phys. Rev. A*, **69**, 052105 (2004).
- [43] Ting Yu and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 140404 (2004); idem **97**, 140403 (2006).
- [44] Muhammed Yönaç, Ting Yu and J H Eberly, *J. Phys. B* **39**, S621 (2006).
- [45] M. França Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A*. **73**, 040305(R), 2006.
- [46] Anna Jamróz, *J. Phys. A* **39**, 7727 (2006).
- [47] Z. Ficek and R. Tanaś, *Phys. Rev. A* **74**, 024304 (2006).
- [48] J. Wang, H. Batelaan, J. Podany and A. F. Starace, *J. Phys. B* **39**, 4343 (2006).
- [49] Lukasz Derkacz and Lech Jakóbczyk, *Phys. Rev. A* **74**, 032313 (2006).
- [50] Ru-Fen Liu and Chia-Chu Chen, *Phys. Rev. A* **74**, 024102 (2006).
- [51] Ting Yu and J. H. Eberly, [quant-ph/0503089](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0503089) (2006).

-
- [52] Z. Sun, X. Wang, Y. B. Gao, and C. P. Sun, quant-ph/0701093 (2006).
- [53] Muhammed Yönaç, Ting Yu and J H Eberly, quant-ph/0701111 (2006).
- [54] F. Mintert, A.R.R. Carvalho, M. Kus, and A. Buchleitner, Phys. Rep. **415**, 207 (2005); **419**, 143 (2005).
- [55] O. Rudolph, quant-ph/0202121.
- [56] K. Chen, L. A. Wu, Quantum Inf. Comput. 3, 193 (1999).
- [57] S. Schneider and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **65**, 042107 (2002).
- [58] A. Ekert and R. Jozsa, Rev. Mod. Phys. 68, 733 (1996).
- [59] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [60] A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- [61] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden, Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [62] E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, Nature **409**, 46 (2001).
- [63] W. Tittel and G. Weihs, Quantum Inf. Comput. **2**, 3 (2001)
- [64] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
- [65] L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang, Rev. Mod. Phys. **76**, 1037 (2004).
- [66] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).

-
- [67] R. Hanson, L.P. Kouwenhoven, J.R. Petta, S. Tarucha, L.M.K. Vander-sypen, e-print cond-mat/0610433.
- [68] L. Diósi, Lect. Notes Phys. 622, 157-163 (2003).
- [69] P. J. Dodd and J. J. Halliwell, Phys. Rev. A, **69**, 052105 (2004).
- [70] T. Yu and J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004); idem **97**, 140403 (2006).
- [71] M. Yönaç, T. Yu and J. H. Eberly, J. Phys. B **39**, S621 (2006).
- [72] M. França Santos, P. Milman, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A. **73**, 040305(R), 2006.
- [73] A. Jamróz, J. Phys. A **39**, 7727 (2006).
- [74] Z. Ficek and R. Tanaś, Phys. Rev. A **74**, 024304 (2006).
- [75] A. Vaglica and G. Vetri, e-print quant-ph/0703241; Mahmoud Abdel-Aty and H. Moya-Cessa, e-print quant-ph/0703077; H. T. Cui, K. Li, and X. X. Yi, e-print quant-ph/0612145; Mahmoud Abdel-Aty, e-print quant-ph/0610186.
- [76] M. P. Almeida, *et al.*, Science **316**, 579 (2007).
- [77] M. O. Terra Cunha, New J. Phys. **9**, 237 (2007).
- [78] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. A **53**, 1295 (1996).
- [79] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maite, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **24**, 4887 (1996).

-
- [80] J. M. Raimond, M. Brune and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **11**, 1295 (1997).
- [81] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997); W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [82] In Ref. [22], a tight lower bound of entanglement denoted Λ based on the positive partial transposition (PPT) and the realignment criteria is related to the concurrence in our case through $C = \Lambda - 1$.
- [83] For the sake of simplicity, we have renamed the states of Ref. [66]. For us, the lower energy level is $|g\rangle$, the intermediate one $|e\rangle$, and the upper auxiliary level $|i\rangle$.
- [84] S. Kuhr *et al.*, Appl. Phys. Lett. **90**, 164101 (2007).
- [85] P. Bertet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 200402-1 (2002).
- [86] S. Gleyzes *et al.*, Nature **446**, 297 (2007).
- [87] M. Orszag and J.C. Retamal , *Modern Challenges in Quantum Optics* (Springer , Berlin ,2001)

Publicaciones

- [88] F. Lastra, G. Romero, C. E. López and J. C. Retamal, International Journal of Quantum Information Vol. **5**, No.4 457 (2007).
- [89] F. Lastra, G. Romero, C. E. López, M. França Santos, and J. C. Retamal, Phys. Rev. A, **75**, 062324 (2007).
- [90] C. E. López, F. Lastra, G. Romero, and J. C. Retamal, Phys. Rev. A, **75**, 022107 (2007).
- [91] G. Romero, C. E. López, F. Lastra, E. Solano and J. C. Retamal, Phys. Rev. A, **75**, 032303 (2007).