

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIA  
DEPARTAMENTO DE FISICA



# Movimiento de partículas de prueba cargadas y fotones en agujeros negros de Einstein

Tesis para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física

**Marco Andrés Olivares Rubilar**

Director de Tesis: **Dr. Joel Saavedra Alvear**

SANTIAGO DE CHILE

Abril 2011

## DERECHO DE AUTOR

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

FACULTAD DE CIENCIA  
Universidad de Santiago de Chile

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Dirección Postgrado que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

**Marco Andrés Olivares Rubilar**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 28 de Abril de 2011.

**Director de tesis**

Dr. Joel Saavedra Alvear

---

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Mikhail Plyushchay

---

Dr. Fernando Méndez

---

Dr. Ramón Herrera

---

Dr. Samuel Lepe

---

**Director del Departamento de Física**

Profesor Bernardo Carrasco

---

*A mi hermano Manuel*

## AGRADECIMIENTOS

A mi profesor Joel Saavedra Alvear por su enorme apoyo y entusiasmo en el trabajo.

A mi amada esposa Macarena porque ella es mi todo, mi vida, mi razón, mi alma.

A mi hermosa hija Déborah porque me llena de luz y fuerza su vitalidad

A mi hijo Marco porque sus abrazos y risitas son el significado de existir.

A mis cuatro padres que están conmigo con un amor incondicional, los amo.

A mis cuatro hermanos por su apoyo y cariño siempre presente.

A Jose Villanueva, mi hermano Rengo, por todo su conocimiento.

A mis amigos Andrés Montes, Francisco Ercoli y Felipe Gatica por su ayuda explícita en el trabajo.

A todos mis amigos, profesores y alumnos.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. La métrica</b>	<b>4</b>
2.1. Caso RNdS . . . . .	5
2.1.1. Caso Q=M . . . . .	6
2.2. Caso RNAdS . . . . .	7
<b>3. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>10</b>
3.1. Ecuaciones de movimiento en el plano ecuatorial . . . . .	14
<b>4. Órbitas circulares</b>	<b>16</b>
<b>5. Movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström Anti-de Sitter</b>	<b>20</b>
5.1. Órbitas planetarias . . . . .	23
5.1.1. Límite Reissner-Nordström . . . . .	24
5.2. Trayectoria de segunda clase. . . . .	27
5.2.1. Límite Reissner-Nordström para la trayectoria de segunda clase	28
5.3. Trayectoria crítica de primera clase . . . . .	29
5.4. Trayectoria crítica de segunda clase . . . . .	30

5.5. Trayectorias radiales . . . . .	31
5.5.1. Caso alfa: Caída radial según el tiempo propio . . . . .	33
5.5.2. Caso beta: Caída radial según el tiempo coordinado . . . . .	34
<b>6. Movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström de Sitter</b>	<b>36</b>
6.1. Trayectoria de segunda clase: Caída al horizonte de eventos . . . . .	38
6.2. Trayectoria de tercera clase . . . . .	40
6.3. Trayectorias críticas . . . . .	42
6.4. Movimiento radial . . . . .	44
6.4.1. Movimiento radial de primera clase . . . . .	46
6.4.2. Movimiento radial de segunda clase . . . . .	48
6.4.3. Trayectorias radiales críticas . . . . .	49
<b>7. Movimiento de fotones en el agujero negro de Reissner-Nordström Anti-de Sitter</b>	<b>54</b>
7.1. Órbitas circulares . . . . .	56
7.2. Zona de deflección . . . . .	58
7.2.1. Trayectorias de segunda clase . . . . .	61
7.3. Trayectorias críticas . . . . .	64
7.3.1. Trayectoria crítica de primera clase . . . . .	65
7.3.2. Trayectoria crítica de segunda clase . . . . .	67
7.4. Movimiento de fotones capturados . . . . .	69
7.5. Limaçon de Pascal . . . . .	71
7.6. Fotones confinados . . . . .	73
7.7. Geodésicas radiales . . . . .	75



<b>8. Movimiento de fotones en el agujero negro Reissner-Nordström de Sitter</b>	<b>78</b>
8.1. Deflección de la luz . . . . .	80
8.2. Trayectoria de segunda clase . . . . .	80
8.2.1. Trayectorias radiales . . . . .	82
<b>9. Tiempo de retardo de las señales de radar</b>	<b>85</b>
<b>10. Geodésicas en el agujero negro de Lifshitz</b>	<b>89</b>
10.1. Geodésicas tipo tiempo . . . . .	90
10.2. Trayectorias de fotones . . . . .	96
10.2.1. Trayectorias radiales de fotones . . . . .	98
<b>11. Conclusiones y Comentarios finales</b>	<b>101</b>
<b>A. Movimiento respecto a las coordenadas angulares</b>	<b>104</b>
A.1. Movimiento respecto a la coordenada $\theta$ . . . . .	104
A.2. Movimiento respecto a la coordenada $\phi$ . . . . .	105

# Índice de figuras

2.1. Función lapsus para el agujero negro RN-dS. . . . .	6
2.2. Función lapsus para el agujero negro RN-AdS. La curva superior corresponde a la singularidad desnuda. . . . .	9
3.1. Potencial efectivo para partículas cargadas. El primero corresponde al agujero negro de RNAdS y el segundo al caso RNdS. . . . .	15
5.1. Potencial efectivo para partículas cargadas en el agujero negro de RN-AdS. . . . .	21
5.2. Órbita Planetaria para el espaciotiempo de Reissner-Nordström. Se observa la precesión de perihelio de la órbita confinada. . . . .	26
5.3. Trayectoria de segunda clase. La carga parte desde una distancia finita y cruza el horizonte de eventos. . . . .	28
5.4. Trayectoria crítica de primera clase. La carga llega desde una distancia mayor que el radio crítico y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable. . . . .	30
5.5. Trayectoria crítica de segunda clase. La carga llega desde una distancia menor que el radio crítico y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable. . . . .	31

5.6. Movimiento radial para partículas de prueba cargadas respecto al tiempo propio $\tau$ (curva sólida) y respecto al tiempo coordenado $t$ (curva segmentada) para valores fijos de las constantes. . . . .	35
6.1. Potencial efectivo para partículas cargadas en el agujero negro de RN-AdS. . . . .	36
6.2. Trayectoria de segunda clase para el caso RNdS: la carga se precipita al horizonte de eventos. . . . .	40
6.3. Trayectoria de tercera clase, caso RNdS: la carga avanza hacia el horizonte cosmológico. . . . .	41
6.4. Trayectorias críticas de primera, segunda y tercera clase para el agujero negro RNdS. . . . .	43
6.5. Potencial efectivo radial apropiado para el agujero negro de RNdS . . . . .	44
6.6. Movimiento radial para partículas cargadas respecto al tiempo coordenado, $t$ , y respecto al tiempo propio, $\tau$ con $m = 0.1$ , $M = 1$ , $Q = 0.8$ , $q = 0.01$ , $\Lambda = 400M$ . . . . .	53
7.1. Potencial efectivo para fotones en el agujero de RNAdS . . . . .	56
7.2. Deflección de la luz en el campo de un agujero negro con carga y constante cosmológica negativa . . . . .	61
7.3. El fotón tiene un punto de retorno en $r_A$ y se precipita al agujero negro cruzando el horizonte de eventos. . . . .	63
7.4. Crítica de primera clase. El fotón llega desde el infinito y se aproxima al radio inestable asintóticamente . . . . .	67
7.5. Crítica de segunda clase. El fotón se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable desde una distancia menor . . . . .	69

7.6. Fotón capturado. La trayectoria llega desde el infinito y se precipita al horizonte de eventos. . . . .	72
7.7. Limaçon de Pascal. Trayectoria única de este agujero negro. . . . .	73
7.8. Fotón confinado. Existe un punto de retorno para el fotón y luego cae, al agujero negro, inevitablemente. . . . .	76
7.9. Trayectorias radiales. El fotón cruza el horizonte de eventos según el tiempo propio, sin embargo, demora un tiempo coordinado infinito en llegar al horizonte de eventos. . . . .	77
8.1. Potencial efectivo para fotones en el agujero de RNdS . . . . .	79
8.2. Deflección de la luz en el agujero negro RNdS . . . . .	81
8.3. Geodésica de segunda clase. El fotón se precipita al horizonte de eventos	82
8.4. Trayectorias radiales para el agujero negro RNdS. Los fotones cruzan los horizontes de eventos y cosmológico según el tiempo propio, sin embargo, demoran un tiempo coordinado infinito en llegar a ambos horizontes . . . . .	84
10.1. Potencial efectivo para partículas. . . . .	91
10.2. Trayectorias de partículas con momentum angular correspondientes a los casos analizados. La línea segmentada representa el punto de partida y la línea sólida el horizonte de eventos. . . . .	96
10.3. Potencial efectivo para fotones . . . . .	96
10.4. Fotón con momentum angular. . . . .	98
10.5. Caída radial de fotones según el tiempo propio y el tiempo coordinado	100

## PREFACIO

Esta tesis se basa en los trabajos que el autor ha realizado durante sus estudios doctorales. El primer trabajo corresponde a un artículo sobre el movimiento de partículas y fotones en agujeros negros publicado en *Classical and Quantum Gravity* [9]. El estudio del movimiento en bajas dimensiones fue inspirado en un artículo publicado en *General Relativity and Gravitation* [24]. El trabajo sobre partículas cargadas corresponde a un artículo que se encuentra en referato en *Physical Review* [25]. A través de este trabajo será considerado un sistema de unidades en el cual la velocidad de la luz y la constante de Gravitación universal toman los valores  $c = 1$  y  $G = (8\pi)^{-1}$ .

## RESUMEN

En esta tesis, se obtienen trayectorias exactas para partículas de prueba con masa y carga eléctrica en la región exterior de un agujero negro del tipo Reissner-Nordström (Anti)-de Sitter. Mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi se estudian las trayectorias radiales y angulares, con lo cual se obtienen soluciones nuevas para las ecuaciones de movimiento, en términos del tiempo propio, del tiempo coordinado y de las coordenadas angulares, los resultados del estudio del movimiento se aplican a las pruebas de la relatividad general en el Sistema Solar. También se estudia el movimiento de la luz en el campo de agujeros negros cargados con constante cosmológica y encontramos la solución exacta a las geodésicas nulas de un agujero negro de Reissner-Nordström (Anti)-de Sitter. Por medio de un detallado análisis de los potenciales efectivos para fotones, se encuentran todos los posibles movimientos que están permitidos. La deflexión de la luz y el retardo en las señales de radar son dos de las pruebas de la relatividad asociadas con el movimiento de fotones calculados en este trabajo. Las órbitas son graficadas para establecer una visualización directa de los diferentes tipos de trayectorias. Se demuestra que la estructura geodésica nula de este agujero negro presenta nuevos tipos de movimientos los cuales no se encuentran en el espaciotiempo de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Finalmente se realiza un estudio en gravedad de bajas dimensiones, calculando trayectorias exactas para partículas de prueba con y sin masa en la región exterior del agujero negro de Lifshitz en tres dimensiones.

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio del movimiento de partículas en la vecindad de agujeros negros es un fenómeno interesante de la gravedad clásica, principalmente porque permite hacer pruebas de la relatividad como la precesión de perihelio, la deflexión de la luz y el retardo del tiempo en las señales de radar. Con respecto a esto hay varios estudios sobre trayectorias de partículas en campos gravitacionales o geodésicas en las proximidades de un agujero negro. Por ejemplo, la estructura geodésica de Schwarzschild, Reissner-Nordström y los agujeros negros de Kerr, los cuales fueron estudiados en detalle por Chandrasekhar [1] utilizando el lagrangiano y el formalismo de Hamilton-Jacobi.

La presencia de una constante cosmológica  $\Lambda$  es de gran importancia en la astrofísica moderna ya que esta nos permite explicar el modelo de la expansión acelerada del universo y además nos permite la existencia de espaciotiempos asintóticamente curvos [2]. La solución a esto último se obtiene imponiendo  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  en las ecuaciones de campo, donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci y  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico. Llamaremos soluciones de Schwarzschild de Sitter (SdS) cuando la constante cosmológica es considerada positiva  $\Lambda > 0$  y Schwarzschild Anti-de Sitter (SAdS) cuando la constante cosmológica es considerada negativa  $\Lambda < 0$ , la cual es de gran

importancia desde el punto de vista moderno debido a la conjetura AdS-CFT. La estructura geodésica completa del agujero negro SAdS fue desarrollada en el trabajo de referencia [9], el cual aporta importantes propiedades a la teoría de la gravitación y de los agujeros negros, como nuevos movimientos de partículas y fotones no encontrados en espaciotiempos asintóticamente planos. Trabajos posteriores han contribuido con otras características del movimiento geodésico en estos agujeros negros [22, 23].

Al definir el espaciotiempo de Reissner Nordström consideramos un agujero negro con carga eléctrica distinta de cero. Los estudios realizados por otros autores para las geodésicas asociadas con este tipo de agujeros negros consideran partículas de prueba neutras. En este trabajo se aportan cálculos de trayectorias para partículas de prueba en espaciotiempos de Reissner Nordström pero asociándole a estas carga eléctrica. Este es uno de los principales aportes que entrega este trabajo.

El estudio comienza considerando el espaciotiempo exterior de los agujeros negros de Einstein, los cuales se caracterizan por tener una simetría esférica y ser estáticos. La métrica es analizada en el tercer capítulo y se estudian los horizontes para los casos RNdS y RNAdS. Luego, mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi, se determinan la ecuaciones de movimiento para partículas de prueba con masa, carga y momentum angular, encontrando la solución exacta para dichas ecuaciones mediante integrales elípticas de Jacobi y Weiestrass. Una de las trayectorias más importantes encontradas es la órbita planetaria para el caso RNAdS. Órbitas planetarias también son entregadas en el llamado límite de Reissner Nordström que se obtiene al hacer cero la constante cosmológica, calculando la primera prueba de la relatividad general, la llamada precesión de perihelio para este caso. También se entregan otras trayectorias permitidas como trayectorias circulares y trayectorias críticas que se aproximan asintóticamente a las órbitas circulares. Determinamos el movimiento de partículas



que se precipitan a los horizontes de eventos y también al horizonte cosmológico para el caso RNdS. El cálculo se realiza para partículas con movimiento radial, es decir, sin momentum angular y movimiento con momentum angular no nulo.

El estudio continua con el movimiento de fotones en la geometría RNdS y RNAdS para los cuales se define un potencial efectivo cuyo análisis cualitativo nos entrega físicamente todos los movimientos posibles de la luz en el campo gravitatorio de estos agujeros negros. Las soluciones son entregadas mediante funciones de Weierstrass donde destaca la prueba de la relatividad denominada deflección de la luz. También el estudio del movimiento de fotones nos permite calcular la tercera prueba de la relatividad tratada en este trabajo denominada retardo del tiempo en las señales de radar.

Finalmente se hace un estudio de movimiento en gravedad de bajas dimensiones, donde se calcula la estructura geodésica del agujero negro de Lifshitz en tres dimensiones.

# Capítulo 2

## La métrica

La métrica para un espaciotiempo estático, esféricamente simétrico con masa  $M$ , carga eléctrica  $Q$  y constante cosmológica positiva  $\Lambda$  corresponde al campo gravitatorio del agujero negro de Reissner-Nordström de Sitter (RNdS). En el caso que la constante cosmológica sea negativa el espaciotiempo se denomina Reissner-Nordström Anti-de Sitter (RNAdS). En las coordenadas habituales de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , la métrica es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

donde  $f(r)$  es la función lapsus, la cual está dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (2.2)$$

y las coordenadas cumplen las relaciones:  $-\infty \leq t \leq \infty$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . La coordenada  $r$  es definida tal que  $r = \sqrt{\frac{A_{BH}}{4\pi}}$ , donde  $A_{BH}$  es el área del agujero negro. La singularidad física que indetermina los invariantes de curvatura se encuentra en  $r = 0$ . Los horizontes son definidos por  $f(r) = 0$  y no son singularidades físicas, porque son removibles utilizando un sistema de coordenadas apropiado. Sin embargo, la hipersuperficie  $r = r_+$ , tal que  $f(r_+) = 0$ , llamado horizonte de eventos,

divide el espaciotiempo en dos partes: externa ( $r > r_+$ ), zona donde  $t$  y  $r$  tienen carácter de coordenadas tipo-tiempo y tipo-espacio respectivamente, e interna ( $r < r_+$ ), zona donde  $t$  y  $r$  tienen carácter de coordenadas tipo-espacio y tipo-tiempo respectivamente. Físicamente una partícula que se precipita al horizonte de eventos emite una señal que se pierde por un corrimiento infinito hacia el rojo.

## 2.1. Caso RNdS

Consideramos el espacio tiempo RNdS. Las soluciones que nos interesa estudiar son la que poseen cuatro raíces reales, que nos permiten identificar un horizonte de eventos y uno cosmológico, para resolver las trayectorias permitidas entre ellos. Escribimos la función lapsus  $f(r) = -\Lambda\Delta_\Lambda/3r^2$  y los horizontes son definidos por  $\Delta_\Lambda = 0$ , donde

$$\Delta_\Lambda = r^4 - \frac{3}{\Lambda}(r^2 - 2Mr + Q^2). \quad (2.3)$$

El movimiento de las partículas de prueba está confinado a la zona comprendida entre  $r_+ < r < r_{++}$ , donde:  $r_{++}$  es el horizonte cosmológico y  $r_+$  el horizonte de eventos,  $r_-$  el horizonte de Cauchy y  $r_4$  la raíz negativa de la ecuación de cuarto grado. A partir de  $r > r_{++}$  la métrica vuelve a cambiar de signatura. Respectivamente

$$r_{++} = R_{++} + \sqrt{\frac{3}{2\Lambda} - R_{++}^2 - \frac{3M}{2\Lambda R_{++}}}, \quad (2.4)$$

y

$$r_+ = R_{++} - \sqrt{\frac{3}{2\Lambda} - R_{++}^2 - \frac{3M}{2\Lambda R_{++}}}, \quad (2.5)$$

donde  $R_{+++}$  se define

$$R_{+++} = \left[ \sqrt{\frac{1}{4\Lambda^2} - \frac{Q^2}{\Lambda}} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{18\Lambda M^2 - 1 - 12\Lambda Q^2}{[1 - 4\Lambda Q^2]^{3/2}} \right) \right] + \frac{1}{2\Lambda} \right]^{1/2}. \quad (2.6)$$

El horizonte de Cauchy,  $r_-$ , y la raíz negativa,  $r_4$ , quedan dadas por

$$r_- = -R_{+++} + \sqrt{\frac{3}{2\Lambda} - R_{+++}^2 + \frac{3M}{2\Lambda R_{+++}}}, \quad (2.7)$$

y

$$r_4 = -R_{+++} - \sqrt{\frac{3}{2\Lambda} - R_{+++}^2 + \frac{3M}{2\Lambda R_{+++}}}. \quad (2.8)$$

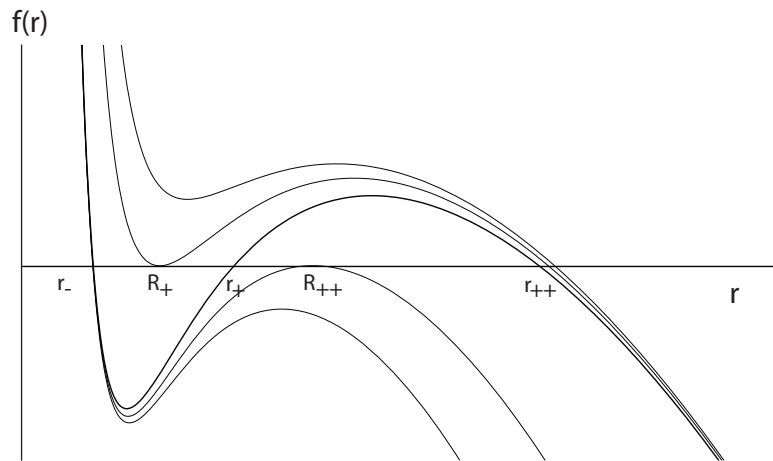


Figura 2.1: Función lapsus para el agujero negro RN-dS.

### 2.1.1. Caso $Q=M$

Estudiamos el caso particular donde la masa del agujero es  $M = Q$ . En ausencia de constante comológica, esta igualdad daría lugar a un agujero llamado extremo. Para determinar los horizontes del agujero negro determinamos los ceros de

la ecuación de cuarto grado  $r^4 - \frac{3}{\Lambda}(r^2 - 2Mr + M^2) = r^4 - \frac{3}{\Lambda}(r - M)^2 = 0$ , cuyas raíces son:

$$r_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left( -1 - \sqrt{4M\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + 1} \right), \quad (2.9)$$

$$r_- = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left( -1 + \sqrt{4M\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + 1} \right), \quad (2.10)$$

$$r_+ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left( 1 - \sqrt{-4M\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + 1} \right), \quad (2.11)$$

$$r_{++} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \left( 1 + \sqrt{-4M\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} + 1} \right). \quad (2.12)$$

Las soluciones cumplen la desigualdad  $r_4 < 0 < r_- < r_+ < r_{++}$ . Cuando son iguales el horizonte de eventos y el cosmológico, el agujero negro se denomina *agujero extremo*. Este caso ocurre cuando se cumple  $4M = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ , donde

$$r_+ = r_{++} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = 2M, \quad (2.13)$$

y el horizonte coincide con el radio de Schwarzschild.

## 2.2. Caso RNAdS

Al estudiar el espaciotiempo con constante cosmológica negativa es conveniente escribirla  $\Lambda/3 = -1/\ell^2$ , entonces la ecuación que nos permite determinar los horizontes queda mejor escrita en la forma  $\Delta_\ell = r^4 + \ell^2(r^2 - 2Mr + Q^2)$ . Este espaciotiempo tiene la posibilidad de no tener horizontes, si las raíces de la ecuación de cuarto grado son todas complejas, caso correspondiente a la singularidad desnuda.

Si dos son complejas y dos reales distintas existe un horizonte de eventos  $r_+$  y un horizonte de Cauchy  $r_-$ . Sin embargo, cabe la posibilidad de un agujero extremo, donde las raíces reales son iguales, y representan un horizonte de eventos  $R_+$ . Este horizonte se obtiene considerando las condiciones  $\Delta_\ell = 0$  y  $\partial\Delta_\ell/\partial r = 0$ , en cuyo caso se obtiene explícitamente

$$R_+ = \ell \left[ \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{Q^2}{3\ell^2}} \cosh \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left( \frac{\ell[54M^2 - 36Q^2 + \ell^2]}{[\ell^2 + 12H^2]^{3/2}} \right) \right] - \frac{1}{6} \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

Si el agujero tiene dos horizontes distintos, las soluciones corresponden a

$$r_+ = R_+ + \ell \sqrt{\frac{M}{2R_+} - \frac{R_+^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

$$r_- = R_+ - \ell \sqrt{\frac{M}{2R_+} - \frac{R_+^2}{\ell^2} - \frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

$$r_3 = -R_+ + i\ell \sqrt{\frac{M}{2R_+} + \frac{R_+^2}{\ell^2} + \frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

$$r_4 = r_3^*. \quad (2.18)$$

Si el valor del discriminante de la raíz es  $\frac{M}{2R_+} - \frac{R_+^2}{\ell^2} - \frac{1}{2} < 0$  entonces el espacio-tiempo no representa un agujero negro y se denomina singularidad desnuda.

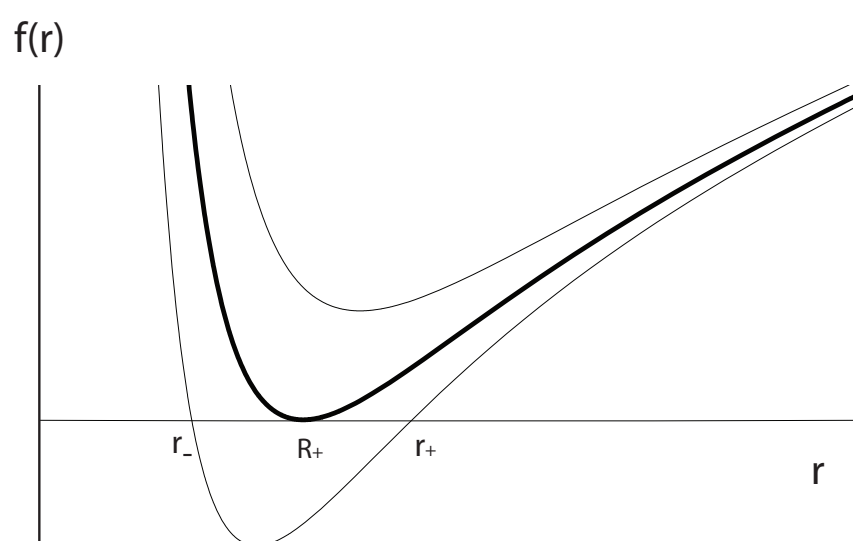


Figura 2.2: Función lapsus para el agujero negro RN-AdS. La curva superior corresponde a la singularidad desnuda.

# Capítulo 3

## Ecuaciones de movimiento

Consideremos una partícula de prueba con masa en reposo  $m$  y carga eléctrica  $q$  moviéndose en el campo exterior de un agujero negro. Sin carga, la partícula se mueve a lo largo de una geodésica. Sin embargo, la aparición de carga eléctrica produce una fuerza de Lorentz en la partícula, entonces podemos escribir las ecuaciones de Hamilton en términos de la posición  $x^\mu$  y el momentum generalizado  $\pi_\mu$ :

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}; \quad \frac{d\pi_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}, \quad (3.1)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro afín a la trayectoria y  $\mathcal{H}$  es el Hamiltoniano, que en términos de los coeficientes métricos de la ubicación de la partícula,  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ , toma la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - qA_\mu) (\pi_\nu - qA_\nu), \quad (3.2)$$

y esta expresión es para una partícula de prueba en cualquier campo electromagnético en un espaciotiempo curvo. El tetra-momentum es calculado con la primera ecuación de Hamilton  $p^\mu = dx^\mu/d\lambda = \pi^\mu - qA^\mu$ . Con el tetra-momentum la fuerza de Lorentz queda expresada en la forma  $dp^\mu/d\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta = qF^{\mu\nu} p_\nu$ . El parámetro afín es  $\lambda = \tau/m$  y el tensor campo electromagnético es  $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ , donde  $A_\mu$  son las componentes del potencial vector. El campo asociado con esta solución es



$F_{tr} = -Q/r^2$ . Mediante el formalismo hamiltoniano podemos determinar inmediatamente dos constantes de movimiento, porque las componentes  $A_\mu$  del potencial vector y las componentes  $g^{\mu\nu}$  de la métrica son independientes de  $t$  y de  $\phi$ , es decir, el campo electromagnético y la geometría del espaciotiempo son estacionarios y axialmente simétricos. Consecuentemente, el Hamiltoniano es independiente de  $t$  y de  $\phi$  y por consiguiente la ecuación de Hamilton,  $d\pi_\mu/d\lambda = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu$ , garantiza que  $\pi_t$  y  $\pi_\phi$  son constantes de movimiento. La interpretación física de las constantes de movimiento se realiza en el caso límite donde desaparece el potencial vector y la constante cosmológica, por lo tanto la métrica se comporta como un espacio plano. Entonces las constantes de movimiento llegan a ser  $\pi_t = -E$  y  $\pi_\phi = J$ , siendo  $E$  la energía y  $J$  el momentum angular (componente axial del momentum angular). La tercera constante de movimiento es la masa residual de la partícula de prueba  $m = \sqrt{-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}$ .

Para encontrar las ecuaciones de movimiento utilizaremos el formalismo de Hamilton-Jacobi, donde el momentum generalizado es obtenido como el gradiente de una función  $\pi_\mu = \partial S/\partial x^\mu$ . Consideramos una partícula de prueba con masa  $m$  y carga  $q$  en un campo gravitacional. La ecuación de Hamilton-Jacobi es dada por

$$-2\frac{\partial S}{\partial \lambda} = g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\mu} - qA_\mu \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\nu} - qA_\nu \right), \quad (3.3)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la geometría de fondo. La componente del potencial vector electromagnético que no desaparece es la componente temporal  $A_t = -\frac{Q}{r}$ , y  $S$  es la función característica de Hamilton. Para nuestra métrica esférica la forma explícita de la ecuación de Hamilton-Jacobi corresponde a:

$$-\frac{1}{f(r)} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{qQ}{r} \right)^2 + f(r) \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + 2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.4)$$

Para resolver la ecuación diferencial se propone el Ansatz siguiente

$$S = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + S_1(r) + S_2(\theta) + J\phi, \quad (3.5)$$

lo que nos permite una fácil separación de variables y  $E$  y  $J$  son identificados como la energía y el momentum angular de la partícula. La sustitución de este Ansatz en las ecuaciones previas nos permite calcular las constantes del movimiento de la siguiente forma:  $\partial S / \partial \lambda = -\mathcal{H}$ ,  $\partial S / \partial t = \pi_t$  y  $\partial S / \partial \phi = \pi_\phi$ , esto es,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} m^2, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial \phi} = J. \quad (3.6)$$

Reemplazando (3.6) en (3.4) obtenemos la siguiente ecuación

$$-\frac{1}{f(r)} \left( -E + \frac{qQ}{r} \right)^2 + f(r) \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2 \sin^2 \theta} + m^2 = 0, \quad (3.7)$$

y recordando que  $f(r) = \Delta_r / r^2$ , escribimos la ecuación (3.7) de la siguiente manera

$$-\frac{r^4}{\Delta_r} \left( E - \frac{qQ}{r} \right)^2 + \Delta_r \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 + J^2 \csc^2 \theta + r^2 m^2 = 0, \quad (3.8)$$

Ahora introducimos la constante de Carter  $K$ , una cuarta constante de movimiento, que nos permite naturalmente la separación de variables. Considerando que  $\partial S / \partial \theta = \pi_\theta = p_\theta$ , la constante de Carter es definida como

$$K = p_\theta^2 + J^2 \cot^2 \theta, \quad (3.9)$$

y también es definida otra constante  $L^2 > 0$ , de gran utilidad, como

$$L^2 = K + J^2, \quad (3.10)$$

de modo que encontramos las soluciones para las acciones radiales y angulares  $S_1$  y  $S_2$

$$S_1(r) = \epsilon \int dr \frac{\sqrt{R}}{\Delta_r}, \quad (3.11)$$

$$S_2(\theta) = \epsilon \int d\theta \sqrt{\Theta}, \quad (3.12)$$

donde  $\epsilon = \pm$ . Las funciones  $R$  y  $\Theta$  son definidas por

$$R = (Er^2 - qQr)^2 - \Delta_r(m^2r^2 + L^2), \quad (3.13)$$

$$\Theta = K - J^2 \cot^2 \theta = L^2 - J^2 \csc^2 \theta. \quad (3.14)$$

Para determinar la trayectoria de la partícula por el método de Hamilton-Jacobi consideramos

$$\frac{\partial S}{\partial L^2} = \text{constante}; \quad \frac{\partial S}{\partial m^2} = \text{constante}; \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \text{constante}; \quad \frac{\partial S}{\partial J} = \text{constante}, \quad (3.15)$$

donde la constante, sin pérdida de generalidad, puede ser considerada cero. Entonces las ecuaciones obtenidas a partir de la acción resultan ser

$$\frac{\partial S_1(r)}{\partial L^2} + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial L^2} = 0; \quad \frac{1}{2}\lambda + \frac{\partial S_1(r)}{\partial m^2} = 0; \quad -t + \frac{\partial S_1(r)}{\partial E} = 0; \quad \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial J} + \phi = 0, \quad (3.16)$$

y obtenemos a partir de estas ecuaciones las siguientes cuadraturas para las órbitas de las partículas de prueba

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int \frac{dr}{\sqrt{R}}, \quad (3.17)$$

$$\lambda = \int dr \frac{r^2}{\sqrt{R}}, \quad (3.18)$$

$$t = \int dr \frac{r^2(Er^2 - qQr)}{\Delta_r \sqrt{R}}, \quad (3.19)$$

$$\phi = \int d\theta \frac{Jcsc^2\theta}{\sqrt{\Theta}}. \quad (3.20)$$

Estas son las ecuaciones básicas del movimiento.

### 3.1. Ecuaciones de movimiento en el plano ecuatorial

En el siguiente capítulo vamos a considerar el movimiento de partículas de prueba en el plano ecuatorial definido por  $\theta = \pi/2$ . Cuando restringimos el movimiento al plano invariante, obtenemos inmediatamente que  $d\phi = Jd\gamma$  y además la constante  $L$  coincide con el momentum angular  $L = J$ . Las propiedades de las órbitas están dadas por la función  $R$  y así podemos establecer dos ecuaciones de movimiento

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{R}}{L}, \quad (3.21)$$

y

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Delta_r \sqrt{R}}{Er^4 - qQr^3}. \quad (3.22)$$

Los puntos de retorno de la partícula cumplen la condición  $\frac{dr}{dt} = 0$ , por lo tanto desde la ecuación (3.22) necesariamente

$$0 = \left(E - \frac{qQ}{r}\right)^2 - f(r) \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right), \quad (3.23)$$

resolviendo para la energía encontramos el potencial efectivo, para una partícula cargada con momentum angular, definido como una función explícita de  $r$

$$V(r) \equiv \frac{qQ}{r} + \sqrt{f(r)} \sqrt{m^2 + \frac{L^2}{r^2}}, \quad (3.24)$$

Para el movimiento radial ( $L = 0$ ), el potencial efectivo toma la forma

$$V(r) \equiv \frac{qQ}{r} + m\sqrt{f(r)}, \quad (3.25)$$

Los gráficos muestran los potenciales efectivos para partículas cargadas, tanto para el agujero de RNdS como para el agujero RNAdS. En ambos casos la curva inferior es para valores pequeños del momentum angular y las otras curvas corresponden a valores positivos crecientes de  $L$ , con valores fijos de las otras constantes de movimiento ( $m, q$ ), como también para valores fijos de los parámetros de la métrica ( $M, Q, \Lambda$ ).

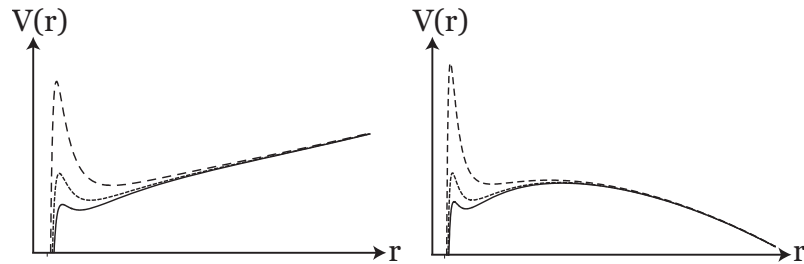


Figura 3.1: Potencial efectivo para partículas cargadas. El primero corresponde al agujero negro de RNAdS y el segundo al caso RNdS.

# Capítulo 4

## Órbitas circulares

Nos centramos en el estudio de las órbitas circulares estables e inestables en torno a los agujeros negros. Las órbitas circulares son determinadas por los valores extremos del potencial efectivo  $V(r)$ . Para determinar el valor de  $r$ , es decir, del radio para el cual la órbita tiene una energía de valor extremo, es necesario calcular la solución de la ecuación

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0. \quad (4.1)$$

Por simplicidad definiremos el potencial efectivo de la siguiente manera

$$V(r) = h + \sqrt{fj}, \quad (4.2)$$

definiendo las funciones  $h = \frac{qQ}{r}$ ,  $f = f(r)$  y  $j = m^2 + \frac{L^2}{r^2}$ . Así, la ecuación (4.1) queda escrita en la forma

$$h' \sqrt{fj} + \frac{1}{2}(f'j + fj') = 0, \quad (4.3)$$

donde las primas son derivadas respecto del radio. La ecuación (4.3) resulta ser de grado doce para la variable radial  $r$ , por lo que su solución queda restringida al plano

numérico. Sin embargo, algunas raíces reales tendrán interpretación física mediante un análisis del potencial efectivo y observaremos que existe una órbita circular estable y una inestable para el caso RNAdS y dos circulares inestables y una estable para el caso RNdS. Es posible determinar también los períodos de revolución de las órbitas circulares tanto estables como inestables respecto del tiempo propio y coordinado. A partir de la ecuación (4.3) se obtiene una expresión para  $L$

$$L^2 \left( \frac{fh'^2}{r^2} \right) + m^2 fh'^2 = \left[ \frac{m^2 f'}{2} + L^2 \left( \frac{f'}{2r^2} - \frac{f}{r^3} \right) \right]^2, \quad (4.4)$$

y la solución física de esta ecuación de segundo grado representa el momentum angular de las órbitas circulares estables e inestables. Escribimos la ecuación (4.4) en la forma

$$a + bL^2 = [c + dL^2]^2, \quad (4.5)$$

donde las constantes son definidas como

$$a = m^2 fh'^2; \quad b = \frac{fh'^2}{r^2}; \quad c = \frac{m^2 f'}{2}; \quad d = \frac{f'}{2r^2} - \frac{f}{r^3}, \quad (4.6)$$

$$L = \left[ \frac{b - 2cd - \sqrt{b^2 + 4d(da - bc)}}{2d^2} \right]^{1/2}, \quad (4.7)$$

y

$$E = h + \sqrt{f} \left( m^2 + \frac{b - 2cd - \sqrt{b^2 + 4d(da - bc)}}{2d^2 r^2} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

De modo que, teniendo las expresiones exactas para la energía y el momentum angular, como constantes determinadas con el radio de la órbita circular, vamos a ocupar estas ecuaciones para calcular los períodos de estas órbitas. A partir de la

ecuación del momentum angular podemos calcular el período de revolución de la órbita respecto del tiempo propio  $T_\tau = \frac{2\pi r^2}{L}$ , donde la solución exacta para una partícula cargada en órbita circular es

$$T_\tau = 2\pi r^2 \left[ \frac{b - 2cd - \sqrt{b^2 + 4d(da - bc)}}{2d^2} \right]^{-1/2}, \quad (4.9)$$

y el período de revolución de la órbita en el tiempo coordenado es  $T_t = \frac{2\pi r^2}{Lf}(E - h)$ , de modo que

$$T_t = T_\tau \sqrt{\frac{j}{f}}, \quad (4.10)$$

y explícitamente

$$T_t = \frac{T_\tau}{\sqrt{f}} \left[ m^2 + \frac{b - 2cd - \sqrt{b^2 + 4d(da - bc)}}{2d^2 r^2} \right]^{1/2}. \quad (4.11)$$

**Partículas neutras.** Considerando el movimiento circular de partículas sin carga eléctrica ( $q = 0$ ), en las ecuaciones anteriores desaparece el término coulombiano, es decir,  $h = 0$ . Esta condición produce que los términos  $a$  y  $b$  sean nulos. Entonces el momentum angular y la energía se reducen a los siguientes términos, respectivamente

$$L_\alpha = mr \sqrt{\frac{Mr - Q^2 - \Lambda r^4/3}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \quad (4.12)$$

y

$$E_\alpha = \frac{m}{r} \frac{(r^2 - 2Mr + Q^2 - \Lambda r^4/3)}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \quad (4.13)$$

Los períodos para las órbitas circulares de partículas neutras son



$$T_\tau = \frac{2\pi r}{m} \sqrt{\frac{r^2 - 3Mr + 2Q^2}{Mr - Q^2 - \Lambda r^4/3}}, \quad (4.14)$$

y

$$T_t = \frac{T_\tau}{\sqrt{f}} \left[ \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 - \Lambda r^4/3}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \right]^{1/2}, \quad (4.15)$$

y estas expresiones coinciden con los períodos de las órbitas circulares de Schwarzschild cuando la carga y la constante cosmológica son nulas.

# Capítulo 5

## Movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström Anti-de Sitter

Para realizar un estudio detallado del movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström Anti-de Sitter, es muy importante analizar el potencial efectivo. El gráfico siguiente ilustra los niveles de energía que vamos a considerar, donde están explícitas las distancias físicas correspondientes a las trayectorias que serán solucionadas en forma analítica.

La energía de las trayectorias no puede ser menor que el potencial efectivo. A continuación daremos una descripción de las órbitas permitidas en estos agujeros negros, clasificándolas en cinco trayectorias:

**1 Órbita planetaria:** La órbita corresponde a una trayectoria confinada a oscilar entre dos distancias extremas llamadas periastro y apoastro. Estas trayectorias tienen una solución aproximada llamada límite de Reissner-Nordström.

**2 Trayectorias de segunda clase:** La trayectoria de segunda clase se calcula con los mismos parámetros, energía y momentum angular, de la órbita planetaria y

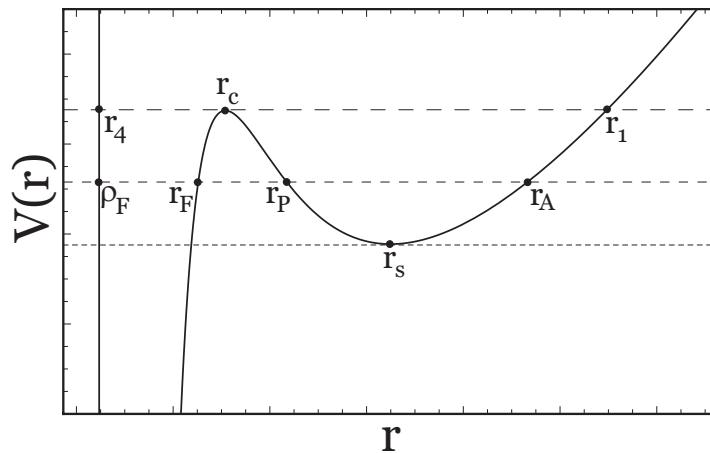


Figura 5.1: Potencial efectivo para partículas cargadas en el agujero negro de RN-AdS.

corresponde a una trayectoria que parte del reposo y desde una distancia finita, menor al periastro, y se precipita al horizonte de eventos. Tienen un punto de retorno dentro del horizonte de Cauchy. Estas trayectorias también tienen una solución aproximada llamada límite de Reissner-Nordström.

**3 Órbitas circulares:** Para ciertos valores fijos de las constantes, la ecuación de las geodésicas permite la existencia de órbitas circulares inestables y estables. La órbita circular estable tiene un radio mayor que la órbita circular inestable.

**4 Trayectorias críticas:** Estas trayectorias tienen la misma energía que la órbita circular inestable y existen dos tipos. La trayectoria crítica de primera clase, la cual parte del reposo y desde una distancia finita mayor que la distancia circular inestable aproximándose a ella asintóticamente. La trayectoria crítica de segunda clase se aproxima a la órbita circular inestable asintóticamente desde una distancia menor.

**5 Trayectorias radiales:** Estas trayectorias poseen momentum angular nulo y físicamente son partículas que caen desde una distancia inicial, desde el reposo, y se precipitan al horizonte de eventos. El comportamiento de esta trayectoria es diferente desde el punto de vista del tiempo coordinado con respecto a la caída radial según el tiempo propio.

La ecuación que gobierna el movimiento de la partícula para el caso del momentum angular distinto de cero,  $L \neq 0$ , es (3.21). La función  $R$  corresponde a un polinomio de sexto grado, y para esta sección la denotaremos en la forma  $R = P_6(r)$ , donde el polinomio explícitamente es

$$\begin{aligned}
 P_6(r) = & r^6 - \ell^2 \left( \frac{E^2}{m^2} - 1 - \frac{L^2}{m^2 \ell^2} \right) r^4 - 2\ell^2 \left( M - \frac{qQE}{m^2} \right) r^3 \\
 & + \ell^2 \left( \frac{L^2}{m^2} + Q^2 - \frac{q^2 Q^2}{m^2} \right) r^2 - \frac{2ML^2 \ell^2}{m^2} r + \frac{Q^2 L^2 \ell^2}{m^2}. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Las distintas soluciones reales del polinomio de sexto grado serán las distancias físicas del movimiento, como por ejemplo distancias de periastro, apoastro y radios de órbitas circulares y las órbitas permitidas dependerán de los valores de las constantes  $E$ ,  $M$ ,  $Q$ ,  $q$  y  $L$ . Vamos a considerar dos conjuntos de valores para las constantes anteriores; el primero de ellos permite la existencia de órbitas planetarias y para este caso el polinomio de sexto grado tiene seis distancias reales. Además este primer conjunto contiene una trayectoria de segunda clase que se precipita al horizonte de eventos. El segundo conjunto de valores fijos para las constantes corresponde físicamente a las trayectorias críticas, dentro de las cuales está la órbita circular inestable.

## 5.1. Órbitas planetarias

El estudio de órbitas planetarias se refiere a trayectorias confinadas a oscilar entre dos valores extremos. Este movimiento es de suma importancia para el estudio del sistema solar considerando que los planetas corresponden a partículas de prueba cargadas y que el Sol también tiene un exceso de carga. También puede ser aplicado al movimiento de estrellas pertenecientes a una galaxia que orbitan alrededor de un agujero negro ubicado en el centro de dicha galaxia. Las distancias de periastro y apoastro corresponden a las raíces  $r_P$  y  $r_A$  del polinomio  $P(r)$ . La expresión para este polinomio viene dada por

$$P_6(r) = (r - \sigma_F)^2 P(r). \quad \text{con} \quad P(r) = (r - \rho_F)(r - r_F)(r - r_P)(r_A - r). \quad (5.2)$$

Esta trayectoria está definida en los siguientes límites:  $\sigma_F < 0 < \rho_F < r_F < r_P < r < r_A$ . La ecuación de movimiento para las órbitas planetarias tienen la siguiente cuadratura:

$$-\frac{dr}{d\phi} = \frac{(r - \sigma_F)\sqrt{P(r)}}{\ell L_P}, \quad (5.3)$$

y la integral correspondiente es

$$\phi(r) = \ell L_P \int_{r_A}^r \frac{-dr}{(r - \sigma_F)\sqrt{P(r)}}. \quad (5.4)$$

Definiendo las constantes  $\zeta_P = \frac{2\ell L_P}{\sqrt{(r_A - r_F)(r_P - \rho_F)}}$ ,  $\alpha_P = \frac{1}{(\rho_F - \sigma_F)}$  y  $\beta_P = -\frac{(r_A - \rho_F)}{(r_A - \sigma_F)(\rho_F - \sigma_F)}$ , la solución viene dada por las integrales elípticas de Legendre de primera y tercera especie

$$\phi(r) = \zeta_P [\alpha_P F(\psi_P; \kappa_P) + \beta_P \Pi(\psi_P; \kappa_P, n_P)], \quad (5.5)$$

$$\psi_P = \arcsin \sqrt{\frac{(r_P - \rho_F)(r_A - r)}{(r_A - r_P)(r - \rho_F)}}, \quad (5.6)$$

donde las constantes son

$$\kappa_P = \sqrt{\frac{(r_A - r_P)(r_F - \rho_F)}{(r_A - r_F)(r_P - \rho_F)}}, \quad n_P = \frac{(r_P - r_A)(\sigma_F - \rho_F)}{(r_P - \rho_F)(\sigma_F - r_A)}. \quad (5.7)$$

La precesión de perihelio,  $\Delta\varphi$ , definida por

$$2\phi(r_P) = 2\pi + \Delta\varphi, \quad (5.8)$$

está dada en forma exacta por la siguiente expresión

$$\Delta\varphi = 2\zeta_P [\alpha_P F(\psi_P(r_A); \kappa_P) + \beta_P \Pi(\psi_P(r_A); \kappa_P, n_P)] - 2\pi, \quad (5.9)$$

donde  $F(\psi_P(r_A); \kappa_P)$  es la integral completa de Legendre de primera especie y  $\Pi(\psi_P(r_A); \kappa_P, n_P)$  es la integral completa de Legendre de tercera especie

### 5.1.1. Límite Reissner-Nordström

Cuando consideramos despreciable el término cosmológico, es decir,  $\ell \rightarrow \infty$ , la solución corresponde al espaciotiempo de Reissner-Nordström. La solución de la órbita planetaria en el agujero negro de Reissner-Nordström puede ser calculada en forma analítica y expresada como funciones elípticas de Jacobi. La ecuación que gobierna el movimiento de la partícula para este caso toma la forma

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left[ (E^2 - m^2) + \frac{2}{r}(m^2M - qQE) - \frac{1}{r^2}(L^2 + m^2Q^2 - q^2Q^2) + \frac{2ML^2}{r^3} - \frac{Q^2L^2}{r^4} \right]. \quad (5.10)$$

Para resolver la trayectoria planetaria primero definimos la constante  $\varepsilon^2 = (m^2 - E^2)^{-1}$ , y la ecuación (5.10) queda escrita en la forma

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{P_4(r)}{\varepsilon^2 L^2}, \quad (5.11)$$

donde

$$P_4(r) = -r^4 + \varepsilon^2 [2(m^2M - qQE)r^3 - (L^2 + m^2Q^2 - q^2Q^2)r^2 + 2ML^2r - Q^2L^2]. \quad (5.12)$$

Este polinomio requiere de cuatro raíces reales, por lo tanto lo escribiremos de la siguiente manera:  $P_4(r) = (r_A - r)(r - r_P)(r - r_F)(r - \rho_F)$ , y la trayectoria está definida en los siguientes límites:  $0 < \rho_F < r_F < r_P < r < r_A$ .

La ecuación de movimiento para las órbitas planetarias tienen la siguiente cuadratura

$$\phi(r) = \varepsilon L_P \int_{r_A}^r \frac{-dr}{\sqrt{P_4(r)}}, \quad (5.13)$$

y la solución viene dada por la integral elíptica de Jacobi de primera especie

$$\phi(r) = \xi_P F(\psi_P; \kappa_P), \quad (5.14)$$

$$\xi_P = \frac{2\varepsilon L}{(\sqrt{r_A - r_F})(r_P - \rho_F)}, \quad (5.15)$$

donde

$$\psi_P = \arcsin \sqrt{\frac{(r_P - \rho_F)(r_A - r)}{(r_A - r_P)(r - \rho_F)}}, \quad \kappa_P = \sqrt{\frac{(r_A - r_P)(r_F - \rho_F)}{(r_A - r_F)(r_P - \rho_F)}}. \quad (5.16)$$

Definiendo las constantes  $\varpi = \frac{1}{\xi_P}$  y  $\delta = \frac{(r_A - r_P)}{(r_P - \rho_F)}$ , podemos calcular la ecuación en coordenadas polares mediante el seno elíptico de Jacobi

$$r(\phi) = \frac{r_A + \rho_F \delta \operatorname{sn}^2(\varpi \phi)}{1 + \delta \operatorname{sn}^2(\varpi \phi)}, \quad (5.17)$$

y la precesión de perihelio  $\Delta\varphi$ , viene dada ahora por la expresión

$$\Delta\varphi = 2[\xi_P K(\kappa_P) - \pi], \quad (5.18)$$

siendo  $K(\kappa_P)$  la integral completa de Jacobi de primera especie. La órbita es graficada para valores fijos de las constantes de movimiento

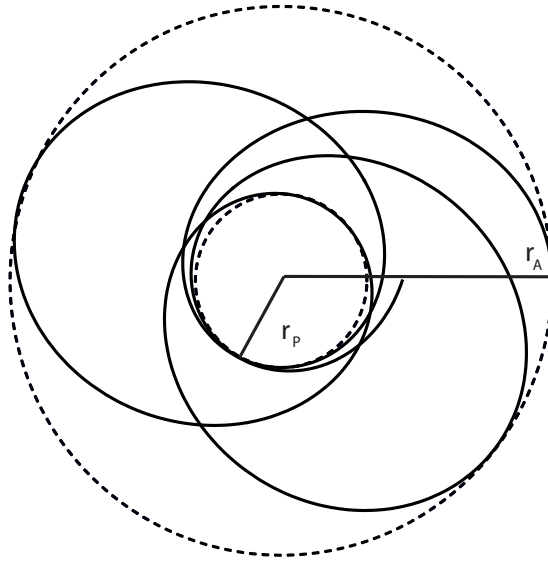


Figura 5.2: Órbita Planetaria para el espaciotiempo de Reissner-Nordström. Se observa la precesión de perihelio de la órbita confinada.



## 5.2. Trayectoria de segunda clase.

Esta trayectoria parte del reposo desde una distancia finita y se precipita al horizonte de eventos. Estas trayectorias manifiestan una de las características más importantes de los agujeros negros que son la captura de las partículas que se precipitan al horizonte de eventos. Estas trayectorias tienen un punto de retorno  $\rho_F$  a una distancia menor que el horizonte de Cauchy. Esta trayectoria se encuentra entre los siguientes límites:  $\sigma_F < 0 < \rho_F < r < r_F < r_P < r_A$ . La cuadratura es

$$\phi(r) = \ell L_P \int_{r_F}^r \frac{-dr}{(r - \sigma_F) \sqrt{P(r)}}, \quad (5.19)$$

donde ahora el polinomio de cuarto grado se escribe de la forma  $P(r) = (r - \rho_F)(r_F - r)(r_P - r)(r_A - r)$ . Definiendo las siguientes constantes  $\zeta_F = \frac{2\ell L_P}{\sqrt{(r_A - r_F)(r_P - \rho_F)}} = \zeta_P$ ,  $\alpha_F = \frac{1}{r_P - \sigma_F}$  y  $\beta_F = \frac{r_P - r_F}{(\sigma_F - r_P)(\sigma_F - r_F)}$ , la solución puede ser expresada por integrales elípticas de Legendre

$$\phi(r) = \zeta_F [\alpha_F F(\psi_F; \kappa_F) + \beta_F \Pi(\psi_F; \kappa_F, n_F)], \quad (5.20)$$

$$\psi_F = \arcsin \sqrt{\frac{(r_P - \rho_F)(r_F - r)}{(r_F - \rho_F)(r_P - r)}}, \quad (5.21)$$

donde

$$\kappa_F = \sqrt{\frac{(r_A - r_P)(r_F - \rho_F)}{(r_A - r_F)(r_P - \rho_F)}} = \kappa_P \quad y \quad n_F = \frac{(r_F - \rho_F)(\sigma_F - r_P)}{(r_P - \rho_F)(\sigma_F - r_F)}. \quad (5.22)$$

### 5.2.1. Límite Reissner-Nordström para la trayectoria de segunda clase

La trayectoria de segunda clase también puede ser aproximada al límite donde se considera la constante cosmológica despreciable. Esta es la solución aproximada, la cual para este caso es la integral elíptica de Legendre de primera clase

$$\phi(r) \approx \zeta_F \alpha_F F(\psi_F; \kappa_F), \quad (5.23)$$

y esta solución nos permite la inversión del problema, obteniendo una ecuación polar para la trayectoria

$$r(\phi) = \frac{r_F - r_P \gamma \operatorname{sn}^2(\omega \phi)}{1 - \gamma \operatorname{sn}^2(\omega \phi)}, \quad (5.24)$$

donde las constantes son  $\omega = \frac{1}{\zeta_F \alpha_F}$  y  $\gamma = \frac{r_F - \rho_F}{r_P - \rho_F}$ . El gráfico de la trayectoria aproximada de segunda clase es

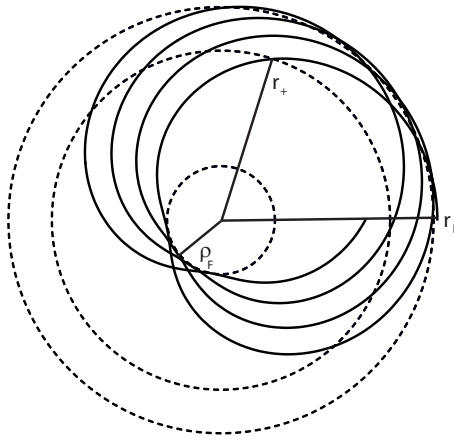


Figura 5.3: Trayectoria de segunda clase. La carga parte desde una distancia finita y cruza el horizonte de eventos.

### 5.3. Trayectoria crítica de primera clase

Las trayectorias críticas de primera clase son partículas que se aproximan asintóticamente a una órbita circular inestable,  $r_c$ , desde distancias mayores al radio crítico. Esta trayectoria está en los siguientes límites:  $r_6 < r_5 < 0 < r_4 < r_c < r < r_1$ , y para esta sección denotaremos  $R = F_c(r)$ , donde

$$F_c(r) = (r - r_6)(r - r_5)(r - r_c)^2(r_1 - r)(r - r_4). \quad (5.25)$$

Así la ecuación de la trayectoria nos queda

$$\pm \frac{dr}{d\phi} = \frac{(r - r_c)\sqrt{(r - r_6)(r - r_5)(r_1 - r)(r - r_4)}}{\ell L_P}, \quad (5.26)$$

Consideramos la caída desde  $r_1$ . La integral, de acuerdo a (5.26) es

$$\phi_c^{(1)}(r) = \ell L_P \int_{r_1}^r \frac{-dr}{(r - r_c)\sqrt{(r_1 - r)(r - r_4)(r - r_5)(r - r_6)}}, \quad (5.27)$$

y las constantes definidas a continuación nos permiten entregar la solución exacta para el ángulo  $\phi$  de la trayectoria crítica de primera clase:  $\alpha_1 = \frac{2\ell L_P}{\sqrt{(r_1 - r_5)(r_4 - r_6)}}$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{(r_6 - r_c)}$  y  $\gamma_1 = \frac{(r_6 - r_1)}{(r_1 - r_c)(r_6 - r_c)}$ . Dicha solución es

$$\phi_c^{(1)}(r) = \alpha_1 [\beta_1 F(\psi_c; \kappa_c) + \gamma_1 \Pi(\psi_c; \kappa_c, n_c)], \quad (5.28)$$

donde

$$\psi_c^{(1)} = \arcsin \sqrt{\frac{(r_4 - r_6)(r_1 - r)}{(r_1 - r_4)(r - r_6)}}, \quad (5.29)$$

$$\kappa_c^{(1)} = \sqrt{\frac{(r_1 - r_4)(r_5 - r_6)}{(r_1 - r_5)(r_4 - r_6)}}, \quad (5.30)$$

y

$$n_c^{(1)} = \frac{(r_6 - r_c)(r_4 - r_1)}{(r_1 - r_c)(r_4 - r_6)}. \quad (5.31)$$

El gráfico para este movimiento es el siguiente

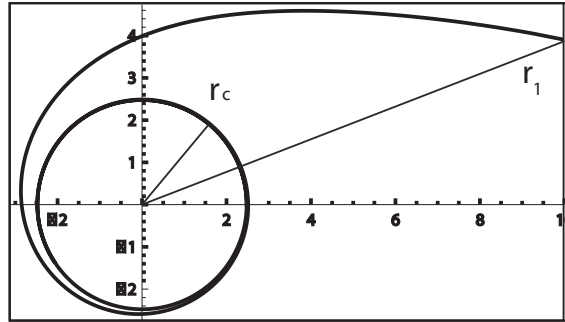


Figura 5.4: Trayectoria crítica de primera clase. La carga llega desde una distancia mayor que el radio crítico y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable.

## 5.4. Trayectoria crítica de segunda clase

La trayectoria crítica de segunda clase se aproxima a la órbita circular inestable desde distancias menores al radio crítico. Esta trayectoria está entre los siguientes límites:  $r_6 < r_5 < 0 < r_4 < r < r_c < r_1$ , y es conveniente integrarla como la subida desde  $r_4$ . La cuadratura para el ángulo  $\phi$  es

$$\phi_c^{(2)}(r) = \ell L_P \int_{r_4}^r \frac{dr}{(r_c - r) \sqrt{(r_1 - r)(r - r_4)(r - r_5)(r - r_6)}}, \quad (5.32)$$

y considerando  $\alpha_1$ , definido en el caso anterior, y las constantes  $\beta_2 = \frac{1}{(r_c - r_5)}$  y  $\gamma_2 = \frac{(r_4 - r_5)}{(r_c - r_4)(r_c - r_5)}$ , la solución es

$$\phi_c^{(2)}(r) = \alpha_1 [\beta_2 F(\psi_c; \kappa_c) + \gamma_2 \Pi(\psi_c; \kappa_c, n_c)], \quad (5.33)$$

donde  $\psi_c^{(2)} = \arcsin \sqrt{\frac{(r_1-r_5)(r-r_4)}{(r_1-r_4)(r-r_5)}}$ ,  $\kappa_c^{(2)} = \sqrt{\frac{(r_1-r_4)(r_5-r_6)}{(r_1-r_5)(r_4-r_6)}}$  y  $n_c^{(2)} = \frac{(r_5-r_c)(r_1-r_4)}{(r_4-r_c)(r_1-r_5)}$ .

El gráfico correspondiente es

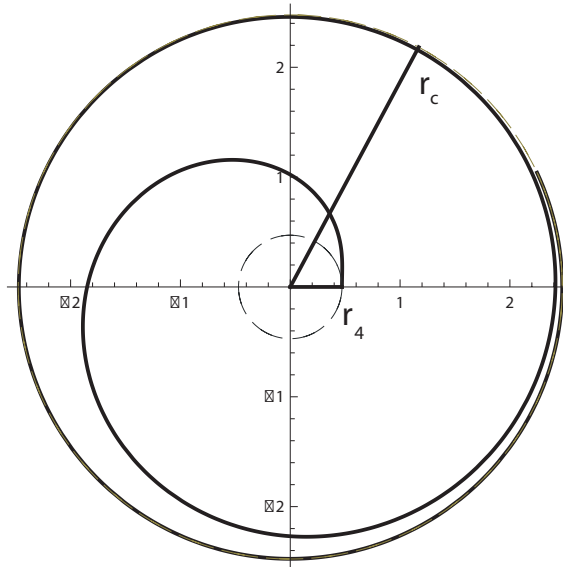


Figura 5.5: Trayectoria crítica de segunda clase. La carga llega desde una distancia menor que el radio crítico y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable.

## 5.5. Trayectorias radiales

Es muy importante el estudio de trayectorias que se precipitan radialmente al horizonte de eventos, estas trayectorias manifiestan claramente que las partículas vistas desde el tiempo propio logran cruzar el horizonte de eventos, sin embargo demoran un tiempo coordinado infinito en llegar al horizonte. El movimiento radial de partículas corresponde a trayectorias sin momentum angular,  $L = 0$ . Primero consideramos el caso RN-AdS, donde  $Q < M$ . Escribimos una relación de importancia para el cálculo de las trayectorias

$$\frac{1}{f(r)} = \ell^2 \frac{r^2}{F(r)}, \quad (5.34)$$

donde el polinomio de cuarto grado es  $F(r) = r^4 + \ell^2(r^2 - 2Mr + Q^2) = (r - r_+)(r - r_-)j(r)$ . Diferenciando la ecuación (3.18) e imponiendo  $L = 0$  planteamos la ecuación que gobierna este movimiento

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(E - \frac{qQ}{r}\right)^2 - m^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right), \quad (5.35)$$

y para poder efectuar la integración es conveniente escribir la ecuación de las trayectorias en la siguiente forma

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{m^2}{\ell^2} \frac{G(r)}{r^2}, \quad (5.36)$$

donde definimos el polinomio de cuarto grado  $G(r; \alpha, \beta, \gamma) := \alpha r^2 + \beta r - \gamma - r^4$ . Las constantes son definidas positivas  $\alpha := \ell^2(E^2/m^2 - 1)$ ,  $\beta := 2\ell^2(M - qQE/m^2)$  y  $\gamma := \ell^2(1 - q^2/m^2)$ . La cuadratura para el tiempo propio es

$$\tau(r) = \pm \frac{\ell}{m} \int \frac{r}{\sqrt{G(r)}} dr, \quad (5.37)$$

donde el signo (+), en la integral, es la subida radial y el signo menos, (-), representa la caída radial. La correspondiente cuadratura para el tiempo coordinado, con la misma interpretación de los signos, resulta ser

$$t(r) = \pm \frac{\ell^3}{m} \int \frac{r^3}{F(r)} \left(E - \frac{qQ}{r}\right) \frac{dr}{\sqrt{G(r)}}. \quad (5.38)$$

Estas soluciones serán estudiadas a continuación.

### 5.5.1. Caso alfa: Caída radial según el tiempo propio

El movimiento radial que vamos a considerar corresponde a la caída desde el reposo y desde una distancia de partida finita  $R_0$ . Entonces la cuadratura para el tiempo propio toma la forma

$$\tau(r) = -\frac{\ell}{m} \int_{R_0}^r \frac{r}{\sqrt{G(r)}} dr, \quad (5.39)$$

y la función radial para este caso es  $G(r) = (R_0 - r)(r - \rho_0)(r - \sigma_1)(r - \sigma_2)$ , la cual tiene cuatro raíces reales y distintas  $R_0 > r > \rho_0 > 0 > \sigma_1 > \sigma_2$ . Luego, la solución es

$$\tau(r) = k_0 \Pi(\Psi; \kappa, \nu) + k_I F(\Psi; \kappa), \quad (5.40)$$

las constantes de esta solución son

$$k_0 = \frac{\ell}{m} \frac{2(R_0 - \sigma_2)}{\sqrt{(R_0 - \sigma_1)(\rho_0 - \sigma_2)}}, \quad (5.41)$$

$$k_I = \frac{\ell}{m} \frac{2\sigma_2}{\sqrt{(R_0 - \sigma_1)(\rho_0 - \sigma_2)}}. \quad (5.42)$$

donde

$$\Psi = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho_0 - \sigma_2)(R_0 - r)}{(R_0 - \rho_0)(r - \sigma_2)}}, \quad (5.43)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{(R_0 - \rho_0)(\sigma_1 - \sigma_2)}{(R_0 - \sigma_1)(\rho_0 - \sigma_2)}}, \quad (5.44)$$

y

$$\nu = \frac{\rho_0 - R_0}{\rho_0 - \sigma_2}. \quad (5.45)$$

Esta solución es representada gráficamente junto a la del tiempo coordenado en la figura (5.6). Se observa en este gráfico que la partícula cruza el horizonte de eventos en un tiempo propio finito.

### 5.5.2. Caso beta: Caída radial según el tiempo coordenado

La cuadratura para la caída radial respecto al tiempo coordenado está dada por

$$t(r) = \frac{\ell^3}{m} \int_{R_0}^r \left( \frac{Er^3 - qQr^2}{F(r)} \right) \frac{-dr}{\sqrt{G(r)}}, \quad (5.46)$$

y para realizar el cálculo del tiempo coordenado como función de la distancia radial, es apropiado expandir en fracciones parciales el término central de la integral, es decir,

$$\frac{Er^3 - qQr^2}{F(r)} = \frac{A}{r - r_+} + \frac{B}{r - r_-} + \frac{C + Dr}{j(r)}, \quad (5.47)$$

donde la función  $j(r) = r^2 + ar + b^2$ , y las constantes están dadas por  $a = r_- + r_+$  y  $b^2 = \ell^2 + a^2 - r_-r_+$ . El caso de interés físico es el comportamiento del tiempo en las proximidades del horizonte de eventos, por lo tanto, el primer término es de mayor relevancia en las distancias cercanas al horizonte, cuya constante es  $A = \frac{r_+^2(Er_+ - qQ)}{(r_+ - r_-)j(r_+)}$ .

Entonces podemos escribir la solución general en la forma

$$t(r) = A_0 t_D(r) + A_1 t_1(r) + A_2 t_2(r) + A_3 t_3(r), \quad (5.48)$$

donde, claramente cerca del horizonte, el tiempo coordenado es aproximadamente el término divergente



$$t(r) \approx A_0 t_D(r), \quad (5.49)$$

donde la constante viene dada por

$$A_0 = \frac{\ell^3}{m(R_0 - r_+)(r_+ - \sigma_2)} \frac{2A}{\sqrt{(R_0 - \sigma_1)(\rho_0 - \sigma_2)}}. \quad (5.50)$$

La solución exacta para el tiempo divergente en el horizonte de eventos es

$$t_D(r) = (R_0 - \sigma_2)\Pi(\Psi; \kappa, n) - (R_0 - r_+)F(\Psi; \kappa), \quad (5.51)$$

y los parámetros que definen esta solución son los mismos de la solución para el tiempo propio, pero adicionando la constante  $n = \nu \frac{r_+ - \sigma_2}{r_+ - R_0}$ . La siguiente figura muestra el comportamiento del tiempo de caída radial para la partícula según los tiempos propio y coordenado. Físicamente se observa una similitud con el caso Schwarzschild donde la partícula cruza el horizonte con respecto al tiempo propio, pero jamás llega al horizonte según el tiempo coordenado.

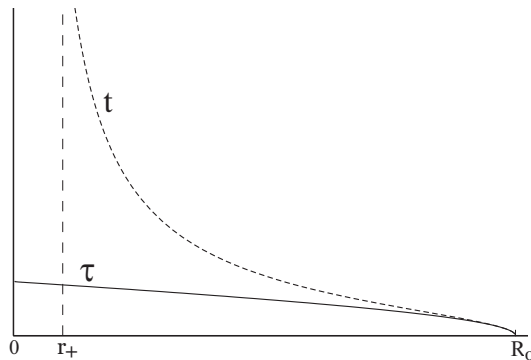


Figura 5.6: Movimiento radial para partículas de prueba cargadas respecto al tiempo propio  $\tau$  (curva sólida) y respecto al tiempo coordenado  $t$  (curva segmentada) para valores fijos de las constantes.

## Capítulo 6

# Movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström de Sitter

Ahora realizamos un estudio detallado del movimiento de partículas cargadas en el agujero negro de Reissner-Nordström de Sitter. El gráfico siguiente ilustra el potencial efectivo que vamos a considerar, donde están explícitas las distancias físicas correspondientes a las trayectorias que serán solucionadas en forma analítica

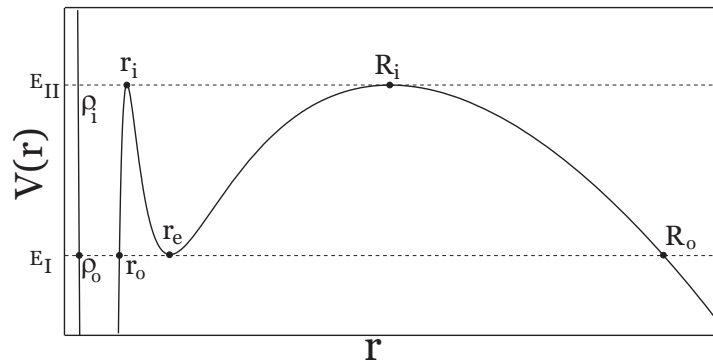


Figura 6.1: Potencial efectivo para partículas cargadas en el agujero negro de RN-AdS.

A continuación daremos una breve descripción de las órbitas permitidas en estos agujeros negros, clasificándolas en cinco trayectorias:

**2 Trayectorias de primera, segunda y tercera clase:** Las trayectorias de primera clase son las circulares estables y las órbitas planetarias. La de segunda clase corresponde a una trayectoria que parte del reposo y desde una distancia finita y se precipita al horizonte de eventos. La de tercera clase parten desde una distancia finita y suben hacia el horizonte cosmológico.

**3 Órbitas circulares:** Para ciertos valores fijos de las constantes, la ecuación de las geodésicas permite la existencia de órbitas circulares inestables y estables.

**4 Trayectorias críticas:** Existen trayectorias críticas de primera clase las cuales parten del reposo y desde una distancia finita mayor que la distancia circular inestable aproximándose a ella asintóticamente. La trayectoria crítica de segunda clase se aproxima a la órbita circular inestable asintóticamente desde una distancia menor. Existe una Trayectoria crítica de tercera clase con dos valores extremos asintóticos

**5 Trayectorias radiales:** Estas trayectorias poseen momentum angular nulo y físicamente son partículas que caen desde una distancia inicial y del reposo y se precipitan al horizonte de eventos. En este caso también se calculan trayectorias para partículas que se precipitan al horizonte cosmológico en agujeros negros RNdS. El comportamiento de esta trayectoria es diferente desde el punto de vista del tiempo coordinado con respecto a la caída radial según el tiempo propio.

La ecuación de movimiento para las trayectorias de partículas cargadas con momentum angular  $L \neq 0$  viene dado por la ecuación

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(E - \frac{qQ}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right), \quad (6.1)$$

la ecuación básica de las trayectoria la escribimos

$$\dot{r}^2 = \left( \frac{m\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} \right)^2 \frac{p_6(r)}{r^4}, \quad (6.2)$$

donde el polinomio característico para las diferentes trayectorias permitidas corresponde a

$$p_6(r) = r^6 \left( 1 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) + \frac{3r^4}{m^2 \Lambda} \left[ \left( E - \frac{qQ}{r} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left( m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right], \quad (6.3)$$

ahora escribimos la ecuación de movimiento para el ángulo azimutal

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \left( \frac{m\sqrt{\Lambda}}{L\sqrt{3}} \right)^2 p_6(r), \quad (6.4)$$

que luego de definir la constante  $\zeta = \frac{L\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}}$ , la cuadratura del ángulo adopta la forma simple

$$\phi(r) = \pm \zeta \int^r \frac{dr}{\sqrt{p_6(r)}}, \quad (6.5)$$

donde el signo (+) es para ángulos crecientes y el signo (−) es para ángulos decrecientes

## 6.1. Trayectoria de segunda clase: Caída al horizonte de eventos

Existe en el caso de de Sitter una trayectoria que parte desde un distancia finita y desde el reposo y cae al horizonte de eventos. El rango de esta trayectoria cumple la relación  $R_0 > r_e > r_0 \geq r > \rho_0 > 0 > \sigma_0$ , y la cuadratura siguiente es para el ángulo en función del radio

$$\phi(r) = \zeta \int_{r_0}^r \frac{-dr}{\sqrt{p_6(r)}}, \quad (6.6)$$

donde el polinomio característico viene dado por

$$p_6(r) = (R_0 - r)(r_e - r)^2(r_0 - r)(r - \rho_0)(r - \sigma_0), \quad (6.7)$$

la integral toma la forma siguiente

$$\phi(r) = \zeta \int_{r_0}^r \frac{-dr}{(r_e - r)\sqrt{(R_0 - r)(r_0 - r)(r - \rho_0)(r - \sigma_0)}}, \quad (6.8)$$

con esto podemos obtener la solución

$$\frac{1}{\zeta}\phi(r) = \alpha_I [\beta_I F(\varphi; K_I) + \gamma_I \Pi(\varphi; K_I, n_I)], \quad (6.9)$$

donde las constantes de la solución son, respectivamente,  $\alpha_I = \frac{2}{\sqrt{(R_0 - \rho_0)(r_0 - \sigma_0)}}$ ,  $\beta_I = \frac{1}{(r_e - R_0)}$  y  $\gamma_I = \frac{(R_0 - r_0)}{(R_0 - r_e)(r_e - r_0)}$ , y los parámetros que definen las integrales elípticas vienen dados por

$$K_I = \sqrt{\frac{(r_0 - \rho_0)(R_0 - \sigma_0)}{(R_0 - \rho_0)(r_0 - \sigma_0)}}, \quad (6.10)$$

$$n_I = \frac{(r_0 - \rho_0)(r_e - R_0)}{(R_0 - \rho_0)(r_e - r_0)}, \quad (6.11)$$

$$\varphi(r) = \arcsin \sqrt{\frac{(R_0 - \rho_0)(r_0 - r)}{(r_0 - \rho_0)(R_0 - r)}}. \quad (6.12)$$

El siguiente gráfico muestra la trayectoria de estas partículas

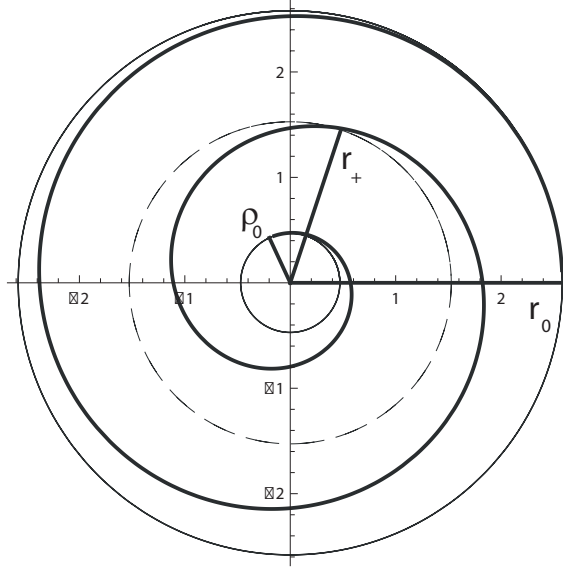


Figura 6.2: Trayectoria de segunda clase para el caso RNdS: la carga se precipita al horizonte de eventos.

## 6.2. Trayectoria de tercera clase

El agujero RNdS permite una trayectoria que parte desde el reposo y una distancia finita para alejarse del centro del campo y cruzar el horizonte cosmológico, la cual la denominamos trayectoria de tercera clase. El rango del movimiento de esta partícula cumple  $r \geq R_0 > r_e > r_0 > \rho_0 > 0 > \sigma_0$ . La cuadratura para este caso

$$\phi(r) = \zeta \int_{R_0}^r \frac{dr}{\sqrt{p_6(r)}}, \quad (6.13)$$

Ahora el polinomio se escribe según el rango del movimiento  $p_6(r) = (r - R_0)(r - r_e)^2(r - r_0)(r - \rho_0)(r - \sigma_0)$ . Así podemos establecer la integral del movimiento

$$\phi(r) = \zeta \int_{R_0}^r \frac{dr}{(r - r_e) \sqrt{(r - R_0)(r - r_0)(r - \rho_0)(r - \sigma_0)}}, \quad (6.14)$$

la solución a esta trayectoria también viene dada por las integrales elípticas

$$\frac{1}{\zeta}\phi(r) = \alpha_{II} [\beta_{II}F(\varphi; K_{II}) + \gamma_{II}\Pi(\varphi; K_{II}, n_{II})], \quad (6.15)$$

donde las constantes se definen por  $\alpha_{II} = \frac{2}{\sqrt{(R_0 - \rho_0)(r_0 - \sigma_0)}}$ ,  $\beta_{II} = \frac{1}{(r_0 - r_e)}$  y  $\gamma_{II} = \frac{(R_0 - r_0)}{(R_0 - r_e)(r_e - r_0)}$ , y los parámetros de las integrales corresponden

$$K_{II} = \sqrt{\frac{(r_0 - \rho_0)(R_0 - \sigma_0)}{(R_0 - \rho_0)(r_0 - \sigma_0)}}, \quad (6.16)$$

$$n_{II} = \frac{(R_0 - \sigma_0)(r_e - r_0)}{(r_0 - \sigma_0)(r_e - R_0)}, \quad (6.17)$$

$$\psi(r) = \arcsin \sqrt{\frac{(r_0 - \sigma_0)(r - R_0)}{(R_0 - \sigma_0)(r - r_0)}}. \quad (6.18)$$

El gráfico siguiente representa esta trayectoria

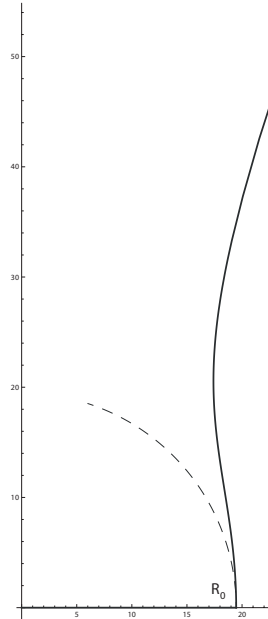


Figura 6.3: Trayectoria de tercera clase, caso RNdS: la carga avanza hacia el horizonte cosmológico.

### 6.3. Trayectorias críticas

Existen en este agujero negro la posibilidad de dos órbitas circulares inestables, las cuales pueden dar lugar a tres trayectorias críticas, de las cuales una es única de este agujero negro, es decir que no se encontrará en ningún otro espaciotiempo. Esta trayectoria posee dos distancias asintóticas correspondientes a los dos radios circulares críticos. Para determinar estas trayectorias vamos a considerar un potencial efectivo caracterizado por la constante  $L_I$  que establece dos órbitas circulares inestables de igual energía,  $E_{II}$ . Definiendo los radios inestables como  $r_i$  y  $R_i$ , donde  $r_i < R_i$ . Los radios inestables cumplen la relación

$$E_{II} \equiv V(r_i) = V(R_i) \quad y \quad \left( \frac{dV(r)}{dr} \right)_{r=R_i} = \left( \frac{dV(r)}{dr} \right)_{r=r_i} = 0. \quad (6.19)$$

Para calcular las tres posibles trayectorias consideramos la cuadratura

$$\phi(r) = \pm \zeta \int_{\varrho_0}^r \frac{dr}{\sqrt{P_6(r)}}, \quad (6.20)$$

donde  $\varrho_0$  es la distancia desde donde comienza el movimiento y el polinomio correspondiente es  $p_6(r) = (R_i - r)^2(r - r_i)^2(r - \rho_i)(r - \sigma_i)$ . La integral general de las trayectorias queda expresada por

$$\phi(r) = \pm \zeta \int_{\varrho_0}^r \frac{dr}{|R_i - r||r - r_i| \sqrt{(r - \rho_i)(r - \sigma_i)}}, \quad (6.21)$$

cuya solución puede ser expresada en términos de funciones elementales

$$\phi^{(C)}(r) = \phi^{(A)}(r) + \phi^{(B)}(r) - \vartheta_0, \quad (6.22)$$



$$\phi^{(A)}(r) = \pm \xi_0 \ln \left[ \frac{\xi_1 + \xi_2(r - R_i) + \xi_3 \sqrt{(r - \rho_i)(r - \sigma_i)}}{|R_i - r|} \right], \quad (6.23)$$

$$\phi^{(B)}(r) = \pm \eta_0 \ln \left[ \frac{\eta_1 + \eta_2(r - r_i) + \eta_3 \sqrt{(r - \rho_i)(r - \sigma_i)}}{|r - r_i|} \right], \quad (6.24)$$

donde  $\vartheta_0$  es la constante de integración y las otras constantes son  $\xi_0 = \frac{\zeta}{R_i - r_i} \frac{1}{\sqrt{(R_i - \rho_i)(R_i - \sigma_i)}}$ ,  $\xi_1 = 2(R_i - \rho_i)(R_i - \sigma_i)$ ,  $\xi_2 = 2R_i - \rho_i - \sigma_i$ ,  $\xi_3 = 2\sqrt{(R_i - \rho_i)(R_i - \sigma_i)}$ ,  $\eta_0 = \frac{\zeta}{R_i - r_i} \frac{1}{\sqrt{(r_i - \rho_i)(r_i - \sigma_i)}}$ ,  $\eta_1 = 2(r_i - \rho_i)(r_i - \sigma_i)$ ,  $\eta_2 = 2r_i - \rho_i - \sigma_i$ ,  $\eta_3 = 2\sqrt{(r_i - \rho_i)(r_i - \sigma_i)}$

La trayectoria crítica de primera clase corresponde a una partícula que cae desde una distancia inicial mayor que  $R_i$  y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable. El rango de movimiento corresponde a  $r > R_i$ . La trayectoria crítica de segunda clase corresponde a una partícula que sube desde una distancia inicial menor que  $r_i$  y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable. El rango de movimiento corresponde a  $r < r_i$ . La trayectoria crítica de tercera clase corresponde a una partícula que parte desde una distancia inicial mayor que  $r_i$  y menor que  $R_i$ , y se aproxima asintóticamente a ambas órbitas circulares inestables. El rango de movimiento corresponde a  $r_i < r < R_i$ .

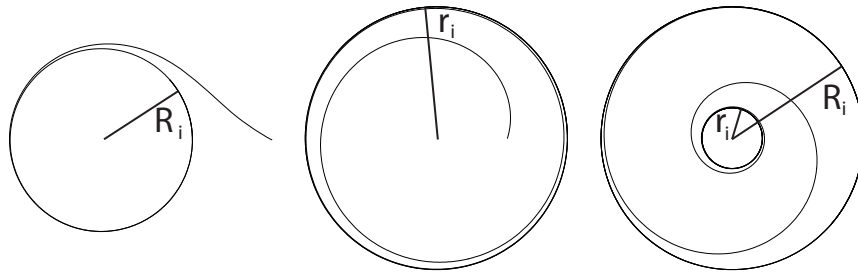


Figura 6.4: Trayectorias críticas de primera, segunda y tercera clase para el agujero negro RNdS.

## 6.4. Movimiento radial

El movimiento radial  $L = 0$  de partículas cargadas está gobernado por la siguiente ecuación

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(E - \frac{qQ}{r}\right)^2 - m^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right). \quad (6.25)$$

La ecuación de las geodésicas sugiere, además, la introducción de un potencial efectivo

$$V(r) = \frac{qQ}{r} + m \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{1/2}. \quad (6.26)$$

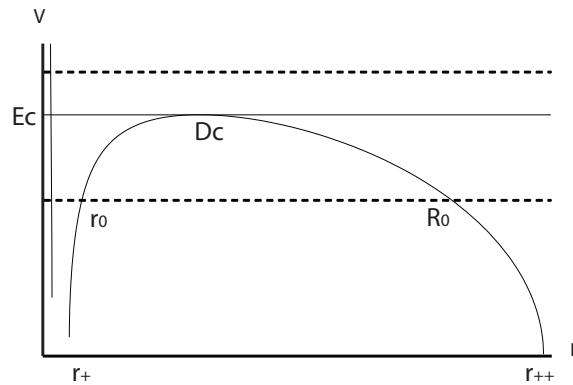


Figura 6.5: Potencial efectivo radial apropiado para el agujero negro de RNdS

Para diferentes valores de la constante  $E$  las trayectorias radiales permitidas son las siguientes:

1.- *Zona de Captura.* Si  $E > E_c$ , donde  $E_c$  es la energía crítica del punto de inestabilidad, las partículas se pueden precipitar al horizonte de eventos o también al horizonte cosmológico.

2.- *Trayectorias Críticas.* Si  $E = E_c$ , la partícula puede estar en reposo a una

distancia inestable  $D_c$ . Trayectorias que arriban desde distancias mayores y menores que  $D_c$ , se acercan asintóticamente a la distancia inestable.

1.- *Zona de Confinamiento.* Si  $E < E_c$ , vamos a considerar dos movimientos básicos denominados trayectorias radiales de primera clase y segunda clase. Esta clasificación es según si la partícula se precipita al horizonte de eventos o al horizonte cosmológico.

La ecuación de movimiento (6.25) es conveniente escribirla

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\Lambda m^2 G_0(r)}{3 r^2}, \quad (6.27)$$

donde el polinomio característico de la trayectoria es

$$G_0(r; \alpha, \beta, \gamma) := r^4 - \alpha r^2 + \beta r - \gamma, \quad (6.28)$$

y las constantes de este polinomio son definidas positivas  $\alpha := \frac{3}{\Lambda}(1 - E^2/m^2)$ ,  $\beta := \frac{6}{\Lambda}(M - qQE/m^2)$  y  $\gamma := \frac{3}{\Lambda}Q^2(1 - q^2/m^2)$ .

Para el movimiento radial tenemos finalmente la siguientes relaciones

$$\pm \frac{dr}{d\tau} = \frac{m\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{G_0(r)}}{r}, \quad (6.29)$$

$$\pm \frac{dt}{d\tau} = \frac{3}{\Lambda} \frac{r^2}{F(r)} \left( E - \frac{qQ}{r} \right), \quad (6.30)$$

$$\pm \frac{dr}{dt} = \frac{m\sqrt{\Lambda^3}}{\sqrt{3^3}} F(r) \left( E - \frac{qQ}{r} \right)^{-1} \frac{\sqrt{G_0(r)}}{r^3}, \quad (6.31)$$

y la función  $G_0(r)$  tiene cuatro raíces.

### 6.4.1. Movimiento radial de primera clase

Las trayectorias que parten desde una distancia finita y caen al horizonte de eventos son denominadas de primera clase. Poseen cuatro raíces reales y distintas, que cumplen  $R_0 > r_0 > d_1 > 0 > d_2$ . Entonces podemos escribir la función

$$G_I(r) = (r - R_0)(r - r_0)(r - d_1)(r - d_2), \quad (6.32)$$

La cuadratura para el movimiento según el tiempo propio es

$$\tau(r) = \pm \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \int \frac{r}{\sqrt{G_I(r)}} dr, \quad (6.33)$$

La cuadratura para el movimiento según el tiempo coordenado está dada por

$$t(r) = \pm \frac{\sqrt{3^3}}{m\sqrt{\Lambda^3}} \int \frac{r^3}{F(r)} \left( E - \frac{qQ}{r} \right) \frac{dr}{\sqrt{G_I(r)}}. \quad (6.34)$$

**Tiempo Propio**  $\tau^{(1)}$  Calculamos la caída radial al horizonte de eventos con respecto al tiempo propio. La región de integración es  $R_0 > r_0 \geq r > d_1 > 0 > d_2$ .

La cuadratura

$$\tau^{(1)}(r) = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \int_{r_0}^r \frac{-r dr}{\sqrt{(R_0 - r)(r_0 - r)(r - d_1)(r - d_2)}}, \quad (6.35)$$

La correspondiente solución es

$$\tau^{(1)}(r) = K_I F(\psi_1; \kappa_1) - K \Pi(\psi_1; \kappa_1, n_1), \quad (6.36)$$

donde las constantes son

$$K_I = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \frac{2R_0}{\sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}} \quad K = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \frac{2(R_0 - r_0)}{\sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}}, \quad (6.37)$$

y los parámetros que definen las integrales elípticas

$$\psi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(R_0 - d_1)(r_0 - r)}{(r_0 - d_1)(R_0 - r)}} \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{(r_0 - d_1)(R_0 - d_2)}{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}} \quad n_1 = \frac{r_0 - d_1}{R_0 - d_1}, \quad (6.38)$$

**Tiempo Coordinado**  $t^{(1)}$  La cuadratura para el tiempo coordinado está dada por la expresión

$$t^{(1)}(r) = \frac{\sqrt{3^3}}{m\sqrt{\Lambda^3}} \int_{r_0}^r \left( \frac{Er^3 - qQr^2}{F(r)} \right) \frac{-dr}{\sqrt{G_I(r)}}, \quad (6.39)$$

Es necesario expandir en fracciones parciales para encontrar las funciones que definen el tiempo coordinado como una función del radio. La expansión es

$$\frac{Er^3 - qQr^2}{F(r)} = \frac{A}{r_{++} - r} + \frac{B}{r - r_+} + \frac{C}{r - r_-} + \frac{D}{r - r_{--}}, \quad (6.40)$$

la solución general para el tiempo coordinado

$$t^{(1)}(r) = A_1 t_I(r) + A_2 t_{II}(r) + A_3 t_{III}(r) + A_4 t_{IV}(r), \quad (6.41)$$

la solución divergente en el horizonte de eventos es  $t_{II}$

$$A_2 = \frac{\Lambda^3}{m} \frac{2B}{(R_0 - r_+)(r_0 - r_+) \sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}}, \quad (6.42)$$

$$t_{II}(r) = (r_0 - r_+) F(\psi_1; \kappa_1) + (R_0 - r_0) \Pi(\psi_1; \kappa_1, n_2), \quad (6.43)$$

donde la constante de la integral

$$n_2 = \sqrt{\frac{R_0 - r_+}{r_0 - r_+} \frac{r_0 - d_1}{R_0 - d_1}} = n_1 \sqrt{\frac{R_0 - r_+}{r_0 - r_+}}, \quad (6.44)$$

### 6.4.2. Movimiento radial de segunda clase

El movimiento radial de segunda clase corresponde a partículas que parten desde una distancia inicial  $D_0$  desde el reposo alejándose hacia distancias mayores hasta finalmente cruzar el horizonte cosmológico. El rango de este movimiento es el siguiente

$$r \geq R_0 > r_0 > d_1 > 0 > d_2, \quad (6.45)$$

también este movimiento lo estudiaremos primero según el tiempo propio de la partícula y luego según el tiempo coordenado.

**Tiempo Propio**  $\tau^{(2)}$  La cuadratura básica del tiempo propio como función del radio viene dada por la siguiente expresión

$$\tau^{(2)}(r) = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \int_{R_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - R_0)(r - r_0)(r - d_1)(r - d_2)}}, \quad (6.46)$$

La solución es expresada como una combinación lineal de integrales elípticas de Jacobi de primera y tercera especie

$$\tau^{(2)}(r) = K_{II} F(\psi_2; \kappa_1) + K \Pi(\psi_2; \kappa_1, n_3), \quad (6.47)$$

Las constantes correspondientes

$$K_{II} = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \frac{2r_0}{\sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}} \quad K = \frac{\sqrt{3}}{m\sqrt{\Lambda}} \frac{2(R_0 - r_0)}{\sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}}, \quad (6.48)$$

$$\psi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{(r_0 - d_2)(r - R_0)}{(R_0 - d_2)(r - r_0)}} \quad \kappa_1 = \sqrt{\frac{(r_0 - d_1)(R_0 - d_2)}{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}} \quad n_3 = \frac{R_0 - d_2}{r_0 - d_2}, \quad (6.49)$$

**Tiempo Coordinado**  $t^{(2)}$  La expresión exacta para el tiempo coordinado en función explícita de  $r$

$$t^{(2)}(r) = \frac{\Lambda^3}{m} \int_{R_0}^r \left( \frac{Er^3 - qQr^2}{F(r)} \right) \frac{dr}{\sqrt{G_I(r)}}, \quad (6.50)$$

La solución general la podemos dividir en cuatro funciones

$$t^{(2)}(r) = A_1 t_I(r) + A_2 t_{II}(r) + A_3 t_{III}(r) + A_4 t_{IV}(r), \quad (6.51)$$

La solución divergente en el horizonte cosmológico es  $t_I$ , por lo tanto la partícula demora un tiempo infinito en llegar al horizonte cosmológico. La expresión exacta para la función  $t_I$  es

$$t_I(r) = (r_{++} - R_0)F(\psi_2; \kappa_1) + (R_0 - r_0)\Pi(\psi_2; \kappa_1, n_4), \quad (6.52)$$

La constante que multiplica a la función divergente viene dada por la siguiente expresión

$$A_1 = \frac{\Lambda^3}{m} \frac{2A}{(r_{++} - R_0)(r_{++} - r_0)\sqrt{(R_0 - d_1)(r_0 - d_2)}}, \quad (6.53)$$

Las constantes de la integral son las siguientes

$$n_4 = \frac{r_{++} - r_0}{r_{++} - R_0} \frac{R_0 - d_2}{r_0 - d_2} = n_3 \frac{r_{++} - r_0}{r_{++} - R_0}, \quad (6.54)$$

### 6.4.3. Trayectorias radiales críticas

Un caso que solo se da en el agujero negro RNdS es la existencia de una distancia de equilibrio inestable, donde la partícula queda en reposo. En este caso consideraremos que se cumple que:  $E < 1$  y que  $q < 1$ , con lo cual las constantes del

polinomio permiten cuatro soluciones reales donde dos son iguales, y corresponden a la distancia crítica  $D_C$ , es decir,

$$G_{II}(r) = (r - D_C)^2(r - D_1)(r - D_2), \quad (6.55)$$

Vamos a definir el polinomio de segundo grado  $g(r) = (r - D_1)(r - D_2)$ . Con esto la solución general para el tiempo coordinado es

$$\tau(r) = \pm \Lambda \int \frac{r}{|r - D_C| \sqrt{g(r)}} dr, \quad (6.56)$$

Distinguiremos dos tipos de trayectorias críticas, las de primera clase son trayectorias que se acercan a la distancia crítica desde radios mayores y las de segunda clase se acercan al radio crítico desde distancias menores.

**Crítica de Primera clase  $\tau_1^{(c)}$**  Esta trayectoria se aproxima asintóticamente a la distancia de equilibrio inestable desde distancias mayores, la región donde

$$R_0 > r > D_c > D_1 > 0 > D_2, \quad (6.57)$$

Consideraremos la caída desde una distancia  $R_0$  menor que el horizonte cosmológico y mayor que la distancia crítica  $r > D_C$ , y elegimos el signo negativo porque se aproxima a distancias menores

$$\tau_1^{(c)}(r) = -\Lambda \int_{R_0}^r \frac{r}{(r - D_C) \sqrt{g(r)}} dr, \quad (6.58)$$

La integral es convenientemente separada en dos expresiones

$$\tau_1^{(c)}(r) = -\Lambda \int_{R_0}^r \left[ 1 + \frac{D_C}{(r - D_C)} \right] \frac{dr}{\sqrt{g(r)}}, \quad (6.59)$$



y la solución general es la suma de ambas

$$\tau_1^{(c)}(r) = \Lambda[\tau_I(r) + \tau_{II}(r)], \quad (6.60)$$

La primera integral  $\tau_I(r)$  nos entrega una función regular en la distancia crítica y viene dada por la cuadratura y solución siguiente

$$\tau_I(r) = \int_{R_0}^r \frac{-dr}{\sqrt{g(r)}}, \quad (6.61)$$

$$\tau_I(r) = \ln \left[ \frac{D_C + R_0 + \sqrt{g(R_0)}}{D_C + r + \sqrt{g(r)}} \right], \quad (6.62)$$

La segunda función  $\tau_{II}(r)$  es divergente en  $D_C$ , por lo tanto la partícula tarda un tiempo infinito en llegar a la distancia de equilibrio inestable. La cuadratura y solución siguiente son para la función divergente del tiempo coordenado

$$\tau_{II}(r) = \int_{R_0}^r \left[ \frac{D_C}{(r - D_C)} \right] \frac{-dr}{\sqrt{g(r)}}, \quad (6.63)$$

$$\tau_{II}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{R_0 - D_C}{r - D_C} \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{4R_0 + 2\sqrt{2}\sqrt{g(R_0)}}{4r + 2\sqrt{2}\sqrt{g(r)}} \right], \quad (6.64)$$

La solución final para la caída radial crítica de primera clase es

$$\frac{\tau_1^{(c)}(r)}{\Lambda} = \ln \left[ \frac{D_C + R_0 + \sqrt{g(R_0)}}{D_C + r + \sqrt{g(r)}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{R_0 - D_C}{r - D_C} \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{4R_0 + 2\sqrt{2}\sqrt{g(R_0)}}{4r + 2\sqrt{2}\sqrt{g(r)}} \right], \quad (6.65)$$

el tiempo parte de cero cuando la distancia inicial es  $R_0$  y es infinito cuando la distancia es la crítica  $D_C$ .

**Crítica de Segunda Clase  $\tau_2^{(c)}$**  La trayectoria crítica de segunda clase corresponde al movimiento de partículas que se aproximan asintóticamente a la distancia crítica desde radios mayores que el horizonte de eventos pero menores que la distancia crítica. Eligimos que la partícula parte desde el reposo en  $r_0$  y tiende a la distancia crítica inestable. Consideramos el signo positivo ya que la partícula avanza hacia radios mayores, con esto la cuadratura queda

$$\tau_2^{(c)}(r) = +\Lambda \int_{r_0}^r \frac{r}{(D_C - r)\sqrt{g(r)}} dr, \quad (6.66)$$

Para este caso la solución general es

$$\frac{\tau_2^{(c)}(r)}{\Lambda} = \ln \left[ \frac{D_C + r_0 + \sqrt{g(r_0)}}{D_C + r + \sqrt{g(r)}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{D_C - r_0}{D_C - r} \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \frac{4r_0 + 2\sqrt{2}\sqrt{g(r_0)}}{4r + 2\sqrt{2}\sqrt{g(r)}} \right], \quad (6.67)$$

Esta trayectoria parte en  $t = 0$ , en  $r_0$ , y demora un tiempo infinito en llegar a la distancia crítica.

El gráfico que viene a continuación muestra las trayectorias radiales de primera y segunda clase como así también las trayectorias radiales críticas. En él se puede observar claramente que las trayectorias de primera clase cruzan el horizonte cosmológico en un tiempo propio finito pero demoran un tiempo coordenado infinito en llegar a dicho horizonte. También notamos que las trayectorias de segunda clase satisfacen la misma característica en el horizonte de eventos, es decir, según el tiempo coordenado llegan a él en un tiempo finito pero el tiempo coordenado es infinito. Observamos en el gráfico las trayectorias críticas de primera y segunda clase, las cuales demoran un tiempo infinito en llegar a la distancia de equilibrio inestable.

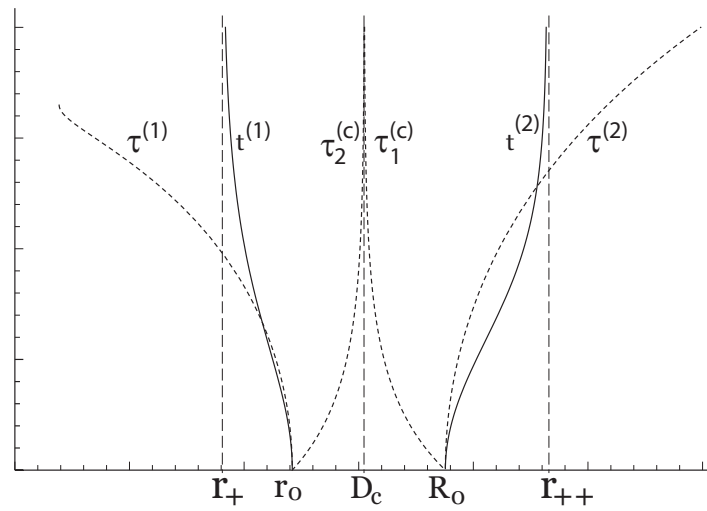


Figura 6.6: Movimiento radial para partículas cargadas respecto al tiempo coordinado,  $t$ , y respecto al tiempo propio,  $\tau$  con  $m = 0.1$ ,  $M = 1$ ,  $Q = 0.8$ ,  $q = 0.01$ ,  $\Lambda = 400M$ .

## Capítulo 7

# Movimiento de fotones en el agujero negro de Reissner-Nordström Anti-de Sitter

Vamos a considerar la ecuación de las geodésicas para fotones, imponiendo  $m = 0$  y  $q = 0$ ,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (7.1)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio a lo largo de la geodésica. Debido a la simetría esférica vamos a restringir nuestro movimiento al plano ecuatorial. Las constantes de movimiento son el momentum angular  $L$  y la energía  $E$  del fotón, dadas por las siguientes expresiones

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}, \quad (7.2)$$

y

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (7.3)$$

Además, con las constantes de movimiento podemos definir el parámetro de impacto  $b := \frac{L}{E}$  y reducir la ecuación de las geodésicas a una ecuación diferencial ordinaria, esto es,

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\ell^2}\right) - r^2 + 2Mr - Q^2. \quad (7.4)$$

La descripción dinámica queda completa agregando la ecuación diferencial del radio  $r$  como función del tiempo coordenado  $t$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{E^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^2 \times \left[E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{L^2}{r^2}\right] \quad (7.5)$$

La ecuación de las geodésicas sugiere, además, la introducción de un potencial efectivo dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (7.6)$$

Es importante destacar que para la luz, la contribución de la constante cosmológica al potencial efectivo es una constante. Sin embargo, todavía influye en el movimiento de la luz a través de la fórmula para el tiempo coordenado (8.4)

Para diferentes valores de la constante  $b$  las órbitas permitidas son las siguientes

1.- *Zona de Captura.* Si  $0 < b < b_c$ , los fotones llegan desde el infinito y se precipitan al horizonte de eventos.

2.- *Trayectorias Críticas.* Si  $b = b_c$ , los fotones pueden estar en una órbita circular inestable de radio  $r_c$ . El radio de esta órbita es independiente de  $L$ ;  $L$  sólo afecta el valor de la energía  $E_c$ . Fotones que arriban desde el infinito pueden caer asintóticamente al círculo de radio  $r_c$ .

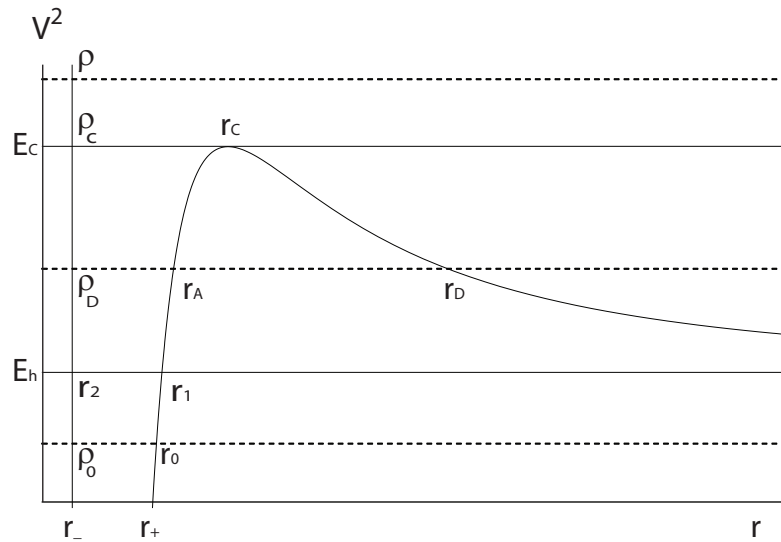


Figura 7.1: Potencial efectivo para fotones en el agujero de RNAdS

3.- *Zona de Deflección.* Si  $b_c < b < b_h$ , fotones caen desde el infinito a una distancia mínima  $r = r_D$  y luego regresan al infinito. Estos fotones son sólo deflectados. Las otras trayectorias permitidas corresponden a fotones moviéndose al otro lado de la barrera de potencial, los cuales se precipitan al horizonte de eventos.

4.- *Limaçon de Pascal.* Para  $b = b_h$  la trayectoria del fotón es una Limaçon de Pascal. Estas orbitas no existen en el caso Schwarzschild ni tampoco en el caso de Reissner-Nordström.

5.- *Zona de Confinamiento.* Si  $b_h < b < \infty$ , los fotones caen al horizonte de eventos desde una distancia inicial  $r_0$ .

## 7.1. Órbitas circulares

Nos centramos en el estudio de las órbitas circulares estables e inestables en torno a los agujeros negros. Las órbitas circulares son determinadas por los valores extremos del potencial efectivo  $V^2$ . Para determinar el valor de  $r_c$ , es decir, del radio

para el cual la órbita tiene una órbita circular, es necesario calcular la solución de la ecuación

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2}(V^2)' = 0. \quad (7.7)$$

La órbita circular inestable para fotones es independiente de la constante cosmológica, solo depende de la masa y la carga del agujero negro y viene dada en forma exacta por la siguiente ecuación

$$r_c = \frac{3M}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right], \quad (7.8)$$

donde la energía de la órbita circular es

$$E_c^2 = \frac{L^2}{r_c^2} \left( 1 - \frac{2M}{r_c} + \frac{Q^2}{r_c^2} + \frac{r_c^2}{\ell^2} \right). \quad (7.9)$$

Teniendo las expresiones exactas para la energía y el momentum angular como constantes determinadas con el radio de la órbita circular vamos a ocupar estas ecuaciones para calcular los períodos de estas órbitas. A partir de la ecuación del momentum angular podemos calcular el período de revolución de la órbita respecto del tiempo propio  $T_\tau = \frac{2\pi r_c^2}{L}$ , donde la solución exacta para una partícula cargada en órbita circular es

$$T_\tau = \frac{9\pi M^2}{2L} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right]^2, \quad (7.10)$$

y el período de revolución de la órbita del tiempo coordenado es  $T_t = \frac{2\pi E_c r_c^2}{L f_c}$

$$T_t = 2\pi \frac{r_c^2}{\sqrt{r_c^4 + \ell^2(r_c^2 - 2Mr_c + Q^2)}} = T_\tau \frac{E_c \ell r_c^2}{r_c^4 + \ell^2(r_c^2 - 2Mr_c + Q^2)} \quad (7.11)$$

el periodo propio depende de  $L$  pero no de  $\ell$ .

**Límite Schwarzschild** Considerando el movimiento circular de partículas sin carga eléctrica. el radio inestable es  $3M$ . Entonces, los períodos para las órbitas circulares de fotones se reducen a los siguientes términos

$$T_\tau = \frac{18\pi M^2}{L} \quad y \quad T_t = 6\pi M\sqrt{3} \quad (7.12)$$

## 7.2. Zona de deflección

En este caso las trayectorias de la luz corresponden a fotones que llegan desde el infinito y se aproximan a una distancia mínima  $r_D$ , y retornan al infinito. La luz es deflectada. Para estas geodésicas definimos el parámetro de impacto anómalo

$$\frac{1}{B^2} := \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\ell^2} > 0, \quad (7.13)$$

entonces la ecuación (8.1) de movimiento está dada por

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{P_4(r)}{B^2}, \quad (7.14)$$

donde el polinomio de cuarto grado es  $P_4(r) = r^4 - B^2 r^2 + 2MB^2 r - Q^2 B^2$ , y la distancia extrema está dada por

$$\frac{dr}{d\phi} \Big|_{r_D} = 0, \quad (7.15)$$

En este caso ocurre que todas las raíces del polinomio de cuarto grado son reales y distintas, por lo cual podemos escribir

$$P_4(r) = (r - r_D)(r - r_A)(r - \rho_D)(r - \sigma_D), \quad (7.16)$$



la trayectoria correspondiente a la deflección de la luz es la solución a la integral siguiente, la cual es calculada desde el punto de retorno  $r_D \leq r$ , es decir

$$\phi(r) = B \int_{r_D}^r \frac{dr}{\sqrt{P_4(r)}}, \quad (7.17)$$

para realizar la integración realizamos el primer cambio de variables:  $u = r - r_D$ , entonces la integral queda:

$$\phi(u) = B \int_0^u \frac{du}{\sqrt{uP_3(u)}}, \quad (7.18)$$

donde el polinomio de tercer grado en la nueva variable es  $P_3(u) = (u_1 + u)(u_2 + u)(u_3 + u)$  donde las constantes son las siguientes  $u_1 = r_D - r_A$ ,  $u_2 = r_D - \rho_D$  y  $u_3 = r_D - \sigma_D$ . Ahora realizamos el clásico cambio de variables kepleriano, que corresponde al segundo cambio de variable:  $x = 1/u$ , el cual permite escribir la integral de la forma:

$$\phi(x) = \frac{B}{c} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}, \quad (7.19)$$

donde  $c = \sqrt{u_1 u_2 u_3}$  y el polinomio y las constantes corresponden a  $P_3(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)$ ,  $x_1 = 1/u_1$ ,  $x_2 = 1/u_2$  y  $x_3 = 1/u_3$ . Sin embargo, es mejor escribir el polinomio en  $x$  de la forma siguiente  $P_3(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , donde las constantes son definidas  $\alpha = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\beta = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$  y  $\gamma = x_1 x_2 x_3$ . Con estas expresiones podemos realizar el tercer cambio de variables para llevar la inetgral una forma factible de resolver mediante funciones elípticas de Weierstrass. El tercer cambio de variable es:  $x = 4U - \alpha/3$ , donde la integral toma la forma

$$\phi(U) = \frac{B}{c} \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4P_3(U)}}, \quad (7.20)$$

Aquí el polinomio en la variable  $U$  cumple la relación  $4P_3(U) = 4U^3 - g_2U - g_3$ , donde el polinomio de tercer grado es  $P_3(U) = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3) = U^3 - \frac{g_2}{4}U - \frac{g_3}{4}$ . Las constantes corresponden  $g_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{3} - \beta \right)$  y  $g_3 = \frac{1}{16} \left( -\gamma - \frac{2\alpha^3}{27} + \frac{\alpha\beta}{3} \right)$ . Finalmente la integral en cuestión se escribe de la forma

$$\kappa\phi = \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_2U - g_3}}, \quad (7.21)$$

donde  $\kappa = \frac{c}{B}$ , y la solución exacta es

$$U = \wp(\kappa\phi), \quad (7.22)$$

el problema puede invertirse y queda totalmente resuelto entregando la trayectoria del fotón

$$r(\phi) = r_D + \frac{1}{4\wp(\kappa\phi) - \frac{\alpha}{3}}, \quad (7.23)$$

esta solución es una trayectoria no confinada que muestra el comportamiento de la luz correspondiente a uno de los test de relatividad general. La gráfica en coordenadas polares puede apreciarse en la figura.

El ángulo de deflección de la luz es definido de la siguiente forma

$$\Delta\varphi = 2|\phi(\infty) - \phi(r_D)| - \pi, \quad (7.24)$$

ahora aplicando nuestro resultado obtenemos una expresión dada por la función inversa de Weierstrass

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\kappa} \wp^{-1} \left( \frac{\alpha}{12} \right) - \pi, \quad (7.25)$$

resultado original y exacto para el ángulo de deflección de la luz.

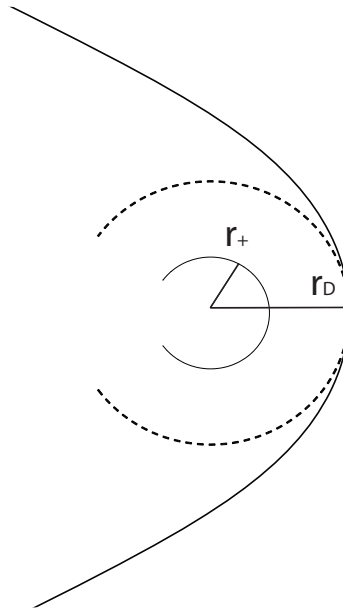


Figura 7.2: Deflección de la luz en el campo de un agujero negro con carga y constante cosmológica negativa

### 7.2.1. Trayectorias de segunda clase

La trayectoria de segunda clase corresponde a un fotón que se encuentra en una región comprendida entre el horizonte de eventos y la barrera de potencial. El fotón tiene un punto de retorno  $r_A$  y luego se precipita al horizonte de eventos. Para calcular la solución de la geodésica vamos a considerar la región permitida  $r_+ < r \leq r_A$ , en este caso el polinomio toma la forma  $P_4(r) = (r_D - r)(r_A - r)(r - \rho_D)(r - \sigma_D)$  y la integral queda dada por

$$\phi(r) = B \int_{r_A}^r \frac{-dr}{\sqrt{P_4(r)}}, \quad (7.26)$$

Para poder realizar la integración vamos a definir el primer cambio de variables, dado por  $u = r_A - r$ , el cual permite obtener la siguiente expresión

$$\phi(u) = B \int_0^u \frac{du}{\sqrt{uP_3(u)}}, \quad (7.27)$$

Donde el polinomio es  $P_3(u) = (u + u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)$  y las correspondientes constantes están dadas por  $u_1 = r_D - r_A$ ,  $u_2 = r_A - \rho_D$  y  $u_3 = r_A - \sigma_D$

Nuevamente recurrimos al cambio de variables kepleriano  $x = 1/u$  y la expresión obtenida es

$$\phi(x) = \frac{B}{c} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}, \quad (7.28)$$

donde  $c = \sqrt{u_1 u_2 u_3}$  y el polinomio en x corresponde a  $P_3(x) = (x+x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ , cuyas constantes son  $x_1 = 1/u_1$ ,  $x_2 = 1/u_2$  y  $x_3 = 1/u_3$

Para continuar el cálculo es conveniente escribir el polinomio en x de la siguiente forma

$$P_3(x) = x^3 - \alpha x^2 - \beta x + \gamma, \quad (7.29)$$

cuyas constantes serán ahora  $\alpha = -x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\beta = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3$  y  $\gamma = x_1 x_2 x_3$ .

Para obtener la forma correspondiente a la integral elíptica se realizará el último cambio de variables, el cual será  $x = 4U + \alpha/3$ , resultando la integral

$$\phi(U) = \frac{B}{c} \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4P_3(U)}}, \quad (7.30)$$

donde el polinomio en U cumple la relación  $4P_3(U) = 4U^3 - g_2 U - g_3$

Es decir que  $P_3(U) = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3) = U^3 - \frac{g_2}{4}U - \frac{g_3}{4}$ , donde las constantes ahora tomarán el valor  $g_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{3} + \beta \right)$  y  $g_3 = \frac{1}{16} \left( -\gamma + \frac{2\alpha^3}{27} + \frac{\alpha\beta}{3} \right)$

Definiendo la constante  $\kappa = \frac{c}{B}$  para obtener la expresión final para la integración

$$\kappa\phi = \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_2U - g_3}}, \quad (7.31)$$

cuya solución es la función elíptica de Weierstrass

$$U = \wp(\kappa\phi). \quad (7.32)$$

El problema es posible de invertir, obteniendo la expresión exacta para la trayectoria de segunda clase tipo luz

$$r(\phi) = r_A - \frac{1}{4\wp(\kappa\phi) + \frac{\alpha}{3}}. \quad (7.33)$$

La siguiente figura muestra la trayectoria de segunda clase para valores fijos de las constantes de movimiento

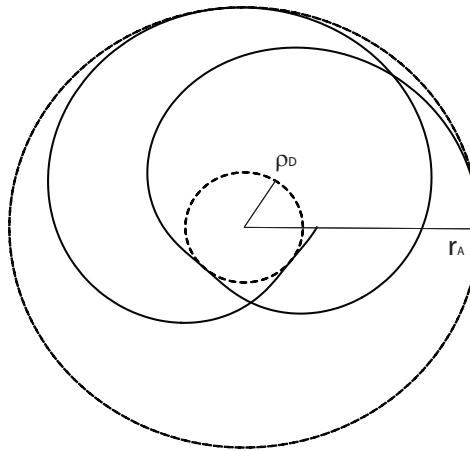


Figura 7.3: El fotón tiene un punto de retorno en  $r_A$  y se precipita al agujero negro cruzando el horizonte de eventos.

### 7.3. Trayectorias críticas

El potencial efectivo para fotones permite la existencia de una órbita circular inestable y la condición para encontrarla corresponde a

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2}(V_{eff}^2)' = 0. \quad (7.34)$$

Las trayectorias críticas poseen un parámetro de impacto crítico definido por

$$b_c := \frac{L}{E_c}, \quad (7.35)$$

y con esta definición la ecuación de la geodésica se escribe de la forma

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{1}{b_c^2} - \frac{1}{\ell^2}\right) - r^2 + 2Mr - Q^2. \quad (7.36)$$

Con el parámetro de impacto crítico y la constante cosmológica podemos definir el parámetro de impacto anómalo  $\mathfrak{D}$  para las trayectorias críticas

$$\frac{1}{\mathfrak{D}^2} := \frac{1}{b_c^2} - \frac{1}{\ell^2} > 0. \quad (7.37)$$

La órbita circular inestable para fotones es independiente de la constante cosmológica, solo depende de la masa y la carga del agujero negro y viene dada en forma exacta por la siguiente ecuación

$$r_c = \frac{3M}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right], \quad (7.38)$$

Conociendo el radio de la trayectoria circular podemos calcular en forma explícita el parámetro de impacto de las trayectorias críticas

$$\frac{1}{\mathfrak{D}^2} = \frac{1}{r_c^2} \left[ 1 - \frac{2M}{r_c} + \frac{Q^2}{r_c^2} \right], \quad (7.39)$$

### 7.3.1. Trayectoria crítica de primera clase

La trayectoria crítica de primera clase corresponde al movimiento de un fotón que arriba desde el infinito y se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable. La ecuación que gobierna esta trayectoria es

$$\left( \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{P_4(r)}{\mathfrak{D}^2}, \quad (7.40)$$

donde el polinomio para las trayectorias críticas viene dado por

$$P_4(r) = r^4 - \mathfrak{D}^2 r^2 + 2M\mathfrak{D}^2 r - Q^2 \mathfrak{D}^2, \quad (7.41)$$

Este polinomio posee cuatro raíces reales de las cuales dos soluciones son iguales, representando la distancia circular crítica, por lo tanto escribimos el polinomio en función de sus raíces

$$P_4(r) = (r - r_c)^2 (r - \rho_c) (r - \sigma_c) = (r - r_c)^2 P_2(r). \quad (7.42)$$

Ahora vamos a escribir la cuadratura para el ángulo  $\phi$  correspondiente a una trayectoria crítica de primera clase

$$\phi(r) = \mathfrak{D} \int_{\infty}^r \frac{-dr}{(r - r_c) \sqrt{P_2(r)}}. \quad (7.43)$$

El rango de la región donde esta trayectoria es permitida corresponde a  $r_c < r$ . Para obtener la solución exacta realizaremos dos cambios de variables, siendo el primero  $u = r - r_c$ , obteniendo la integral

$$\phi(u) = \mathfrak{D} \int_{\infty}^u \frac{-du}{u\sqrt{P_2(u)}}, \quad (7.44)$$

donde el polinomio de segundo grado viene dado por  $P_2(u) = (u + u_1)(u + u_2)$ , cuyas constantes se definen  $u_1 = r_c - \rho_c$  y  $u_2 = r_c - \sigma_c$ . El segundo cambio de variables se realiza mediante  $x = 1/u$ , logrando la siguiente integral

$$\phi(x) = \frac{\mathfrak{D}}{c} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}}, \quad (7.45)$$

donde  $c = \sqrt{u_1 u_2}$ . El polinomio de segundo grado en  $x$  lo escribimos de la forma  $P_2(x) = (x_1 + x)(x_2 + x)$  siendo  $x_1 = 1/u_1$  y  $x_2 = 1/u_2$ . De forma conveniente este polinomio se escribirá  $P_2(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ , definiendo las constantes  $\alpha = x_1 + x_2$  y  $\beta = x_1 x_2$

Entonces, la integral para ser calculada es

$$\kappa\phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}}, \quad (7.46)$$

donde  $\kappa = \frac{c}{\mathfrak{D}}$ , y la solución de la integral es

$$\kappa\phi(x) = \log \left( \frac{2\sqrt{P_2(x)} + 2x + \alpha}{2\sqrt{\beta} + \alpha} \right), \quad (7.47)$$

Definiendo nuevas constantes:  $a = \frac{2}{2\sqrt{\beta} + \alpha}$  y  $b = \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta} + \alpha}$ . La solución puede quedar mejor expresada de la forma

$$\kappa\phi = \log \left( a\sqrt{P_2(x)} + ax + b \right). \quad (7.48)$$

Considerando esta forma podemos resolver el problema de inversión, por lo tanto la ecuación de la trayectoria de primera clase es



$$r(\phi) = r_c + \frac{\rho_1 + \rho_2(e^{\kappa\phi} - b)}{\rho_3(e^{\kappa\phi} - b)^2 - 1}, \quad (7.49)$$

donde las constantes están definidas de la siguiente forma:  $\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\rho_2 = \frac{2}{a\beta}$  y  $\rho_3 = \frac{1}{a^2\beta}$ . El gráfico correspondiente a la trayectoria de luz de primera clase se muestra en la siguiente figura

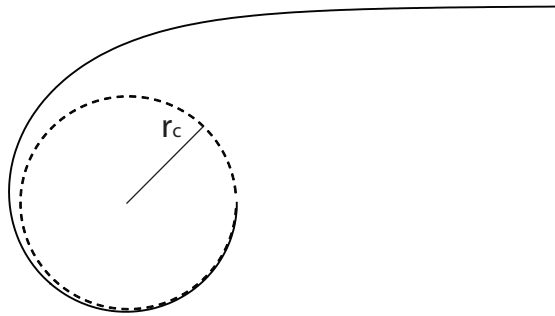


Figura 7.4: Crítica de primera clase. El fotón llega desde el infinito y se aproxima al radio inestable asintóticamente

### 7.3.2. Trayectoria crítica de segunda clase

Esta trayectoria corresponde a un fotón que se acerca a la órbita circular estable desde distancias mayores que el horizonte de eventos pero menores que el radio circular crítico  $r_c > r$ . Esta trayectoria es mejor integrada a partir de la subida desde la distancia  $\rho_c$ , entonces, la cuadratura para el ángulo  $\phi$  es

$$\phi(r) = \mathfrak{D} \int_{\rho_c}^r \frac{dr}{(r_c - r)\sqrt{P_2(r)}}, \quad (7.50)$$

Similar al método de integración de la trayectoria crítica de primera clase realizaremos dos cambios de variable, el primer cambio corresponde a  $u = r_c - r$  así la integral se transforma en

$$\phi(u) = \mathfrak{D} \int_{u_1}^u \frac{-du}{u\sqrt{P_2(u)}}, \quad (7.51)$$

donde  $u_1 = r_c - \rho_c$

Definiendo el polinomio cuadrático en la variable  $u$   $P_2(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)$ , cuyas constantes son  $u_1 = r_c - \rho_c$  y  $u_2 = r_c - \sigma_c$  podemos realizar el segundo cambio de variables:  $x = 1/u$  obteniendo así la integral

$$\phi(x) = \frac{\mathfrak{D}}{c} \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}}, \quad (7.52)$$

donde  $c = \sqrt{u_1 u_2}$ , y el polinomio lo escribimos  $P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  cuyas constantes toman el valor  $x_1 = 1/u_1$  y  $x_2 = 1/u_2$ . Reescribimos el polinomio  $P_2(x) = x^2 - \alpha x + \beta$  y definimos las nuevas constantes  $\alpha = x_1 + x_2$  y  $\beta = x_1 x_2$ , donde la integral resulta ser

$$\kappa\phi(x) = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}}, \quad (7.53)$$

Definiendo la constante  $\kappa = \frac{c}{\mathfrak{D}}$ . La solución de la integral anterior es

$$\kappa\phi(x) = \log \left( \frac{2\sqrt{P_2(x)} + 2x - \alpha}{2x_1 - \alpha} \right), \quad (7.54)$$

Ahora, definiendo nuevas constantes  $a = \frac{2}{2x_1 - \alpha}$  y  $b = \frac{\alpha}{2x_1 - \alpha}$ , la solución queda mejor expresada

$$\kappa\phi = \log \left( a\sqrt{P_2(x)} + ax - b \right), \quad (7.55)$$

Entonces la ecuación de la trayectoria toma la forma final

$$r(\phi) = r_c - \frac{\rho_1 - \rho_2(e^{\kappa\phi} + b)}{1 - \rho_3(e^{\kappa\phi} + b)^2}, \quad (7.56)$$

donde  $\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\rho_2 = \frac{2}{a\beta}$  y  $\rho_3 = \frac{1}{a^2\beta}$

La trayectoria crítica de segunda clase se muestra en la figura siguiente

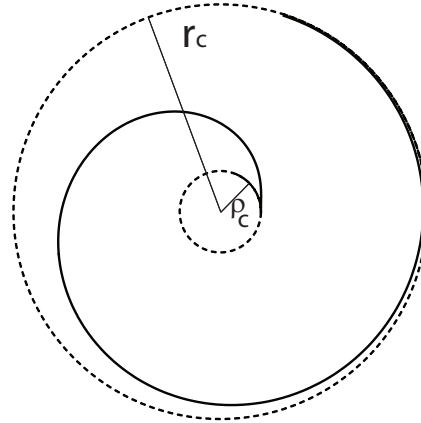


Figura 7.5: Crítica de segunda clase. El fotón se aproxima asintóticamente a la órbita circular inestable desde una distancia menor

## 7.4. Movimiento de fotones capturados

La zona de captura es definida para valores del parámetro de impacto menores que el parámetro de impacto de las trayectorias críticas. Los fotones llegan desde el infinito y se precipitan al horizonte de eventos, teniendo un punto de retorno a una distancia  $\rho$  menor que el horizonte de Cauchy. Para esta trayectoria el polinomio de cuarto grado tiene dos raíces reales y dos raíces complejas, quedando definido por

$$P_4(r) = (r - \rho)(r - \sigma)(r - R_3)(r - R_3^*), \quad (7.57)$$

Esta trayectoria es conveniente integrarla como la subida del fotón a partir de la distancia  $\rho$ , es decir

$$\phi(r) = B \int_{\rho}^r \frac{dr}{\sqrt{P_4(r)}}, \quad (7.58)$$

Analogamente al caso anterior, realizaremos un tratamiento consistente en tres cambios de variable, siendo el primer cambio  $u = r - \rho$ , obteniendo la integral

$$\phi(u) = B \int_0^u \frac{du}{\sqrt{uP_3(u)}}, \quad (7.59)$$

Y el polinomio de tercer grado en  $u$

$$P_3(u) = (u - u_1)(u + u_2)(u - u_3), \quad (7.60)$$

siendo sus constantes  $u_1 = \rho - \sigma$ ,  $u_2 = R_3 - \rho$  y  $u_3 = R_3^* - \rho$

Luego, el segundo cambio de variables realizado es  $x = 1/u$  resultando la siguiente integral

$$\phi(x) = \frac{B}{c} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}, \quad (7.61)$$

donde  $c = \sqrt{u_1 u_2 u_3}$ , cuyo polinomio en  $x$  es

$$P_3(x) = (x_1 - x)(x_2 + x)(x_3 - x), \quad (7.62)$$

De constantes  $x_1 = 1/u_1$ ,  $x_2 = 1/u_2$  y  $x_3 = 1/u_3$

El polinomio es conveniente escribirlo de la forma  $P_3(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , cuyas constantes son  $\alpha = x_1 - x_2 + x_3$ ,  $\beta = -x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3$  y  $\gamma = x_1 x_2 x_3$

Por último, el tercer cambio de variable estará dado por  $x = 4U + \alpha/3$

Obteniendo la integral

$$\phi(U) = \frac{B}{c} \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4P_3(U)}}, \quad (7.63)$$

En esta integral, el polinomio en  $U$  cumple la relación  $4P_3(U) = 4U^3 - g_2 U - g_3$

Es decir  $P_3(U) = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3) = U^3 - \frac{g_2}{4}U - \frac{g_3}{4}$  cuyas constantes asociadas son  $g_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{3} - \beta \right)$  y  $g_3 = \frac{1}{16} \left( -\gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} \right)$

Definiendo la constante  $\kappa = \frac{c}{B}$  la integral toma la forma

$$\kappa\phi = \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_2U - g_3}}, \quad (7.64)$$

En este caso la solución corresponde a

$$U = \wp(\kappa\phi), \quad (7.65)$$

y la inversión del problema resulta

$$r(\phi) = \rho + \frac{1}{4\wp(\kappa\phi) + \frac{\alpha}{3}}, \quad (7.66)$$

El gráfico en coordenadas polares es el siguiente

## 7.5. Limaçon de Pascal

La trayectoria llamada limaçon de Pascal es una geodésica única para el agujero negro de RNAdS, corresponde a una curva epicloide definida por su parámetro de impacto

$$b_h := \frac{L}{E_h}, \quad (7.67)$$

Este parámetro de impacto anula el término cosmológico en la ecuación de las geodésicas, es decir

$$0 = \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{b_h^2}, \quad (7.68)$$

Por lo tanto, la ecuación que gobierna esta trayectoria se reduce a

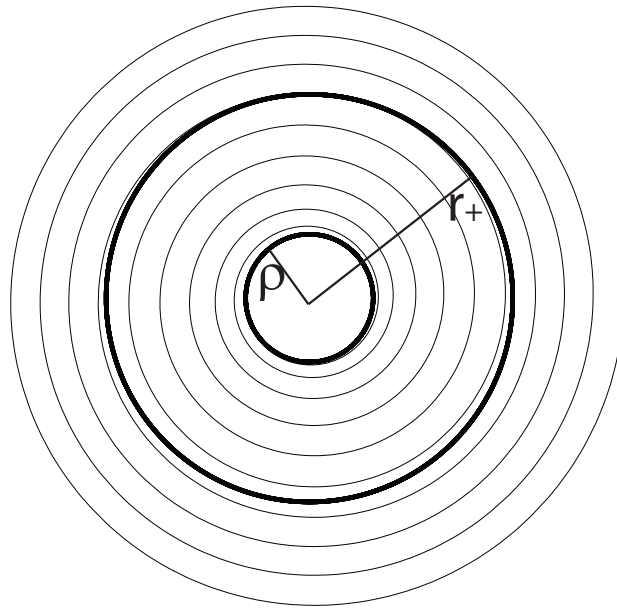


Figura 7.6: Fotón capturado. La trayectoria llega desde el infinito y se precipita al horizonte de eventos.

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = -r^2 + 2Mr - Q^2, \quad (7.69)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = P_2(r), \quad (7.70)$$

donde el polinomio de segundo grado queda definido por  $P_2(r) = -r^2 + 2Mr - Q^2$ , cuyas raíces son los puntos de retorno del movimiento, las cuales corresponden a  $r_1 = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  y  $r_2 = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$

La cuadratura para el ángulo  $\phi$  es la integral calculada como la caída desde la distancia  $r_1$

$$\phi(r) = \int_{r_1}^r \frac{-dr}{\sqrt{P_2(r)}}, \quad (7.71)$$

La solución de esta integral corresponde gráficamente a la curva llamada limaçon de Pascal

$$r(\phi) = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \cos \phi. \quad (7.72)$$

Esta curva es una epicicloide.

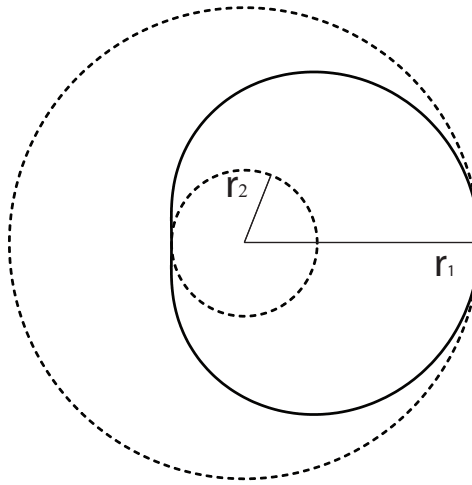


Figura 7.7: Limaçon de Pascal. Trayectoria única de este agujero negro.

## 7.6. Fotones confinados

En el gráfico del potencial efectivo para fotones existe una región donde el parámetro de impacto es mayor que el parámetro de impacto de la limaçon de Pascal. En dicha región siempre existe un punto de retorno para los fotones a partir del cual se precipitan al horizonte de eventos. Esta región es llamada zona de confinamiento, cuya ecuación de la trayectoria es

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = -r^4 \left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{b^2}\right) - r^2 + 2Mr - Q^2, \quad (7.73)$$

Podemos definir una nueva constante, denotándola parámetro de confinamiento  $D$ , dada por la expresión

$$\frac{1}{D^2} := \frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{b^2} > 0, \quad (7.74)$$

con esta definición la ecuación de las geodésicas se reduce a

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{P_4(r)}{D^2}, \quad (7.75)$$

El polinomio para las órbitas confinadas viene dado por  $P_4(r) = -r^4 - D^2r^2 + 2MD^2r - Q^2D^2$  donde existen dos raíces reales y dos complejas, por lo cual escribimos  $P_4(r) = (r_0 - r)(r - \rho_0)(r - r_3)(r - r_3^*)$ . Calculamos la trayectoria como la caída desde  $r_0$

$$\phi(r) = D \int_{r_0}^r \frac{-dr}{\sqrt{P_4(r)}}, \quad (7.76)$$

Los radios permitidos para esta trayectoria fluctúan entre  $r_+ < r < r_0$ . La integración de esta trayectoria también requiere de tres cambios de variable. El cambio número uno corresponde a  $u = r - r_0$

$$\phi(u) = D \int_0^u \frac{du}{\sqrt{uP_3(u)}}, \quad (7.77)$$

El polinomio de tercer grado corresponde a  $P_3(u) = (r_0 - u - r_3)(r_0 - u - \rho_0)(r_0 - u - r_3^*)$ , cuyas constantes son  $u_1 = r_0 - r_3$ ,  $u_2 = r_0 - \rho_0$  y  $u_3 = r_0 - r_3^*$ . El polinomio lo reescribimos  $P_3(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u)$  y aplicamos el cambio de variables número dos  $x = 1/u$ . Entonces la integral toma la forma

$$\phi(x) = \frac{D}{c} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}, \quad (7.78)$$



Donde  $c = \sqrt{u_1 u_2 u_3}$ , y el polinomio de tercer grado lo expresamos como  $P_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ , siendo sus constantes  $x_1 = 1/u_1$ ,  $x_2 = 1/u_2$  y  $x_3 = 1/u_3$ . La mejor expresión para continuar el cálculo es considerar el polinomio  $P_3(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ , donde  $\alpha = x_1 + x_2 + x_3$ ,  $\beta = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$  y  $\gamma = x_1 x_2 x_3$ .

Realizando ahora el tercer cambio de variable  $x = 4U + \alpha/3$  se obtiene la integral

$$\phi(U) = \frac{D}{c} \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4P_3(U)}}, \quad (7.79)$$

y el polinomio en  $U$  cumple la relación  $4P_3(U) = 4U^3 - g_2 U - g_3$  y está dado por la expresión  $P_3(U) = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3) = U^3 - \frac{g_2}{4}U - \frac{g_3}{4}$ , donde las constantes del polinomio resultan ser  $g_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{3} - \beta \right)$  y  $g_3 = \frac{1}{16} \left( \gamma + \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} \right)$ , junto con la constante  $\kappa = \frac{c}{D}$  nos permiten escribir la cuadratura final

$$\kappa\phi = \int_U^\infty \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_2 U - g_3}}, \quad (7.80)$$

cuya solución de esta integral es

$$U = \wp(\kappa\phi), \quad (7.81)$$

El problema de inversión nos entrega la ecuación polar de la órbita confinada

$$r(\phi) = r_0 - \frac{1}{4\wp(\kappa\phi) + \frac{\alpha}{3}}. \quad (7.82)$$

## 7.7. Geodésicas radiales

La caída radial para fotones revela una importante fenómeno que ocurre en los agujeros negros. las ecuaciones relevantes

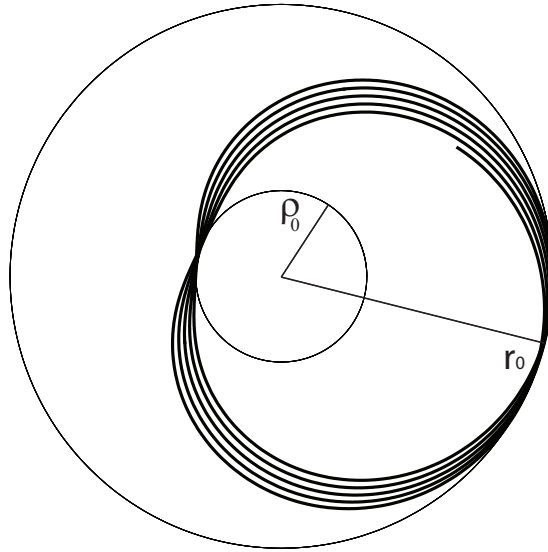


Figura 7.8: Fotón confinado. Existe un punto de retorno para el fotón y luego cae, al agujero negro, inevitablemente.

$$\pm \frac{dr}{d\tau} = E \quad y \quad \pm \frac{dr}{dt} = \frac{\Delta_\ell}{\ell^2 r^2}, \quad (7.83)$$

Si consideramos la caída hacia el centro elegimos el signo menos y el signo positivo si los fotones se van al exterior. La integración respecto al parametro  $\tau$  da un resultado clasico que se encuentra en todos los agujeros de Einstein

$$r = \pm E\tau + constante, \quad (7.84)$$

el resultado es independiente de las cantidades de la métrica, luego el foton cruza el horizonte de eventos en un tiempo finito. Para integrar definimos

$$\Delta_\ell = (r - r_+)(r - r_-)g(r) \quad con \quad g(r) = r^2 + 2R_+r + [\ell^2 + 3R_+^2 + (r_+ - R_+)^2], \quad (7.85)$$

y la integración respecto a  $t$  es

$$t = \pm \ell^2 \left[ A \ln \left( \frac{r - r_+}{r_I - r_+} \right) + B \ln \left( \frac{r - r_-}{r_I - r_-} \right) + C \ln \left[ \frac{g(r)}{g(r_I)} \right] + D \arctan \left( \frac{r + R_+}{\sqrt{\ell^2 + 3R_+^2 - r_+ r_-}} \right) \right] \quad (7.86)$$

donde las constantes son

$$A = \frac{r_+^2}{(r_+ - r_-)g(r_+)}, \quad (7.87)$$

$$B = -\frac{r_-^2}{(r_+ - r_-)g(r_-)}, \quad (7.88)$$

$$C = -R_+ \frac{\ell^2 + 4R_+^2}{g(r_+)g(r_-)}, \quad (7.89)$$

$$D = \frac{[\ell^2 + 3R_+^2 + (r_+ - R_+)^2][\ell^2 + 6R_+^2 - 2r_+ r_-] + 2R_+^2 r_+ r_-}{g(r_+)g(r_-)[\ell^2 + 3R_+^2 - r_+ r_-]}^{1/2}, \quad (7.90)$$

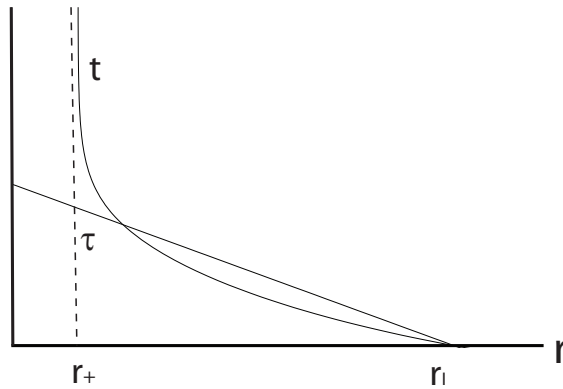


Figura 7.9: Trayectorias radiales. El fotón cruza el horizonte de eventos según el tiempo propio, sin embargo, demora un tiempo coordenado infinito en llegar al horizonte de eventos.

## Capítulo 8

# Movimiento de fotones en el agujero negro Reissner-Nordström de Sitter

La ecuación de movimiento para las geodésicas nulas en el espaciotiempo RNdS

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right), \quad (8.1)$$

definimos el potencial efectivo para fotones

$$V^2(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right), \quad (8.2)$$

las definiciones de momentum angular y parámetro de impacto son análogas al caso anterior. La ecuación para el ángulo

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\Lambda}{3}\right) - r^2 + 2Mr - Q^2, \quad (8.3)$$

Ahora, el parámetro de impacto anómalo es definido de la siguiente forma

$$\frac{1}{B^2} := \frac{1}{b^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (8.4)$$

con esto, la ecuación para el ángulo es

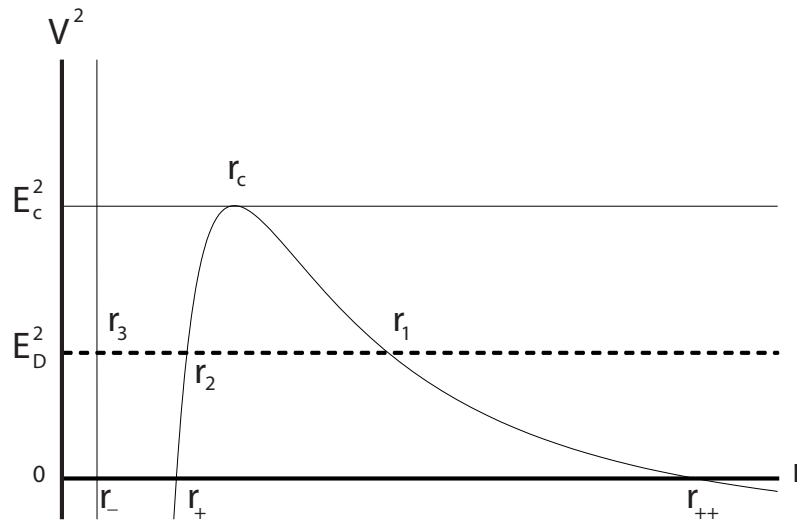


Figura 8.1: Potencial efectivo para fotones en el agujero de RNdS

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{P_4(r)}{B^2}, \quad (8.5)$$

y polinomio de las órbitas queda

$$P_4(r) = r^4 - B^2 r^2 + 2MB^2 r - Q^2 B^2, \quad (8.6)$$

Para diferentes valores de la constante  $b$  las órbitas permitidas son las siguientes

1.- *Zona de Captura*. Si  $0 < b < b_c$ , los fotones llegan desde el infinito y se precipitan al horizonte de eventos.

2.- *Trayectorias Críticas*. Si  $b = b_c$ , los fotones pueden estar en una órbita circular inestable de radio  $r_c$ . El radio de esta órbita es independiente de  $L$ ;  $L$  sólo afecta el valor de la energía  $E_c$ . Fotones que arriban desde el infinito pueden caer asintóticamente al círculo de radio  $r_c$ .

3.- *Zona de Deflección*. Si  $b_c < b < \infty$ , fotones caen desde el infinito a una distancia mínima  $r = r_D$  y luego regresan al infinito. Estos fotones son sólo deflectados.

Las otras trayectorias permitidas corresponden a fotones moviéndose al otro lado de la barrera de potencial, los cuales se precipitan al horizonte de eventos.

Las trayectorias críticas son semejantes al caso RNAdS, también la circular inestable que no depende de la constante cosmológica. Las trayectorias para fotones capturados también son similares, por lo cual, sólo calcularemos la deflección de la luz, porque es la prueba de la relatividad que estudiamos en profundidad en este trabajo.

## 8.1. Deflección de la luz

La deflección de la luz en este caso será calculada mediante funciones elípticas de Jacobi. El polinomio característico de las trayectorias es

$$P_4(r) = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4), \quad (8.7)$$

la región donde se mueven estos fotones es  $r \geq r_1 > r_2 > r_3 > r_4$

La solución de la trayectoria de deflección

$$r(\phi) = \frac{r_1 - r_2 \delta \operatorname{sn}^2(\alpha \phi)}{1 - \delta \operatorname{sn}^2(\alpha \phi)}, \quad (8.8)$$

Las constantes que definen las funciones elípticas son  $\alpha := \frac{1}{2B} \sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}$  y  $\delta := \frac{(r_1 - r_4)}{(r_2 - r_4)}$ . Además, el módulo de la integral elíptica es  $\kappa := \sqrt{\frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}}$ . Ahora podemos hacer el gráfico polar

## 8.2. Trayectoria de segunda clase

La trayectoria de segunda clase pertenece a la zona de deflección. Corresponde a una fotón que se mueve entre el horizonte de eventos y la barrera de potencial, es

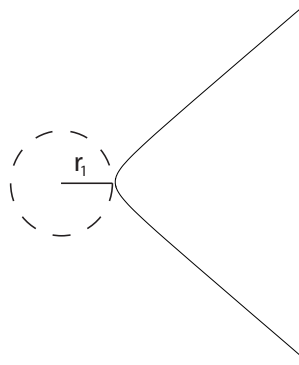


Figura 8.2: Deflección de la luz en el agujero negro RNdS

decir, las geodésicas tienen un punto de retorno. El polinomio característico está dado por

$$P_4(r) = (r_1 - r)(r_2 - r)(r - r_3)(r - r_4), \quad (8.9)$$

la región para el movimiento del fotón es  $r_1 > r_2 \geq r > r_3 > r_4$ . La solución de la trayectoria de caída

$$r(\phi) = \frac{r_2 - r_1 \lambda s n^2(\alpha \phi)}{1 - \lambda s n^2(\alpha \phi)}, \quad (8.10)$$

Esta solución viene entregada por funciones elípticas de Jacobi. Las constantes de la integración son

$$\alpha := \frac{1}{2B} \sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}, \quad (8.11)$$

$$\lambda := \frac{(r_1 - r_4)}{(r_2 - r_4)}, \quad (8.12)$$

y el módulo de la integral elíptica es

$$\kappa := \sqrt{\frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}}, \quad (8.13)$$

El gráfico corresponde a la trayectoria de segunda clase

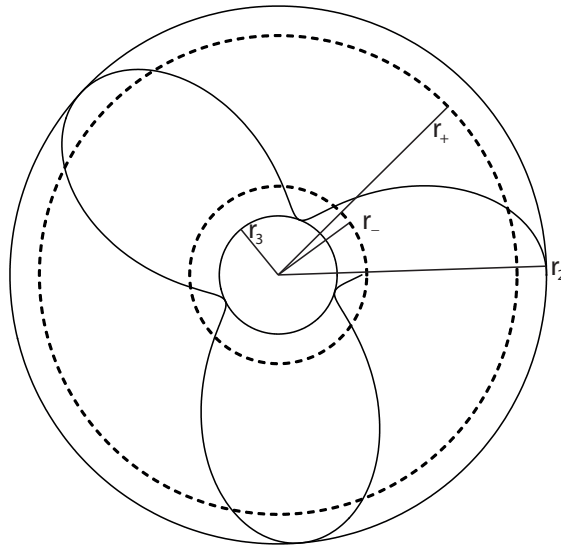


Figura 8.3: Geodésica de segunda clase. El fotón se precipita al horizonte de eventos

### 8.2.1. Trayectorias radiales

La caída radial para fotones revela una importante fenómeno que ocurre en los agujeros negros. Las ecuaciones relevantes son

$$\pm \frac{dr}{dt} = -\frac{\Lambda \Delta_\Lambda}{3r^2}, \quad (8.14)$$



Si consideramos la caída hacia el centro elegimos el signo menos y el signo positivo si los fotones se van al exterior. La integración respecto al parametro  $\tau$  da un resultado clásico que se encuentra en todos los agujeros de Einstein

$$r = \pm E\tau + \text{constante}, \quad (8.15)$$

el resultado es independiente de las cantidades de la métrica, luego el fotón cruza el horizonte de eventos en un tiempo finito. Para integrar definimos

$$\Delta_\Lambda = (r - r_{++})(r - r_+)(r - r_-)(r - r_4), \quad (8.16)$$

y la integración respecto a  $t$  es

$$t^{(\pm)} = \pm \frac{\Lambda}{3} \left[ A_{++} \ln \left( \frac{r_{++} - r}{r_{++} - r_I} \right) + B_+ \ln \left( \frac{r - r_+}{r_I - r_+} \right) + C_- \ln \left( \frac{r - r_-}{r_I - r_-} \right) + D_4 \ln \left( \frac{r - r_4}{r_I - r_4} \right) \right] + c \quad (8.17)$$

donde las constantes son

$$A_{++} = -\frac{r_{++}^2}{(r_{++} - r_+)(r_{++} - r_-)(r_{++} - r_4)}, \quad (8.18)$$

$$B_+ = \frac{r_+^2}{(r_{++} - r_+)(r_+ - r_-)(r_+ - r_4)}, \quad (8.19)$$

$$C_- = \frac{r_-^2}{(r_{++} - r_-)(r_+ - r_-)(r_- - r_4)}, \quad (8.20)$$

y

$$D_4 = \frac{r_4^2}{(r_{++} - r_4)(r_+ - r_4)(r_- - r_4)}. \quad (8.21)$$

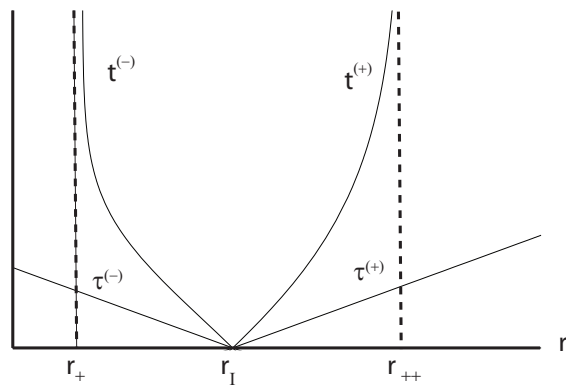


Figura 8.4: Trayectorias radiales para el agujero negro RNdS. Los fotones cruzan los horizontes de eventos y cosmológico según el tiempo propio, sin embargo, demoran un tiempo coordenado infinito en llegar a ambos horizontes

## Capítulo 9

# Tiempo de retardo de las señales de radar

Una tercera prueba de la relatividad general en el Sistema Solar es el retardo del tiempo en las señales de radar [15]. La idea de esta prueba es medir el tiempo necesario de las señales de radar para viajar desde la Tierra a un planeta o satélite cuando la señal pasa muy cerca del Sol y luego regresa a la Tierra. Para calcular el retardo del tiempo para este circuito consideramos que la señal es transmitida desde el punto  $(r_1, \theta = \pi/2, \phi_1)$  a otro punto  $(r_2, \theta = \pi/2, \phi_2)$ . Para determinar el tiempo requerido, partimos con la ecuación de movimiento para el fotón respecto del tiempo coordenado.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{f(r)}{E} \sqrt{E^2 - f(r) \frac{L^2}{r^2}}, \quad (9.1)$$

introducimos en la ecuación el parámetro de impacto  $b := \frac{L}{E}$  correspondiente a una trayectoria en la zona de deflexión y realizamos la integración entre la distancia mínima de acercamiento  $r_D$  y una distancia finita  $r$

$$t(r) = \int_{r_D}^r \frac{dr}{f(r) \sqrt{1 - b^2 \frac{f(r)}{r^2}}}, \quad (9.2)$$

donde  $f(r) = 1 - h(r)$  y la función es:  $h(r) = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3}$ . Ahora el parámetro de impacto se expresa en términos de la distancia de deflexión  $r_D$

$$b^2 = \frac{r_D^2}{1 - h(r_D)}, \quad (9.3)$$

el tiempo que requiere la luz para ir desde  $r_D$  a  $r$  es

$$t(r) = \int_{r_D}^r \frac{dr}{[1 - h(r)] \sqrt{1 - \frac{r_D^2}{r^2} \left[ \frac{1-h(r)}{1-h(r_D)} \right]}}. \quad (9.4)$$

Considerando que para el sistema solar  $h(r) \ll 1$  y  $h(r_D) \ll 1$  realizamos las siguientes aproximaciones:

$$\frac{1}{1 - h(r)} \simeq 1 + h(r), \quad y \quad \frac{1 - h(r)}{1 - h(r_D)} \simeq 1 + h(r_D) - h(r), \quad (9.5)$$

insertamos estas relaciones en la cuadratura para el tiempo coordenado obteniendo la siguiente integral

$$t(r) \simeq \int_{r_D}^r \frac{[1 + h(r)] dr}{\sqrt{1 - \frac{r_D^2}{r^2} - \frac{r_D^2}{r^2} [h(r_D) - h(r)]}}, \quad (9.6)$$

la integral es mejor presentada de la forma

$$t(r) \simeq \int_{r_D}^r \frac{r[1 + h(r)]}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} \left[ 1 + \frac{r_D^2 [h(r_D) - h(r)]}{2(r^2 - r_D^2)} \right] dr, \quad (9.7)$$

esta cuadratura es separada en tres integrales

$$t(r) \simeq t_0(r) + t_I(r) + t_{II}(r), \quad (9.8)$$

**Primera integral:**  $t_0(r)$ 

Esta integral corresponde a

$$t_0(r) = \int_{r_D}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} dr = \sqrt{r^2 - r_D^2}, \quad (9.9)$$

y la solución es una función elemental y representa el tiempo que la luz demora en ir de  $r_D$  a  $r$  viajando en línea recta

**Segunda integral:**  $t_I(r)$ 

La segunda integral introduce términos de masa, carga y constante cosmológica debido al viaje por el espaciotiempo curvo

$$t_I(r) = \int_{r_D}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} h(r) dr = \int_{r_D}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} \left[ \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda r^2}{3} \right] dr, \quad (9.10)$$

y la solución es

$$t_I(r) = 2M \ln \left( \frac{r + \sqrt{r^2 - r_D^2}}{r_D} \right) - \frac{Q^2}{r_D} \sec^{-1} \left( \frac{r}{r_D} \right) + \frac{\Lambda}{9} (r^2 + 2r_D^2) \sqrt{r^2 - r_D^2}, \quad (9.11)$$

**Tercera integral**  $t_{II}(r)$ 

La tercera integral también entrega términos correctivos debido a la presencia de los parámetros de la métrica

$$t_{II}(r) = \int_{r_D}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} \left[ \frac{r_D^2 [h(r_D) - h(r)]}{2(r^2 - r_D^2)} \right] dr, \quad (9.12)$$

$$t_{II}(r) = \int_{r_D}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_D^2}} \left[ \frac{M}{r(r + r_D)} - \frac{Q^2}{2r^2} - \frac{\Lambda}{6} r_D^2 \right] dr, \quad (9.13)$$

la solución es

$$t_{II}(r) = M\sqrt{\frac{r-r_D}{r+r_D}} - \frac{Q^2}{2r_D} \sec^{-1}\left(\frac{r}{r_D}\right) - \frac{\Lambda}{6}\sqrt{r^2-r_D^2}. \quad (9.14)$$

**Tiempo de retardo:  $\Delta t$**

Se define el tiempo de retardo como  $\Delta t$ , y representa uno de los efectos de la gravitación sobre el movimiento de la luz. Para determinar finalmente el resultado que entrega la relatividad general consideramos el límite  $r_D \gg r_1, r_2$  y obtenemos el retardo del tiempo debido a la masa, la carga y la constante cosmoógica

$$\Delta t = \Delta t^{(M)} + \Delta t^{(Q)} + \Delta t^{(\Lambda)}, \quad (9.15)$$

$$\Delta t^{(M)} = 4M \left[ 1 + \ln\left(\frac{4r_1r_2}{r_D^2}\right) \right], \quad (9.16)$$

$$\Delta t^{(Q)} = -\frac{3Q^2}{r_D} \left[ \sec^{-1}\left(\frac{r_1}{r_D}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{r_2}{r_D}\right) \right]. \quad (9.17)$$

y

$$\Delta t^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{3} \left[ \frac{2}{3}(r_1^3 + r_2^3) - r_D^2(r_1 + r_2) \right], \quad (9.18)$$

y si despreciamos los términos de carga y constante cosmológica, resulta el cálculo clásico en la geometría de Schwarzschild.

# Capítulo 10

## Geodésicas en el agujero negro de Lifshitz

La métrica para un agujero negro estático, asintóticamente de Lifshitz, en tres dimensiones está dada por

$$ds^2 = -\frac{r^4\Delta}{\ell^6}dt^2 + \frac{\ell^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (10.1)$$

donde  $\Delta = r^2 - r_+^2$ . Este agujero presenta solo un horizonte de eventos:  $r_+ = \ell\sqrt{M}$ . Las coordenadas son definidas tales que:  $-\infty \leq t \leq \infty$ ,  $r \geq 0$ , y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Para estudiar el movimiento de partículas de prueba en el campo del agujero negro de Lifshitz escribimos el lagrangiano

$$2\mathcal{L} = -\frac{r^4\Delta}{\ell^6}\dot{t}^2 + \frac{\ell^2}{\Delta}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -m^2, \quad (10.2)$$

donde los puntos corresponden a la derivada respecto del tiempo propio  $\tau$  a lo largo de la trayectoria. Las constantes de movimiento son la energía  $E$  y el momentum angular  $L$  de la partícula con masa  $m$ , dadas por las siguientes expresiones

$$E = \frac{r^4\Delta}{\ell^6}\dot{t} \quad y \quad L = r^2\dot{\phi}. \quad (10.3)$$

A partir de estas ecuaciones podemos determinar la velocidad radial para la partícula con respecto al tiempo propio y al tiempo coordinado. También podemos encontrar una ecuación que dependa del ángulo azimutal

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\ell^4}{r^4} \left[ E^2 - \frac{r^4 \Delta}{\ell^6} \left( m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right], \quad (10.4)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{r^4 \Delta^2}{\ell^8 E^2} \left[ E^2 - \frac{r^4 \Delta}{\ell^6} \left( m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right], \quad (10.5)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{\ell^4}{L^2} \left[ E^2 - \frac{r^4 \Delta}{\ell^6} \left( m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right], \quad (10.6)$$

Este espaciotiempo no permite que las partículas de prueba escapen al infinito, es decir, existen puntos de retorno para la partícula como distancias máximas a las que puede acceder. Los puntos de retorno de la partícula cumplen la condición que la velocidad radial es cero,  $\frac{dr}{dt} = 0$ .

Definimos un potencial efectivo que permite el análisis de las posibles trayectorias

$$V^2 = \frac{r^4 \Delta}{\ell^6} \left( m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right), \quad (10.7)$$

El potencial efectivo es definido como una función explícita de  $r$ . Para partículas ( $m = 1$ ). Análogamente, para fotones ( $m = 0$ ). Estos potenciales serán analizados en extensión en las secciones siguientes

## 10.1. Geodésicas tipo tiempo

El potencial efectivo correspondiente a partículas es conveniente escribirlo de la forma



$$V^2 = \frac{r^4}{\ell^6} (r^2 - r_+^2) \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right), \quad (10.8)$$

y el gráfico siguiente representa un potencial típico para partículas con  $L = 0$  y  $L \neq 0$ .

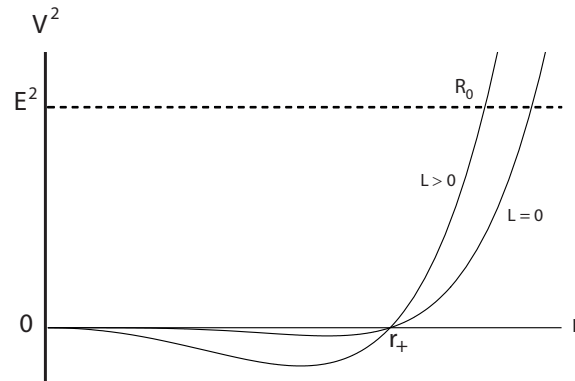


Figura 10.1: Potencial efectivo para partículas.

Para determinar los extremos del potencial calculamos la primera derivada del potencial efectivo y la igualamos a cero

$$\frac{dV^2}{dr} = 0, \quad (10.9)$$

y a partir de esta expresión obtenemos un polinomio de cuarto grado, cuyas raíces nos entregarán un extremo del potencial efectivo, el cual físicamente representará un punto de equilibrio. La ecuación de los extremos es

$$3r^4 - 2(r_+^2 - L^2)r^2 - L^2r_+^2 = 0, \quad (10.10)$$

Este polinomio posee dos raíces reales y dos raíces complejas. De las raíces reales una es negativa y la otra positiva. Calcularemos la raíz positiva para analizar si corresponde a un punto de equilibrio para la partícula de prueba. Distinguiremos

dos casos particulares de interes físico: cuando la partícula posee un movimiento radial y cuando se mueve con momentum angular positivo.

**Caso  $L = 0$**  La ecuación de los máximos tiene una solución real que corresponde a un mínimo del potencial, cuyo valor es

$$r_{ext} = \sqrt{\frac{2}{3}}r_+, \quad (10.11)$$

Este mínimo del potencial es claramente menor que el horizonte de eventos por lo cual no tiene interés físico en el movimiento de la partícula, por lo tanto no existe una distancia de equilibrio para el movimiento radial.

**Caso  $L = r_+$**  Analizaremos ahora la ecuación de los extremos para un momentum angular positivo, por sencillez hacemos  $L = r_+$ , y obtenemos que la solución para la distancia extrema es

$$r_{ext} = \frac{r_+}{3^{1/4}}, \quad (10.12)$$

y en este caso la solución a la distancia extrema tambien es menor que el horizonte, por lo cual esta geometría no tiene distancias estables ni inestables.

A partir de la ecuación (10.6) obtenemos la cuadratura para el ángulo  $\phi$

$$\phi(r) = \pm \int dr \left[ \frac{E^2 \ell^4}{L^2} - \frac{r^4}{L^2} \left( \frac{r^2}{\ell^2} - \frac{r_+^2}{\ell^2} \right) \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (10.13)$$

y la trayectoria es integrada como la caída de la partícula a partir de una distancia inicial  $R_0$  correspondiente a un punto de retorno. La cuadratura queda de la forma

$$\phi(r) = L\ell \int_{R_0}^r \frac{-dr}{\sqrt{E^2 \ell^6 + r_+^2 L^2 r^2 + (r_+^2 - L^2) r^4 - r^6}}, \quad (10.14)$$

y para integrar esta ecuación primero realizamos el cambio de variable  $x = r_+^2/r^2$ , entonces  $x_0 = r_+^2/R_0^2$ , así la ecuación de movimiento para la caída toma la forma

$$k\phi = \phi(x), \quad (10.15)$$

donde la constante es  $k = 2E\ell^2/r_+L$ , y la función en la nueva variable es

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \gamma}}, \quad (10.16)$$

Aquí hemos definido las constantes del polinomio en  $x$  de la siguiente forma

$$\alpha := \frac{r_+^4 L^2}{E^2 \ell^6}, \beta := \frac{r_+^4 (r_+^2 - L^2)}{E^2 \ell^6}, \gamma := \frac{r_+^6}{E^2 \ell^6} \quad (10.17)$$

Ahora realizamos el segundo cambio de variable  $x = 4U - \alpha/3$  para llevar la expresión a una forma conocida de la integral elíptica de Weierstrass, obteniendo así

$$k\phi = \int^U \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_2 U - g_3}}, \quad (10.18)$$

y las constantes  $g_2$  y  $g_3$  son llamadas invariantes de Weierstrass y corresponden a

$$g_2 := \frac{\alpha^2}{12} - \frac{\beta}{4} \quad g_3 := \frac{\gamma}{16} + \frac{\alpha\beta}{48} - \frac{\alpha^3}{216}, \quad (10.19)$$

Definimos ahora el polinomio en la variable  $U$

$$p(U) = U^3 - \frac{g_2}{4}U - \frac{g_3}{4} = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3), \quad (10.20)$$

Entonces la solución exacta a la integral es

$$U = \wp(k\phi + \varpi; g_2, g_3) := \wp(k\phi + \varpi), \quad (10.21)$$

Finalmente podemos escribir la ecuación explícita del radio como función del ángulo  $\phi$

$$r(\phi) = \frac{r_+}{\sqrt{4\wp(k\phi + \varpi) - \frac{\alpha}{3}}}. \quad (10.22)$$

La constante de integración  $\varpi$  está dada por la siguiente relación

$$\wp(\varpi) = U_2, \quad (10.23)$$

El punto de partida desde el cual se precipita la partícula corresponde a

$$R_0 = \frac{r_+}{\sqrt{4\wp(\varpi) - \frac{\alpha}{3}}} = \frac{r_+}{\sqrt{4U_2 - \frac{\alpha}{3}}}, \quad (10.24)$$

Las raíces del polinomio  $p(U)$  dependen de los valores que tomen los invariantes de Weiestrass. Como estas constantes dependen explícitamente de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , pueden tomar valores positivos, nulos o negativos. Debido a esto dividimos la solución en cinco trayectorias posibles.

**Caso I** El primer caso de interés corresponde a  $g_2 < 0$  y  $g_3 > 0$ . Para este caso se cumple que  $\beta > \alpha^2/3$ , siendo dos raíces de este polinomio complejas y una real, las cuales corresponden a  $U_2 > 0$  y  $U_3 = U_1^*$ . La solución real es

$$U_2 = \sqrt{\frac{-g_2}{3}} \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( 3g_3 \sqrt{\frac{3}{-g_2^3}} \right) \right], \quad (10.25)$$

**Caso II** En este segundo caso se cumple que  $g_2 = 0$  y  $g_3 > 0$ , siendo  $\beta = \alpha^2/3$ .

Las tres raíces de este polinomio son reales, pero la solución de interés que permite calcular el punto de partida es

$$U_2 = \sqrt[3]{\frac{g_3}{4}}, \quad (10.26)$$

**Caso III** En este tercer caso consideramos  $g_2 > 0$ , y  $g_3 > 0$ . Para esta condición se cumple  $\beta < \alpha^2/3$ , siendo las raíces de este polinomio dos complejas y una real, las cuales corresponden a  $U_2 > 0$  y  $U_3 = U_1^*$ . La solución real es

$$U_2 = \sqrt{\frac{g_2}{3}} \cosh \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left( 3g_3 \sqrt{\frac{3}{g_2^3}} \right) \right], \quad (10.27)$$

**Caso IV** Ahora consideramos las condiciones  $g_2 > 0$  y  $g_3 = 0$ . Para este caso se cumple  $\beta = 2\alpha^2/9 - 3\gamma/\alpha$

De las tres soluciones reales, la que nos compete es

$$U_2 = \frac{\sqrt{g_2}}{2}, \quad (10.28)$$

**Caso V** Finalmente consideramos  $g_2 > 0$  y  $g_3 < 0$ , obteniendo la relación  $\beta < 2\alpha^2/9 - 3\gamma/\alpha$ .

También aquí existen tres raíces reales, de las cuales determinamos la solución de interés

$$U_2 = \sqrt{\frac{g_2}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( 3g_3 \sqrt{\frac{3}{g_2^3}} \right) \right], \quad (10.29)$$

En la figura siguiente podemos observar las cinco trayectorias estudiadas para partículas masivas en el agujero negro de tres dimensiones.

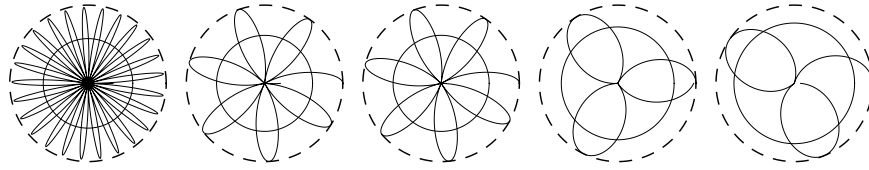


Figura 10.2: Trayectorias de partículas con momentum angular correspondientes a los casos analizados. La línea segmentada representa el punto de partida y la línea sólida el horizonte de eventos.

## 10.2. Trayectorias de fotones

El movimiento de partículas sin masa queda mejor descrito analizando el siguiente potencial efectivo

$$W^2 = \frac{L^2}{\ell^6} (r^2 - r_+^2) r^2, \quad (10.30)$$

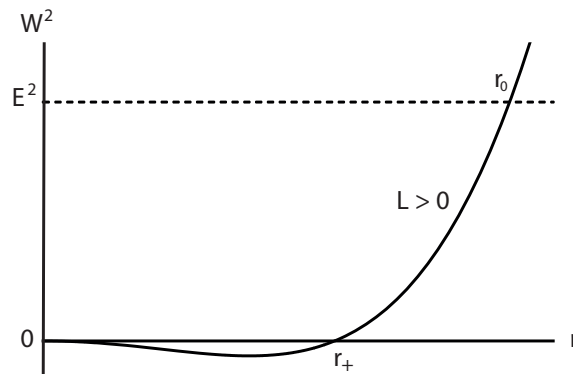


Figura 10.3: Potencial efectivo para fotones

Para determinar los extremos del potencial calculamos la primera derivada respecto del radio

$$\frac{dW^2}{dr} = 0, \quad (10.31)$$

y la ecuación tiene solución para la distancia extrema

$$r_{ext} = \frac{r_+}{\sqrt{2}}, \quad (10.32)$$

Este potencial nos muestra que las trayectorias de las partículas tienen un punto de retorno que no les permiten irse al infinito. La cuadratura para el ángulo  $\phi$  se obtiene a partir de la ecuación (10.6) considerando  $m = 0$

$$\phi(r) = - \int_{r_0}^r dr \left[ \frac{\ell^4}{b^2} - \frac{r^2}{\ell^2} (r^2 - r_+^2) \right]^{-1/2}, \quad (10.33)$$

Hemos definido el parámetro de impacto como  $b = L/E$ . Hacemos el primer cambio de variable  $u = r/r_+$ , así la ecuación de movimiento para la caída toma la forma

$$\phi(u) = - \frac{\ell}{r_+} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}}, \quad (10.34)$$

Vamos a definir el polinomio  $P(u) = \epsilon^2 + u^2 - u^4$  donde  $\epsilon^2 := \ell^6/r_+^2 b^2$ . La integral queda de la siguiente manera

$$\phi(u) = - \frac{\ell}{r_+} \int_{u_0}^u du [(u_0^2 - u^2)(u^2 + u_0^2 - 1)]^{-1/2}, \quad (10.35)$$

y considerando como condición inicial para la integral  $u_0^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2})/2$ , el punto de retorno corresponde

$$r_0 = r_+ \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\ell^6}{r_+^4 b^2}} \right]^{1/2}, \quad (10.36)$$

y la solución es una integral elíptica de Jacobi

$$\kappa\phi(r) = F[\psi(r); q] \quad \text{con} \quad \psi(r) = \arccos[r/r_0], \quad (10.37)$$

don las constantes son

$$q = \frac{r_0}{\sqrt{2r_0^2 - r_+^2}} \quad y \quad \kappa = \frac{r_0}{ql}, \quad (10.38)$$

Ahora invertimos la solución y obtenemos una expresión para el radio como un coseno elíptico de Jacobi.

$$r(\phi) = r_0 \operatorname{cn}(\kappa\phi). \quad (10.39)$$

La figura muestra la trayectoria para el fotón que cruza el horizonte de eventos

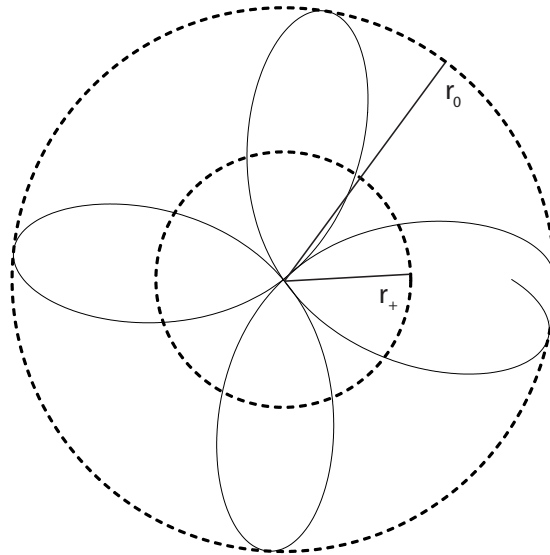


Figura 10.4: Fotón con momentum angular.

### 10.2.1. Trayectorias radiales de fotones

Ahora vamos a considerar el movimiento radial de fotones, es decir,  $L = 0$  y  $m = 0$ . Las ecuaciones que gobiernan este movimiento son



$$\pm \frac{dr}{d\tau} = \frac{E\ell^2}{r^2}, \quad (10.40)$$

y

$$\pm \frac{dr}{dt} = \frac{r^2\Delta}{\ell^4}. \quad (10.41)$$

Vamos a analizar fotones que se precipitan al agujero negro desde el punto de vista del tiempo propio y del tiempo coordinado.

### **Caída radial de fotones respecto del tiempo propio**

En primer lugar estudiaremos el tiempo propio como función del radio. La cuadratura para la caída desde una distancia finita  $r_0$  es

$$\tau(r) = -\frac{1}{\ell^2 E} \int_{r_0}^r r^2 dr, \quad (10.42)$$

cuya solución está dada por

$$\tau(r) = \frac{1}{3\ell^2 E} (r_0^3 - r^3). \quad (10.43)$$

Invertimos la solución para obtener el radio en función del tiempo propio

$$r(\tau) = \sqrt[3]{r_0^3 - 3\ell^2 E\tau}, \quad (10.44)$$

Esta solución nos entrega que la partícula cruza el horizonte en un tiempo finito.

### **Caída radial de fotones respecto del tiempo coordinado**

Ahora calculamos la caída radial de un fotón al agujero negro del punto de vista del tiempo coordinado como función del radio. La cuadratura es

$$t(r) = -\ell^4 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2(r^2 - r_+^2)}, \quad (10.45)$$

y la solución de este movimiento es

$$t(r) = \frac{\ell^4}{2r_+^3} \ln \left( \frac{r_0 - r_+}{r - r_+} \right) - \frac{\ell^4}{2r_+^3} \ln \left( \frac{r_0 + r_+}{r + r_+} \right) - \frac{\ell^4}{r_+^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad (10.46)$$

Esta solución nos entrega que la partícula demora un tiempo infinito en llegar al horizonte de eventos. El gráfico siguiente contiene la caída respecto de los tiempos propio y coordenado, observándose claramente la divergencia del tiempo coordenado en el horizonte.

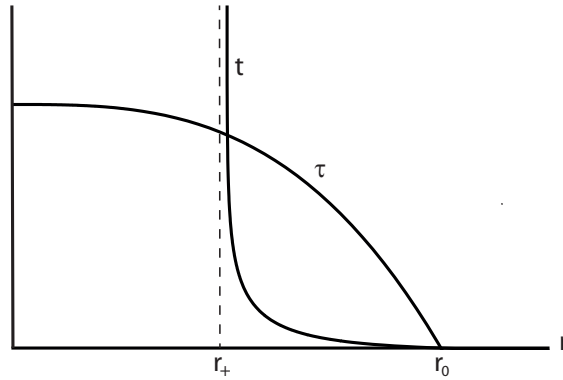


Figura 10.5: Caída radial de fotones según el tiempo propio y el tiempo coordenado

# Capítulo 11

## Conclusiones y Comentarios finales

En esta tesis se han calculado las trayectorias exactas para partículas cargadas en movimiento en el campo de agujeros negros cargados y con constante cosmológica. Primero, hubo un estudio detallado de los horizontes de eventos, tanto para la métrica RNdS como RNAdS, entregándose los radios exactos correspondientes a los horizontes de eventos y cosmológico. Mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi se encuentran las ecuaciones de movimiento para partículas cargadas en estos agujeros negros, a partir de las cuales se estudia específicamente el movimiento en el plano ecuatorial. Primero se calculan las trayectorias circulares obteniendo en forma explícita los períodos de revolución según el tiempo propio y coordinado, estas expresiones generales convergen a los resultados para partículas neutras en el límite  $q = 0$ . El estudio del movimiento angular de partículas cargadas en el agujero negro RNAdS permitió encontrar órbitas planetarias las cuales son factibles de aplicar al Sistema Solar, pensando que el Sol está cargado positivamente y que los planetas tienen una carga pequeña. A las órbitas planetarias se les calculó la precesión de perihelio, una de las pruebas más importantes de la relatividad general. También en este agujero negro se encontraron trayectorias críticas las cuales se aproximaban asintóticamente a una órbita circular inestable. Otro aspecto importante que fue cal-

culado es el comportamiento de las trayectorias radiales, cuyas soluciones analíticas nos muestran otra importante característica de los agujeros negros la cual consiste en que la partícula cargada cruza el horizonte de eventos en un tiempo propio finito, sin embargo demora un tiempo coordinado infinito en llegar a dicho horizonte. En otra sección nos dedicamos a estudiar el movimiento de partículas cargadas en el agujero negro RNdS el cual presenta dos horizontes, uno de eventos y uno cosmológico y se determinaron las trayectorias angulares para partículas cargadas que se precipitan tanto al horizonte de eventos como al horizonte cosmológico, denominadas de segunda y tercera clase respectivamente. Las trayectorias críticas calculadas en este espaciotiempo corresponden a dos órbitas circulares inestables y trayectorias de partículas que se precipitan a estos radios inestables. La trayectoria crítica de tercera clase es una solución única del agujero negro RNdS la cual tiene dos distancias asintóticas correspondientes a las dos órbitas circulares antes mencionadas. Las trayectorias radiales de partículas cargadas presentan una distancia de reposo inestable que solo existe en este agujero negro, demostrando que el movimiento radial cruza los horizontes de eventos y el cosmológico en tiempos propios finitos pero demora un tiempo coordinado infinito en llegar a ambos horizontes. Además se calcularon las trayectorias de fotones en el campo de agujeros cargados y con constante cosmológica, obteniéndose la deflexión de la luz en términos de las funciones elípticas de Weierstrass. Este cálculo corresponde a otra prueba de la relatividad general. Se determinó que los fotones tienen una órbita circular inestable la cual depende de la masa y de la carga, pero no de la constante cosmológica. Se calcularon los períodos de revolución para fotones en órbita circular según el tiempo coordinado y el tiempo propio, obteniéndose expresiones generales las cuales convergen al límite Schwarzschild cuando  $Q = \Lambda = 0$ . Se determinaron dos trayectorias propias de fo-

tones en el agujero RNAdS que son la limaçon de Pascal y las trayectorias confinadas. También se encontraron expresiones para el tiempo de retardo en las señales de radar en términos de la carga del agujero negro y la constante cosmológica. Esta es una tercera prueba de la relatividad general determinada en este trabajo.

En la parte final de este trabajo, se calculó la estructura geodésica completa del agujero negro de Lifshitz, donde se determinaron las geodésicas tipo tiempo en forma analítica y también las trayectorias para fotones. Se encontró que no existen órbitas circulares inestables y tampoco estables. Todas la trayectorias corresponden a partículas que parten desde el reposo y desde una distancia finita y luego se precipitan al horizonte de eventos.

# Apéndice A

## Movimiento respecto a las coordenadas angulares

Cuando las partículas cargadas no están confinadas al plano ecuatorial podemos determinar el movimiento angular posible respecto del ángulo  $\theta$  y también calcular la dependencia del ángulo  $\phi$  respecto de  $\theta$ . En este apéndice calcularemos las soluciones analíticas para las coordenadas angulares las cuales nos dan el comportamiento de las trayectorias en el espacio.

### A.1. Movimiento respecto a la coordenada $\theta$

La coordenada  $\theta$  es el ángulo polar, y puede tomar sólo valores positivos. En esta sección estudiaremos el movimiento cargado según las propiedades de la función  $\Theta$ . Consideremos la primera ecuación de movimiento  $d\theta/d\gamma = \sqrt{\Theta}$  y se requiere que  $\Theta = L^2 - J^2 \csc^2 \theta \geq 0$ , entonces necesariamente  $L^2 > 0$ . Efectuamos el cambio de variables  $\xi = \cos \theta$  y la primera ecuación de Hamilton toma la forma

$$\frac{d\xi}{d\gamma} = \sqrt{\Theta_\xi}; \quad \text{con} \quad \Theta_\xi = K - L^2 \xi^2 \quad (\text{A.1})$$

Los ceros de la función  $\Theta_\xi$  definen los ángulos del cono que confinan el movimiento

de la partícula donde  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Las raíces reales corresponden a  $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{K}/|L|$ . La función  $\Theta_\xi$  representa una parábola con un máximo en  $(0, K)$ , entonces ambos conos son simétricos respecto al plano ecuatorial y la partícula lo cruza en un tiempo finito. Para integrar elegimos los límites de integración donde el valor inicial  $\gamma_0 = 0$  en  $\theta_0 = \theta_1$ . La solución para estas condiciones de borde es

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{|L|} \arccos \left[ \frac{|L|}{\sqrt{K}} \cos \theta \right], \quad (\text{A.2})$$

el tiempo  $\gamma$  que demora en cruzar el plano ecuatorial es  $\gamma(\pi/2) = \pi/2|L|$ . La ecuación anterior es posible de invertir logrando una expresión para el ángulo dada por

$$\theta(\gamma) = \arccos \left[ \frac{\sqrt{K}}{|L|} \cos |L|\gamma \right] \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Movimiento respecto a la coordenada $\phi$

Consideremos las dos ecuaciones de movimiento para las coordenadas angulares:  $d\theta/d\gamma = \sqrt{\Theta}$  y  $d\phi/d\gamma = J/\sin^2 \theta$  para generar la siguiente integral

$$\phi(\theta) = J \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}}, \quad (\text{A.4})$$

por simplicidad elegimos la condición inicial  $\phi(\theta_1) = 0$ , y la solución es

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \arccos \left[ \frac{K + L^2 \cos \theta}{|L|\sqrt{K}(1 + \cos \theta)} \right] + \arcsin \left[ \frac{K - L^2 \cos \theta}{|L|\sqrt{K}(1 - \cos \theta)} \right] + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (\text{A.5})$$

Apartir de esta expresión y reemplazando en ella  $\cos \theta = \frac{\sqrt{K}}{|L|} \cos |L|\gamma$  se obtiene  $\phi(\gamma)$ .

# Referencias

- [1] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [2] F. Kottler 1918 *Annalen Physik* **56** 410 .
- [3] M.J. Jaklitsch, C. Hellaby and D.R. Matravers 1989 *Gen. Rel. Grav.* **21** 941.
- [4] Z. Stuchlík and M. Calvani 1991 *Gen. Rel. Grav.* **23** 507.
- [5] J.Podolsky 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 1703.
- [6] K.Lake 2002 *Phys. Rev. D* **65** 087301.
- [7] G. V. Kraniotis and S. B. Whitehouse 2003 *Class. Quantum Grav.* **20** 4817-4835.
- [8] G. V. Kraniotis 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 4743-4769.
- [9] N.Cruz, M.Olivares and J.R.Villanueva 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** 1167-1190.
- [10] S. Dammer, S.R. Dahmen and H. Hinrichsen, *cond-mat/0106396*.
- [11] M. Livio *The golden ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number*, Broadway Books, 2002.
- [12] P. C. Davis 1977 *Proc. R. Soc. Lond.* **A.353**, 499-521



- [13] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to general relativity*, McGraw-Hill, 1975.
- [14] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge university press, 1990.
- [15] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.
- [16] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [17] Z. Stuchlík and P. Slany 2004 *Phys. Rev. D* **69** 064001 .
- [18] Z. Stuchlík and S. Hledík 2002 *Acta Phys. Slov.* **52**, 363 .
- [19] S.A. Hayward, T. Shirumizo and K. Nakao 1994 *Phys. Rev. D* **49** 5080.
- [20] Z. Stuchlík and S. Hledík 1999 *Phys. Rev. D* **60** 044006.
- [21] E. Hackmann, V. Kagramanova, J. Kunz and C. Lammerzahl, *Phys. Rev. D* **78**, 124018 (2008) [Erratum-ibid. **79**, 029901 (2009)]
- [22] E. Hackmann and C. Lammerzahl, *Phys. Rev. D* **78**, 024035 (2008).
- [23] E. Hackmann and C. Lammerzahl, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 171101 (2008).
- [24] N.Cruz, M.Olivares and J.R.Villanueva 2005 *Gen.Rel.Grav.* **37** 667-674.
- [25] arXiv:1101.0748 M. Olivares, J. Saavedra, C. Leiva, J.R. Villanueva